Übung 05

Nichtlineare Modellierung natürlicher Systeme

28. Mai 2015

Bei Fragen und Anregungen:
jan.kraemer@physik.hu-berlin.de

1 Erweiterungen von AR-Prozessen

Die allgemeine nichtlineare Erweiterung linearer autoregressiver Prozesse ist

$$X_t = f(X_{t-1}, ..., X_{t-p}, \epsilon_t, ..., \epsilon_{t-q}). \quad (1)$$

Mit steigender Ordnung sinkt rasch die Interpretierbarkeit der zu schätzenden multidimensionalen Funktion f. Zusatzlich erhoht sich die notwendige Datenmenge fur eine reliable Schätzung. Ein Ausweg besteht darin, das recht allgemeine Modell einzuschränken. Beispiele dafür sind z.B.:

- Bilineare Prozesse, welche bei Reihen mit wechselnden Perioden starker und schwächerer Aktivitat (z.B. seismischen Daten oder bei EEG Studien) Anwendung finnden.
- Nichtlineare additive autoregressive Prozesse.

Erzeugen Sie eine Realisierung der Länge $N = 10000$ des bilinearen Prozesses

$$X_t = 0.8X_{t-1} - 0.4X_{t-2} + 0.6X_{t-1}\epsilon_{t-1} - 0.7X_{t-2}\epsilon_{t-1} + \epsilon_t \quad (2)$$

mit $\epsilon_t = N(0, 1.65)$.
Erzeugen Sie eine Realisierung der Länge $N = 10000$ des Modells

$$X_t = 0.5 - X_{t-1}^2 + \epsilon_t \quad (3)$$

mit $\epsilon_t = N(0, 0.1)$.
Erzeugen Sie eine Realisierung der Länge $N = 10000$ des Modells

$$X_t = 0.5X_{t-1} - 0.2X_{t-2} + \epsilon_t \tag{4}$$

mit $\epsilon_t = N(0, 0.1)$.
Stellen Sie die Realisierungen graphisch dar.

2 Zeitirreversibilität

Die Zeitirreversibilitat ist eine wichtige Signatur von Nichtlinearitat. Ein stationärer Prozess wird zeitreversibel genannt, wenn die Verbundverteilungen invariant sind unter Zeitumkehr. Damit ist, für einen zeitreversiblen Prozess X_t, die Größe $Y_{t,k} = X_t - X_{t-k}$ symmetrisch um Null verteilt. Stellen Sie die geschätzte Verteilung fur $k = 1$ der erzeugten Realisierungen unter Verwendung von `hist` dar.
Ein traditionelles Maß fur die Asymmetrie einer Verteilung ist das dritte Moment $m3$. Schätzen Sie dieses Moment aus jeder der drei Realisierungen.

3 Surrogate

Ein in der Statistik oft verwendeter Ansatz zur Erzeugung von Surrogat-Daten ist das so genannte Bootstraping. Dabei wird ein Surrogat gebildet indem aus der vorhandenen Stichprobe N-mal gezogen wird, wobei die gezogenen Werte nach jedem Zug zurückgelegt werden. Beim Ziehen hat jeder Wert der Stichprobe die gleiche Wahrscheinlichkeit. Bei der Analyse von Zeitreihen mittels Bootstrap-Surrogaten muß beachtet werden, dass jegliche zeitliche Abhängigkeitsstruktur verloren geht und nur die Amplitudenverteilung erhalten bleibt. Nutzt man die Surrogate für einen statistischen Test, so wird davon ausgegangen, dass die beobachtete Zeitreihe die Realisierung von nicht gaußschem weißen Rauschen und damit zeitreversibel ist (Nullhypothese).
Bestimmen Sie die Verteilung des betrachteten Maßes für Zeitirreversibilität mittels 1000 Bootstrap-Surrogaten für jedes der drei Beispiele. Stellen Sie die Verteilung graphisch dar und markieren Sie den entsprechenden Werte dieses Maßes für die ursprüngliche Stichprobe.

Bestimmen Sie die annähernd standard-normalverteilte ($N(0, 1)$) Größe

$$Z = \frac{|m3 - \mu_{m3surro}|}{\sigma_{m3surro}} \tag{5}$$

und entscheiden Sie ob die betrachteten Beispiel-Prozesse zeitreversibel sind oder nicht (Signifikanzniveau $\alpha = 0.05$).