Laserphysik

WS 2017/2018 **4. Exercise sheet** **08.11.2017**

Lecture: Prof. Dr. Alejandro Saenz, Prof. Dr. Oliver Benson

Deliver your solutions no later than 3pm 15.11.2017 (mail box near room 1'701)

Problem 1: Zweiniveau-Atom

Es soll ein 2-Niveau-Atom und dessen Wechselwirkung mit der elektrischen Komponente eines elektromagnetischen Feldes, $\mathbf{E}(t) = E_0 \cos(\omega t)\,\hat{\varepsilon}$, in semiklassischer Beschreibung behandelt werden. Der Gesamt-Hamilton-Operator $\hat{\mathrm{H}}$ lässt sich also gemäß

$$\hat{\mathrm{H}} = \hat{\mathrm{H}}_0 + \hat{\mathrm{H}}_1 \tag{1}$$

schreiben, wobei $\hat{\mathrm{H}}_0$ den Hamilton-Operator des Atoms und $\hat{\mathrm{H}}_1 = -e\,\underline{\hat{\mathrm{r}}}\,\mathbf{E}(t)$ den der Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld bezeichnet. Das Atom besitze die beiden stationären, orthonormalen Eigenzustände von $\hat{\mathrm{H}}_0$, $|\,g\,\rangle$ ("ground") und $|\,e\,\rangle$ ("excited"), d. h.

$$\hat{\mathrm{H}}_0|\,g\,\rangle = \hbar\omega_g|\,g\,\rangle$$
$$\hat{\mathrm{H}}_0|\,e\,\rangle = \hbar\omega_e|\,e\,\rangle$$

Es sollen im folgenden die Lösungen der zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}|\,\psi(t)\,\rangle = \hat{\mathrm{H}}|\,\psi(t)\,\rangle \tag{2}$$

bestimmt werden.

a) Zeigen Sie, dass sich der Hamilton-Operator über

$$\hat{\mathrm{H}} = \hbar\omega_g|\,g\,\rangle\langle\,g\,| + \hbar\omega_e|\,e\,\rangle\langle\,e\,| + E_0\cos\omega t\left[d_{g,e}|\,g\,\rangle\langle\,e\,| + d_{e,g}|\,e\,\rangle\langle\,g\,|\right]$$

mit den Dipolmomenten $d_{i,j} = -e\langle\,i\,|\,\hat{\varepsilon}\cdot\underline{\hat{\mathrm{r}}}\,|\,j\,\rangle$ darstellen lässt.
Hinweis: Die Basis $\{|\,g\,\rangle, |\,e\,\rangle\}$ ist vollständig.

b) Für die Wellenfunktion des Systems wird der Ansatz

$$|\,\Psi(t)\,\rangle = C_g(t)|\,g\,\rangle + C_e(t)|\,e\,\rangle \tag{3}$$

gewählt. Zeigen Sie, dass sich hiermit für die Koeffizienten die Gleichungen

$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}C_g(t) = \hbar\omega_g C_g + E_0\cos(\omega t)d_{g,e}C_e$$
$$\mathrm{i}\hbar\frac{d}{dt}C_e(t) = \hbar\omega_g C_e + E_0\cos(\omega t)d_{e,g}C_g$$

ergeben.

(bitte umblättern . . .)

c) Betrachten Sie nun langsam varierende Amplituden, d. h. machen Sie die Ansätze $c_e(t) = C_e(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_e t}$ und $c_g(t) = C_g(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_g t}$, um zu zeigen, dass

$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt}c_g(t) = \frac{E_0}{2}\, d_{g,e}\, c_e(t)\ \left[e^{\mathrm{i}(-\omega_{e,g}+\omega)t} + e^{-\mathrm{i}(\omega_{e,g}+\omega)t}\right]$$
$$\mathrm{i}\hbar \frac{d}{dt}c_e(t) = \frac{E_0}{2}\, d_{e,g}\, c_g(t)\ \left[e^{\mathrm{i}(\omega_{e,g}+\omega)t} + e^{\mathrm{i}(\omega_{e,g}-\omega)t}\right]$$

gilt. Hier ist $\omega_{e,g} = \omega_e - \omega_g$.

d) Transformieren Sie nun in ein rotierendes Koordinatensystem, d. h. führen Sie die Amplituden

$$\tilde{c}_g(t) = e^{-\mathrm{i}\frac{\delta t}{2}}\, c_g(t)$$
$$\tilde{c}_e(t) = e^{+\mathrm{i}\frac{\delta t}{2}}\, c_e(t)$$

ein, wobei die Verstimmung (*detuning*) δ durch $\delta = \omega - \omega_{e,g}$ gegeben ist. Definieren Sie weiterhin die *Rabi-Frequenz* $\Omega_0 = \frac{d_{e,g}\, E_0}{\hbar}$. Benutzten Sie die *rotating-wave approximation* (Drehwellennäherung), in der Sie die schneller oszillierenden Terme mit $\omega_{e,g} + \omega$ gegenüber denen mit $\omega_{e,g} - \omega$ vernachlässigen. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}\tilde{c}_g(t)\\ \tilde{c}_e(t)\end{pmatrix} \approx -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}\delta & \Omega_0\\ \Omega_0 & -\delta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_g(t)\\ \tilde{c}_e(t)\end{pmatrix}$$

gilt.

e) Zeigen Sie, dass das Gleichungssystem für die zweite Ableitung entkoppelt, d. h. dass

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\tilde{c}_g(t)\\ \tilde{c}_e(t)\end{pmatrix} \approx -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}\delta^2+\Omega_0^2 & 0\\ 0 & \delta^2+\Omega_0^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_g(t)\\ \tilde{c}_e(t)\end{pmatrix}$$

gilt.

f) Zeigen Sie, dass die Lösungen dieser Differentialgleichungen durch

$$\tilde{c}_g(t) \approx -\mathrm{i}\frac{\Omega_0}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\tilde{c}_e(0) + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) - \mathrm{i}\frac{\delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]\tilde{c}_g(0)$$
$$\tilde{c}_e(t) \approx -\mathrm{i}\frac{\Omega_0}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\tilde{c}_g(0) + \left[\cos\left(\frac{\Omega t}{2}\right) + \mathrm{i}\frac{\delta}{\Omega}\sin\left(\frac{\Omega t}{2}\right)\right]\tilde{c}_e(0),$$

mit den *verallgemeinerten Rabi-Frequenzen* $\Omega = \sqrt{\delta^2 + \Omega_0^2}$, gegeben sind.

g) *Bonusaufgabe*
Was bedeutet das Ergebnis in f) für die zeitliche Population $P_e = |\tilde{c}_e(t)|^2$ des angeregten Zustands, wenn sich das System zu Beginn im Grundzustand ($c_g(t=0) = 1$, $c_e(t=0) = 0$) befindet?