

11. Präsenzübungsblatt zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

Besprechung in den Übungen am 1./2.07.09

P1 - Das Ritzsche Variationsverfahren zur approximativen Bestimmung von Grundzustandsenergien

Sei \hat{H} ein Hamiltonoperator mit unbekanntem diskreten Spektrum E_n , $\psi_n(x)$ seine Energieeigenfunktionen und E_0 die uns unbekannt und gesuchte Grundzustandsenergie. Zeigen Sie, dass dann für einen beliebigen unnormierten Zustand $\psi(x)$ die Ungleichung

$$E_0 \leq \frac{(\psi, \hat{H} \psi)}{(\psi, \psi)}$$

gilt. Hierbei ist es hilfreich die Vollständigkeitsrelation der Energieeigenzustände $\delta(x - y) = \sum_{n=0}^{\infty} \psi_n(x) \psi_n^*(y)$ an geeigneter Stelle einzusetzen.

Die Ritzsche Idee besteht nun darin in obiger Ungleichung eine durch reelles μ parametrisierte Funktionenschar $\psi[\mu](x)$ für $\psi(x)$ zu wählen und die Funktion

$$E(\mu) := \frac{(\psi[\mu], \hat{H} \psi[\mu])}{(\psi[\mu], \psi[\mu])}$$

in μ zu minimieren. Das Minimum von $E(\mu)$ bei $\mu = \mu_0$ ist dann eine obere Grenze für die Grundzustandsenergie und man kann die Näherung $E_0 \sim E(\mu_0)$ angeben.

Führen Sie dieses Verfahren für den 1d harmonischen Oszillator $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} \hat{x}^2$, mit den Testfunktionen $\psi[\mu](x) := \exp[-\mu x^2]$ durch und vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem exakten Ergebnis $E_0 = \frac{1}{2} \hbar \omega$.

P2 - Stern–Gerlach–Experiment

Die Richtung eines Strahls von Silberatomen im Grundzustand ($5^2S_{1/2}$) und diejenige eines starken, inhomogenen Magnetfeldes beim Stern–Gerlach–Versuch sind senkrecht zueinander. Das Feld hat einen Gradienten $\frac{\partial B}{\partial z} = 10^3$ T/m. In Richtung des Atomstrahls hat das Magnetfeld eine Ausdehnung $l_1 = 4$ cm, der Auffangschirm steht im Abstand $l_2 = 10$ cm vom Magneten entfernt. Berechnen Sie die Komponente des magnetischen Momentes in Richtung des Magnetfeldes, wenn die Aufspaltung des Strahls auf dem Schirm zu $d = 2$ mm und die Geschwindigkeit der Atome zu $v = 500$ m/s gemessen wurde! (Die durchschnittliche Masse der Silberatome beträgt $M = 1,79 \cdot 10^{-25}$ kg) Berechnen Sie ferner den Landé–Faktor g_s ! Warum stört der Kernspin das Experiment nicht?