Theoretische Physik IV: Fortgeschrittene Quantenmechanik

WS 2018/19 **1. Übungsblatt** **19.10.2018**

Vorlesung: Prof. Dr. Alejandro Saenz [Abgabe bis 26.10.2018 (11:15 Uhr)]

Übungen: Bruno Schulz (Gr. I), Marius Bothe (Gr. II), Anvar Khujakulov (Gr. III)

Aufgabe 1: Dichtematrix eines Dreizustandssystems (10 Punkte)

Betrachten Sie ein Teilchen, das als Dreizustandssystem beschrieben werden kann. (Beispiele wären ein Wasserstoffatom, das sich nur in einem der drei $2\,^1$P-Zustände mit den Quantenzahlen $n = 2; l = 1; m = +1, 0$ oder -1 befinden kann, oder ein Teilchen mit Spin 1.) Der Satz $\{|+\rangle, |0\rangle, |-\rangle\}$ der Eigenvektoren des Operators $\hat{\mathrm{L}}_z$ mit den zugehörigen Eigenwerten $+\hbar, 0$ und $-\hbar$ bildet eine mögliche vollständige Basis des zugehörigen Hilbert-Raums. Die Matrixdarstellung von $\hat{\mathrm{L}}_z$ in dieser Basis lautet

$$\mathbb{L}_z = \hbar \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Das Teilchen befinde sich nun in einem Zustand, der in der gleichen Basis über die Dichtematrix

$$\rho = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

beschrieben wird.

a) Warum ist ρ eine zulässige Dichtematrix? Begründen Sie ihre Antwort.

b) Befindet sich das Teilchen, wenn es durch die Dichtematrix ρ beschrieben wird, in einen reinen oder in einem gemischten Zustand?

c) Berechnen Sie den zum Operator $\hat{\mathrm{L}}_z$ gehörigen Erwartungswert $\langle L_z \rangle$ für das Teilchen.

d) Wie groß ist die Varianz ΔL_z ?

Aufgabe 2: Dichtematrixermittelung aus Erwartungswerten (10 Punkte)

Eine vollständige Basis für den ein quantenmechanisches Zweizustandssystem beschreibenden Hilbert-Raum ist z. B. über die Eigenzustände $|\,0\,\rangle$ (mit Eigenwert $+1$) und $|\,1\,\rangle$ (mit Eigenwert -1) des Pauli-Operators $\hat{\sigma}_z$ gegeben. Der Operator $\hat{\sigma}_z$ sowie seine beiden Eigenzustände lauten in Matrix- bzw. Vektordarstellung in dieser Basis

$$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad |\,0\,\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad |\,1\,\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .$$

Die die drei Observablen A, B und C darstellenden Operatoren besitzen in dieser Basis die Matrixdarstellungen

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \quad \mathbb{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbb{C} = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Für einen bestimmten Zustand des Systems wurden die Erwartungswerte

$$\langle\, A \,\rangle = 2 \,, \quad \langle\, B \,\rangle = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \langle\, C \,\rangle = 0$$

gemessen.

a) Bestimmen Sie die Dichtematrix ρ des zu diesen Erwartungswerten gehörigen Zustandes in der Basis $\{|\,0\,\rangle, |\,1\,\rangle\}$.

b) Handelt es sich um einen reinen oder um einen gemischten Zustand?

c) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei einer Messung bezüglich der Observablen σ_z den Wert $+1$ zu finden?

d) Berechnen Sie die Erwartungswerte der Pauli-Matrizen, also $\langle\,\sigma_x\,\rangle$, $\langle\,\sigma_y\,\rangle$ und $\langle\,\sigma_z\,\rangle$. Die Pauli-Matrizen lauten in der Basis $\{|\,0\,\rangle, |\,1\,\rangle\}$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

Aufgabe 3: Dichteoperator eines Systems aus zwei Qubits (10 Punkte)

Der Dichteoperator für ein System bestehend aus zwei Qubits A und B, diese Qubits könnten z. B. der jeweilige Spinfreiheitsgrad von zwei Spin-$\frac{1}{2}$-Teilchen sein, ist in der Basis $\{|\,0\,\rangle, |\,1\,\rangle\}$ über

$$\hat{\rho} = \frac{1}{4} \Big[\sqrt{2}\,|\,00\,\rangle + |\,01\,\rangle + |\,11\,\rangle \Big] \Big[\sqrt{2}\,\langle\,00\,| + \langle\,01\,| + \langle\,11\,| \Big]$$

gegeben, wobei $|\,\alpha\beta\,\rangle \equiv |\,\alpha\,\rangle_A \otimes |\,\beta\,\rangle_B$ gilt.

a) Bestimmen Sie den reduzierten Dichteoperator $\hat{\rho}_A = \mathrm{Sp}_B\{\hat{\rho}\}$ für Teilchen A.

b) Überprüfen Sie, ob $\hat{\rho}$ bzw. $\hat{\rho}_A$ einen reinen oder einen gemischten Zustand beschreiben.