1. Präsenzübungsblatt zur Quantenphysik SS 09

Besprechung in den Übungen am 22/23.04.09.

Dr. J. Henn, Dr. O. Kind, Prof. T. Lohse, Prof. J. Plefka, Dr. U. Schwanke

---

P1 - Fourier-Transformation

Sei $f(t)$ stetig mit höchstens endlich vielen Unstetigkeiten 1. Art. (="Sprünge", d.h. $f(t+0)$ und $f(t-0)$ existieren) und $\int_{-\infty}^{\infty} dx\,|f(x)| < \infty$ endlich. Dann existiert die Fouriertransformierte $\tilde{f}(p)$

$$\tilde{f}(p) := \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)\, e^{i\,p\,x}\,,$$

und deren Umkehrung ergibt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi}\,\tilde{f}(p)\,e^{-i\,p\,x} = \begin{cases} f(x) & \text{an Stetigkeitsstellen} \\ \frac{1}{2}(f(t+0)+f(t-0)) & \text{an isolierten Unstetigkeitsstellen} \end{cases}$$

a) Ausgehend von dem Gaußschen Integral $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\alpha\, x^2} = \sqrt{\pi/\alpha}$ berechne man die 3d Fouriertransformierte

$$f(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^3k\, e^{i\,\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}\, e^{-k^2\,\alpha}$$

b) Wir wollen nun das Zerfliessen eines 1d Gaußschen Wellenpaketes untersuchen. Hierzu sei die Welllenfunktion

$$\psi(x,t) = \int \frac{dp}{2\pi\hbar}\,\phi(p)\,\exp[\frac{i}{\hbar}\,(px - \frac{p^2}{2m}\,t)\,]$$

mit dem Profil $\phi(p) = A\,\exp[-(p-p_0)^2\,d^2/\hbar^2]$ gegeben. Bestimmen Sie $A \in \mathbb{R}$ und $\psi(x,t)$. Zeigen Sie ferner, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\psi(x,t)|^2$ die Form

$$|\psi(x,t)|^2 = \frac{1}{d\,\sqrt{2\pi(1+\Delta(t)^2)}}\,\exp\left[-\frac{(x-vt)^2}{2d^2(1+\Delta(t)^2)}\right] \qquad v := \frac{p_0}{m}\,, \quad \Delta(t) := t\,\frac{\hbar}{2md^2}\,,$$

annimmt. Diskutieren Sie das Zerfliessen des Wellenpakets!

P2 - Diracsche δ-Funktion

Die δ-Funktion

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{für x=0} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

ist eine Distribution, die über ihr Produkt mit 'Testfunktionen' $F(x), G(x), \ldots$ aus C_∞ mit genügend schnellem Abfall für $|x| \to \infty$ mittels der Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\, F(x)\, \delta(x - x_0) = F(x_0)$$

definiert ist. Eine Integraldarstellung erhält man (formal) aus der doppelten Fourierfransformation von $F(x)$ durch Vertauschen der Integrationen

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{-i\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, e^{i\omega x'}\, F(x') = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, F(x')\, \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi}\, e^{i\omega(x'-x)}}_{=\delta(x'-x)} = \int_{-\infty}^{\infty} dx'\, F(x')\, \delta(x'-x)$$

Die Deltafunktion $\delta(x)$ läßt sich auch sauber über eine Funktionenfolge

$$\delta_n(x) = \frac{1}{\pi}\, \frac{1/n}{x^2 + (1/n)^2}\,, \qquad \delta(x) := \lim_{n\to\infty} \delta_n(x)$$

definieren.

a) Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{b} \delta_n(x)\, G(x) = G(0)\,.$$

b) Überzeugen Sie sich von der Gültigkeit bzw. zeigen Sie die Relationen

- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \delta'(x)\, F(x) = -F'(0)$
- $\delta(x)\, F(x) = \delta(x)\, F(0)$
- $x\, \delta(x) = x^2\, \delta(x) = x^3\, \delta(x) = \ldots = 0$
- $\delta(-x) = \delta(x)$

- $\delta(a\,x) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$

c) Die Sprungfunktion $\theta(x)$ ist durch

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $\theta'(x) = \delta(x)$ gilt.

d) Zeigen Sie, dass für $g(x)$ stetig mit lediglich einfachen Nullstellen die Beziehung

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}\,\delta(x - x_i)$$

gilt, wobei x_i die einfachen Nullstellen von g bezeichne.

e) Wie lautet die Fouriertransformierte der δ-Funktion?