

4. Hausübungen zur Quantenphysik SS 09

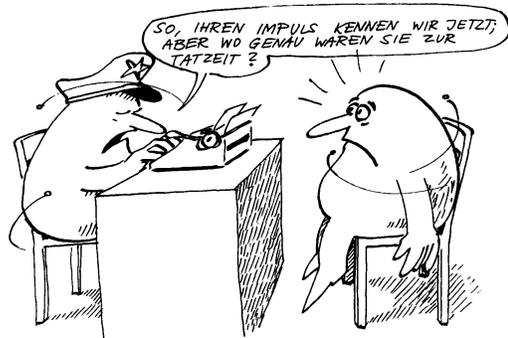
Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

Ausgabe: 13.05.09 Abgabe: 22.05.09 in der Vorlesung Besprechung: 27./28.05.09

H1 - Schrödingergleichung in der Impulsdarstellung

a) Wie lautet der Operator \hat{x} in der Impulsdarstellung? Gehen Sie hierfür von der Gleichung $\langle x \rangle = \int dx x |\psi(x)|^2$ aus und überführen Sie diese in die Impulsdarstellung $\langle x \rangle = \int dp \hat{O}(p) |\varphi(p)|^2$ mit geeignetem Operator \hat{O} und den Impulswellenfunktionen $\varphi(p)$.

b) Wie lautet die Schrödingergleichung für ein eindimensionales Teilchen im Potenzial $V(x) = \frac{m\omega}{2} x^2$ in der Impulsdarstellung? D.h. welcher Differentialgleichung genügt die Impulswellenfunktion $\varphi(p)$? Wie lautet insbesondere dann die zeitunabhängige Schrödingergleichung?



H2 - Vollständigkeit der Eigenfunktionen des Harmonischen Oszillators

Beweisen Sie die Vollständigkeit der Eigenfunktionen

$$\psi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-1/2} \exp[-x^2/2] H_n(x)$$

des harmonischen Oszillators mit $x_0 = 1$ (vergleiche P2 in 3. Präsenzübung):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n(x') = \delta(x - x'),$$

wobei $H_n(x)$ die Hermite-Polynome bezeichnet. Benutzen Sie dazu die in der Vorlesung zu diskutierende Darstellung

$$H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$$

und stellen Sie die Gaußschen Funktionen durch ihre Fourier-Transformierte dar.

H3 - Strukturanalyse

a) Auf einen einfach kubischen Kristall fällt ein Röntgenstrahl (Cu – K_α – Linie, $\lambda = 1,542 \text{ \AA}$) parallel zur $\langle 111 \rangle$ -Richtung. Wie groß muss die Gitterkonstante a sein, um (den hellsten) $\langle 01\bar{2} \rangle$ -Reflex zu erhalten? Ab welcher Wellenlänge λ_c wird die Kristallstruktur unauflösbar (d. h. wird der Kristall optisch homogen)?

b) Berechnen Sie die kinetische Energie (in eV) und Temperatur von Neutronen, für die man die Bragg-Reflexion aus a) reproduzieren kann.

c) Elektronen werden auf ruhende Protonen (Durchmesser $d \approx 1,7 \text{ fm}$) geschossen. Schätzen Sie die relativistische Energie der Elektronen ab, die man mindestens benötigt, um die innere Struktur („Quarks“) der Protonen aufzulösen. Verwenden Sie hier und im Folgenden als Anhaltspunkt und zum Vergleich das gleiche Verhältnis von Wellenlänge und aufzulösender Strukturgröße (bzw. Gitterkonstante) wie in a) und b).

d) Beim HERA-Speicherring werden Elektronen der Energie $E_e = 27,6 \text{ GeV}$ frontal mit Protonen der Energie $E_p = 920 \text{ GeV}$ kollidiert. Welche Strukturgrößen im Proton (z. B. Unterstruktur der Quarks) können in etwa aufgelöst werden?

Zahlenangaben: $\hbar c = 197 \text{ MeVfm}$; $m_n c^2 = 939,6 \text{ MeV}$; $m_p c^2 = 938,2 \text{ MeV}$; $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$.