10. Präsenzübungsblatt zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

Besprechung in den Übungen am 24./25.06.09

P1 - Darstellung des Drehimpulsoperators

In der Vorlesung haben Sie gelernt, dass für den Drehimpuls folgende Eigenwertgleichungen gelten:

$$\begin{aligned} \vec{J}^2 \psi_{jm} &= \hbar^2 j(j+1)\,\psi_{jm}\,, \\ J_3\,\psi_{jm} &= \hbar\, m\, \psi_{jm}\,, \\ J_\pm\,\psi_{jm} &= \hbar\sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,\psi_{jm\pm1}\,, \end{aligned}$$

wobei die Auf- und Absteigeoperatoren definiert sind durch $J_+ = J_1 + iJ_2$ bzw. $J_- = J_1 - iJ_2$.
a) Geben Sie für $j=1$ die Matrixdarstellungen der Drehimpulsoperatoren $\vec{J}^2$, $J_\pm$ sowie J_1, J_2, J_3 für den vollständigen Satz der Eigenfunktionen ψ_{jm} explizit an.
Hinweis: Berechnen Sie hierfür die Matrixelemente

$$(J_3)_{mm'} := (\psi_{j=1,m}, \hat{J}_3\,\psi_{j=1,m'})\,, \qquad m,m' = \{1,0,-1\}$$

der 3×3 Matrix $(J_3)_{mm'}$ und verfahren Sie ebenso für $(J_\pm)_{mm'}$. Bestimmen Sie daraus die Matrixdarstellungen von J_1 und J_2 im Unterraum $j=1$. Analog lässt sich dann auch $(\vec{J}^2)_{mm'}$ konstruieren.
b) Überprüfen Sie die Gültigkeit der Drehimpulsalgebra $[J_k, J_l] = i\hbar\,\epsilon_{klm}\,J_m$ für die unter a) berechneten Matrizen.

P2 - Normaler Zeeman-Effekt

Betrachten Sie den 2p-Zustand eines H-Atoms in einem äußeren Magnetfeld unter Vernachlässigung der Eigendrehimpulse (Spin) der Elektronen.
a) Die Quantisierungsachse des Drehimpulses und das B-Feld zeigen in z-Richtung. Berechnen Sie die Energiekorrekturen für den 2p-Zustand in 1. Ordnung Störungstheorie. Wie sieht das Spektrum im Vergleich zum ungestörten Zustand aus?

b) Das Magnetfeld wird nun gedreht und zeigt längs der x-Achse. Stellen Sie nun die Störmatrix für die Energiekorrekturen der 1. Ordnung in der unter a) benutzten Basis ψ_{nlm} bzgl. der Quantisierungsachse des Drehimopulses in z-Richtung dar, und berechnen Sie die Energiekorrekturen.
Berechnen Sie auch die zugehörigen normierten Eigenvektoren und erstellen Sie daraus die Basiswechselmatrix der Hauptachsentransformation. Vergleichen Sie deren Elemente mit denen der Drehmatrix (*d-Funktionen*)

$$d^l_{m'm}(\theta) = \left(\psi_{lm'}, e^{-i\theta J_y}\psi_{lm}\right) ,$$

welche auf der beigefügten Tabelle zu finden sind. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.