Theoretische Physik III: Quantenmechanik

SS 2018 **1. Übungsblatt** **20.04.2018**

Vorlesung: Prof. Dr. Alejandro Saenz [Abgabe bis 27.04.2018 (13:15 Uhr)]

Übungen: Dr. Francesco Intravaia, Marius Bothe, Jose Enrique Alvarez Roca

Aufgabe 1: Interferenzeffekte (4 Punkte)

Betrachten Sie die Wellenfunktionen

$$\psi_1(x,t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_1 x - \omega_1 t)} \quad \text{und} \quad \psi_2(x,t) \;=\; \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_2 x - \omega_2 t)} \;.$$

a) Mit welcher Geschwindigkeit bewegt sich welche Größe der Welle $\psi_1(x,t)$?

b) In welche Richtung propagiert die Welle $\psi_2(x,t)$?

Berechnen Sie $|\,\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)\,|^2$ und beschreiben Sie die Eingeschaften des Resultats für die folgenden Fälle:

a) $k_2 = -k_1$ und $\omega_2 = \omega_1$,

b) $k_2 = k_1$ und $\omega_2 = 3\omega_1$,

c) $k_2 = k_1$ und $\omega_2 = \omega_1$.

Fertigen Sie eine Skizze der Funktion $|\,\psi_1(x,t) + \psi_2(x,t)\,|^2$ für alle drei Fälle an.

Aufgabe 2: Normierung (7 Punkte)

Der reelle Normierungsfaktor $\mathcal{N}$ einer eindimensionalen Einteilchenwellenfunktion ψ ist über die Gleichung

$$1 \;=\; \mathcal{N}^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \;|\,\psi(x)\,|^2 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{N} \;=\; \left[\,\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x \;|\,\psi(x)\,|^2\right]^{-1/2}$$

definiert, so dass die auf die Teilchenzahl (hier $N = 1$) normierte Wellenfunktion $\phi(x) = \mathcal{N}\,\psi(x)$ erhalten wird.

a) Berechnen Sie die Normierungsfaktoren $\mathcal{N}_1$ für $\psi_1(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$ und $\mathcal{N}_2$ für $\psi_2(x) = \mathrm{e}^{-\frac{(x-a)^2}{4\sigma^2}}$.

b) Berechnen Sie den Normierungsfakor $\mathcal{N}_3$ für die Wellenfunktion $\psi_3(x) = \mathcal{N}_1\,\psi_1(x) + \mathcal{N}_2\,\psi_2(x)$. Welche Beziehung besteht zwischen $\mathcal{N}_1$, $\mathcal{N}_2$ und $\mathcal{N}_3$?

c) Betrachten Sie jetzt die Wellenfunktion $\tilde{\psi}_2(x) = (x^2 - 1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4\sigma^2}}$ und berechnen Sie $\tilde{\mathcal{N}}_2$. Wenn $\tilde{\mathcal{N}}_3$ der Normierungsfaktor für $\tilde{\psi}_3(x) = \mathcal{N}_1\,\psi_1(x) + \tilde{\mathcal{N}}_2\,\tilde{\psi}_2(x)$ ist, welche Beziehung besteht dann zwischen $\mathcal{N}_1$, $\tilde{\mathcal{N}}_2$ und $\tilde{\mathcal{N}}_3$?

Aufgabe 3: Homogene Differentialgleichungen (6 Punkte)

Jede lineare Differentialgleichung der Ordnung n lässt sich in eine vektorielle Differentialgleichung erster Ordnung umwandeln. Ein Beispiel ist

$$y''(x) \,+\, \gamma\, y'(x) \,+\, \omega_0^2\, y(x) \,=\, 0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y}'(x) \,=\, -\mathbf{H}\,\mathbf{y}(x), \tag{1}$$

mit den Definitionen

$$\mathbf{y}(x) \,:=\, \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathbf{H} \,:=\, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \omega_0^2 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Lösen Sie die vektorielle Differentialgleichung in Gl. (1) für die Randbedingungen

$$\mathbf{y}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$