7. Hausübungen zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn   Dr. O. M. Kind   Prof. Th. Lohse   Prof. J. Plefka   Dr. U. Schwanke

---

Ausgabe: 03.06.09   Abgabe: 12.06.09 in der Vorlesung   Besprechung: 17./18.06.09

H1 - Tunneleffekt

Ein schwerer Atomkern ${}^{A}_{Z}\mathrm{K}$ (Ladung Ze, Anzahl Nukleonen $= A$) zerfalle durch Aussendung von α-Teilchen ${}^{4}_{2}\mathrm{He}$ ($mc^2 = 3{,}73 \cdot 10^3$ MeV) der mittleren kinetischen Energie $E > 0$ mit vernachlässigbar kleiner Unschärfe δE. Stark vereinfachend wird angenommen, dass sich der Kern als Bindungszustand des Rumpfkerns ${}^{A-4}_{Z-2}\tilde{\mathrm{K}}$ und des α-Teilchens ansehen lässt, wobei das Bindungspotential lautet:

$$V(r) \begin{cases} \ll 0 & \text{für } r < R \text{ (starke Kernkraft)} \\ = \frac{e^2 Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon_0 r} & \text{für } r \geq R \text{ (Coulombabstoßung)} \end{cases}$$

Dabei sind $Z_1 = 2$, $Z_2 = Z - 2$ und $R = r_{\tilde{K}} + r_\alpha$, $r_{\tilde{K}} = r_0 (A-4)^{1/3}$, $r_0 = 1{,}25$ fm, $r_\alpha = 1{,}5$ fm.

a) In der Vorlesung wurde begründet, dass man den Transmissionskoeffizienten des eindimensionalen Tunneleffekts näherungsweise für ein entsprechendes Potential $V(q)$ mittels

$$T(E) \simeq \exp\left(-\frac{2}{\hbar}\int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(V(q)-E)}\,dq\right),$$

ausdrücken kann, wobei $q_1 < q_2$ die klassischen Umkehrpunkte bezeichnen.

b) Setzen Sie im weiteren voraus, dass sich für das oben genannte 3-dim. Kernpotential der Transmissionskoeffizient analog wie folgt angeben lässt:

$$T \approx e^{-G} \text{ mit } G = \frac{2\sqrt{2mc^2}}{\hbar c}\int_{r_1}^{r_2} \sqrt{V(r)-E}\,dr,$$

wobei $r_1 < r_2$ wieder die beiden klassischen Umkehrpunkte mit $V(r_i) = E$, $i = 1{,}2$ bezeichnen. Zeigen Sie

$$G = 2 Z_1 Z_2 \alpha \sqrt{\frac{2mc^2}{E}} \cdot f(x), \text{ mit } x = \frac{E}{V(r_2)} = \frac{ER}{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}$$

(α = Feinstrukturkonstante $= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar c}$). Berechnen Sie $f(x)$.

c) Nehmen Sie naiv an, dass die Stoßrate des α-Teilchens gegen die Barriere etwa durch v/R mit $E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(mc^2)(\frac{v}{c})^2$ gegeben ist. Berechnen Sie die mittlere Lebensdauer τ (Vorsicht: Halbwertszeit $T_{\frac{1}{2}} = \tau \ln 2$) des Kerns und testen Sie Ihre Theorie durch Ergänzung der nebenstehenden Tabelle (berechnen Sie auch die Energieunschärfe δE). Für weitere Kerndaten siehe `http://www.nndc.bnl.gov/nndc/nudat/walform.html`. Verwenden Sie zur Rechnung ausschließlich die folgenden Naturkonstanten: $\alpha = \frac{1}{137{,}03}$; $\hbar c = 197{,}33\,\mathrm{MeV}\cdot\mathrm{fm}$; $c = 2{,}998 \cdot 10^{23}\,\mathrm{fm/s}$.

Experiment				Theorie	
${}^A_Z$K	τ	E/MeV	δE/MeV	G	τ
${}^{244}_{96}$Cm	21.8y	5.81			
${}^{240}_{96}$Cm	33.9d	6.30			
${}^{242}_{94}$Pu	$5.38 \cdot 10^5$y	4.98			
${}^{236}_{94}$Pu	4.13y	5.87			
${}^{238}_{92}$U	$6.45 \cdot 10^9$y	4.27			
${}^{236}_{92}$U	$3.38 \cdot 10^7$y	4.57			
${}^{228}_{92}$U	13.1min	6.80			
${}^{218}_{84}$Po	4.47min	6.12			
${}^{212}_{84}$Po	$4.3 \cdot 10^{-7}$s	8.95			

H2 - Zweidimensionaler harmonischer Oszillator

Bestimmen Sie durch einen Produktansatz die Energieeigenwerte und Energieeigenfunktionen des zweidimensionalen isotropen harmonischen Oszillators

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{\mathbf{p}}^2 + \frac{\omega^2 m}{2}\hat{\mathbf{r}}^2 \quad .$$

Diskutieren Sie die Entartung der Energie und geben Sie die Vielfachheit der vier niedrigsten Zustände an.

H3 - Messungen an einem 1d-Harmonischen Oszillator mit linearem Term

Ein Teilchen der Masse m und der Ladung q befindet sich in dem Potential $V_0(x) = \frac{m}{2}\omega^2 x^2$ (eindimensionales Problem). Eine Energiemessung ergibt den Wert $\frac{3}{2}\hbar\omega$. Unmittelbar danach wird ein homogenes elektrisches Feld E in $x-$ Richtung eingeschaltet (vergleiche Aufgabe H2 der 5. Hausübung.)
a) Bestimmen Sie die möglichen Meßwerte der Energie ϵ_n nach Einschalten des elektrischen Feldes.
b) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten w_n für das Eintreten der Meßwerte ϵ_n ?
c) Diese Energiemessung im Feld liefert den tiefsten zulässigen Wert. Danach wird das Feld abgeschaltet. Wie groß ist für eine dritte Energiemessung (ohne Feld) die Wahrscheinlichkeit $\tilde{w}_1$ für das erneute Eintreten des Wertes $\frac{3}{2}\hbar\omega$?
d) Diskutieren Sie den Fall $E \to 0$.
Hinweis: Die Zustandsfunktionen verändere sich durch das schnelle Ein- und Ausschalten des Feldes nicht.