3. Präsenzübungsblatt zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn   Dr. O. M. Kind   Prof. Th. Lohse   Prof. J. Plefka   Dr. U. Schwanke

Besprechung in den Übungen am 6./7.05.09.

P1 - Hermitezität

Die Operatoren $\hat{H}$ und $\hat{K}$ seien hermitesch. Untersuchen Sie ob die Operatoren

$$\hat{H}+\hat{K} \quad , \quad a\hat{H} \quad , \quad \hat{H}\hat{K} \quad , \quad \hat{H}\hat{K}+\hat{K}\hat{H} \quad , \quad \hat{F}(\hat{H}) = \sum_n a_n \hat{H}^n \quad , \quad i[\hat{H},\hat{K}] \quad , \quad \hat{A}\hat{H}\hat{A}^\dagger$$

ebenfalls hermitesch sind.

P2 - Der harmonische Oszillator

Der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators lautet

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}\,\hat{x}^2 \, .$$

Überprüfen Sie, dass dann die assozierte zeitunabhängige Schrödingergleichung

$$\frac{\hbar\,\omega}{2}\left[-x_0^2\,\frac{d^2}{dx^2} + \frac{x^2}{x_0^2}\right]\psi(x) = E\,\psi(x)$$

lautet, mit der charakteristischen Länge $x_0 = \sqrt{\hbar/(\omega\, m)}$. Wir führen nun die Operatoren $\hat{a}$ und $\hat{a}^\dagger$ mittels

$$x = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\,(\hat{a}+\hat{a}^\dagger) \quad \text{und} \quad p = -i\hbar\,\frac{1}{\sqrt{2}\,x_0}\,(\hat{a}-\hat{a}^\dagger)$$

ein. Ist $\hat{a}$ ein hermitescher Operator?

a) Bestimmen Sie die Kommutatorrelationen $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]$, $[\hat{a}\hat{a}^\dagger,\hat{a}]$ und $[\hat{a}\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]$.

b) Zeigen Sie, dass sich dann der Hamiltonoperator als $\boxed{\hat{H} = \hbar\omega\,(\hat{a}^\dagger\,\hat{a} + \tfrac{1}{2})}$ schreiben läßt.

c) Zeigen Sie schliesslich, dass für eine gegebene Energieeigenfunktion von ψ_ν zum Eigenwert ν folgt, dass $(\hat{a}^\dagger\,\psi_\nu)$ Eigenfunktion zum Eigenwert $\nu+1$ ist!

P3 - Orts- und Impulsoperatoren

Es sei $\hat{F}(\hat{\mathbf{x}},\hat{\mathbf{p}})$ eine (durch eine Potenzreihe darstellbare) Operator-Funktion der Ortsoperatoren $\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3$ und der Impulsoperatoren $\hat{p}_1,\hat{p}_2,\hat{p}_3$. Zeigen Sie die Gültigkeit von

$$[\hat{F},\hat{x}_k] = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{p}_k} \quad \text{und} \quad [\hat{F},\hat{p}_k] = -\frac{\hbar}{i}\frac{\partial\hat{F}}{\partial\hat{x}_k} \quad , \quad (k=1,2,3) \quad .$$

Behandeln Sie zunächst die speziellen Fälle $\hat{F}_1(\hat{\mathbf{x}})$ und $\hat{F}_2(\hat{\mathbf{p}})$.