1. Hausübungen zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

---

Ausgabe: 22.04.09 Abgabe: 29.04.09 in der Vorlesung Besprechung: 06./07.05.09

H1 - Beispiel einer 1d Wellenfunktion

Gegeben sei die eindimensionale zeitunabhängige Wellenfunktion

$$\psi(x) = \frac{N}{x^2 + a} \qquad (a \text{ reell})$$

a) Bestimmen Sie N durch Normierung von $\psi(x)$.
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen im Intervall $[-a, a]$ zu finden?
c) Berechnen Sie $\langle x^n \rangle$ für die $n = 1,2,3,\ldots$ die konvergente Integrale liefern.
d) Berechnen Sie $\langle p^2 \rangle$ (p: Impuls in x-Richtung).

H2 - Baker-Campbell-Haussdorff

a) Beweisen Sie die Baker-Campbell-Haussdorff Relation

$$e^A\, B\, e^{-A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\, [A, B]_{(n)}\,.$$

wobei der verschachtelte Kommutator durch

$$[A,B]_{(0)} = B \qquad [A,B]_{(1)} = [A,B]\,, \qquad [A,B]_{(2)} = [A,[A,B]]$$

und allgemein rekursiv durch $[A,B]_{(n)} = [A,[A,B]]_{(n-1)}$ definiert ist.

Tip: Betrachten Sie die Taylor-Reihe der Funktion $f(\lambda) = e^{\lambda A} B e^{-\lambda A}$.

b) Beweisen Sie weiterhin die in der Vorlesung zitierten Beziehungen

$$e^A\, e^B = e^B\, e^A\, e^{[A,B]} \qquad e^{A+B} = e^A\, e^B\, e^{-[A,B]/2}\,,$$

falls $[A,[A,B]] = [B,[A,B]] = 0$. Hierbei mag es nützlich sein (1) für den Spezialfall $[B,[A,B]] = 0$ zu verwenden.

H3 - Wiensches Verschiebungsgesetz

Die spektralen Strahlungsdichten sind definiert als

$$\begin{aligned} S^*_\nu(\lambda)\mathrm{d}\nu &= S^*|_{\text{in }[\nu,\nu+\mathrm{d}\nu]} \\ S^*_\lambda(\lambda)\mathrm{d}\lambda &= S^*|_{\text{in }[\lambda,\lambda+\mathrm{d}\lambda]} \qquad \text{mit } \lambda = \frac{c}{\nu} \end{aligned}$$

a) Leiten Sie die spektralen Strahlungsdichten der Schwarzkörperstrahlung aus der Planckschen Strahlungsformel

$$w_\nu = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

ab!
b) Sei λ_m die Wellenlänge, bei der $S^*_\nu(\lambda)$ bzw. $S^*_\lambda(\lambda)$ maximal werden. Beweisen Sie für beide Fälle

$$\lambda_m \cdot T = \text{ const.} \qquad \text{(Wiensches Verschiebungsgesetz)}$$

und bestimmen Sie numerisch die Konstante.

H4 - Plancksches Strahlungsgesetz

Die natürliche Evolution passt die Sinnesorgane der Lebewesen optimal an die Umweltbedingungen auf der Erde an.
a) Schätzen Sie aus den Fähigkeiten des menschlichen Auges die Oberflächentemperatur der Sonne ab (wahrer Wert etwa 5800 K)! Nehmen Sie dazu an, dass es sich für die Natur nur lohnt, Sinnesorgane bis zu einer bestimmten Minimalstrahlungsdichte $S^*_\lambda(\lambda)$ vorzusehen!
b) Welcher Anteil der Strahlungsleistung entfällt auf den sichtbaren Bereich (400–700 nm), den Infrarot- bzw. den Ultraviolettbereich (numerische oder grafische Lösung)?
c) Berechnen Sie die gesamte, auf die Erde eingestrahlte Leistung (Erdradius $r_E = 6{,}4 \cdot 10^6$ m, Sonnenradius $r_S = 7{,}0 \cdot 10^8$ m, Abstand zwischen Erde und Sonne $R = 1{,}5 \cdot 10^{11}$ m)! Wie groß ist die eingestrahlte Leistung auf eine Fläche von 1 m^2 senkrecht zur Verbindungslinie Erde—Sonne gerade oberhalb der Erdatmosphäre (die sogenannte Solarkonstante)?