9. Hausübungen zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

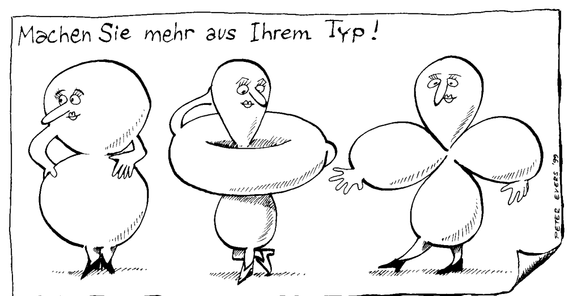
Ausgabe: 17.06.09 Abgabe: 26.06.09 in der Vorlesung Besprechung: 1./2.07.09

H1 - Kugelflächenfunktionen

a) Berechnen Sie die Operatoren $\hat{L}_+$ und $\hat{L}_-$ in Polarkoordinaten.
b) Konstruieren Sie die Drehimpulseigenfunktionen $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ für die Fälle $l = 0$ und $l = 1$ (und für alle dazugehörigen Werte von m).
Hinweis: Die Eigenfunktionen $Y_{ll}(\theta, \varphi)$ sind Lösungen der Differentialgleichungen

$$\hat{L}_z\, Y_{ll}(\theta, \phi) = \hbar\, l\, Y_{ll}(\theta, \varphi) \qquad \hat{L}_+\, Y_{ll}(\theta, \varphi) = 0$$

und die übrigen Y_{lm} (mit $m < l$) folgen dann durch wiederholte Anwendung des Operators $\hat{L}_-$.
c) Bestimmen Sie die Erwartungswerte $\langle \hat{L}_i \rangle$ und die mittleren Schwankungsquadrate $(\Delta\hat{L}_i)^2$ für die Komponenten des Drehimpulsoperators in den Zuständen Y_{ll} und überprüfen Sie die Unschärferelationen.



H2 - Drehimpulse, Eigenzustände und Messungen

a) Es seien Y_{lm} der gemeinsame Satz von Eigenfunktionen zu $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_z$ mit

$$\hat{\vec{L}}^2 Y_{lm} = \hbar^2 l(l+1) Y_{lm} \quad , \quad \hat{L}_z Y_{lm} = \hbar m Y_{lm}\,.$$

Nun gilt aber auch $[\hat{\vec{L}}^2, \hat{L}_x] = 0$. Entwickeln Sie für den Fall $l = 1$ die gemeinsamen Eigenfunktionen von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_x$ nach den $Y_{l=1,m}$.
b) Ein quantenmechanisches System befinde sich in dem Zustand

$$\Psi = \alpha Y_{11} + \beta Y_{10} + \gamma Y_{1-1}$$

Geben Sie für die Operatoren $\hat{L}_z$, $\hat{L}_z^2$,$\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_x$ die möglichen Meßwerte und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten an, berechnen Sie daraus die Erwartungswerte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, bei gleichzeitiger Messung von $\hat{\vec{L}}^2$ und $\hat{L}_x$ das Ergebnis $l = 1$, $m_x = 1$ zu erhalten?

H3 - Rotation-Eigenzustände des NH_3-Moleküls

Ein NH_3–Molekül werde als starrer Körper beschrieben, der genähert rotationssymmetrisch um eine Achse (z–Achse) sei. Die Hauptträgheitsmomente bzgl. der drei Achsen seien entsprechend $\Theta_x = \Theta_y = \Theta$ und Θ_z. Unter Vernachlässigung der Translationsfreiheitsgrade seien allein Rotationsfreiheitsgrade des Moleküls angeregt. Der Hamilton–Operator lautet dann

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2\Theta} + \frac{\hat{L}_z^2}{2\Theta_z},$$

wobei $\hat{L}_x$, $\hat{L}_y$, $\hat{L}_z$ die Operatoren der Drehimpuls-Komponenten in der Ortsdarstellung bezeichnen mögen.
Bestimmen Sie die Energieeigenwerte und die zugehörigen Eigenfunktionen. Sind die Energieniveaus entartet? Wenn ja, wie groß ist der jeweilige Entartungsgrad?