9. Präsenzübungsblatt zur Quantenphysik SS 09

Dr. J. Henn Dr. O. M. Kind Prof. Th. Lohse Prof. J. Plefka Dr. U. Schwanke

---

Besprechung in den Übungen am 17./18.06.09

P1 - Zeitunabhängige Störungstheorie für nicht-entartete Zustände

In dieser Übung sollen die Grundlagen der quantenmechanischen Störungstheorie hergeleitet werden. Hierbei soll nur der einfache Fall stationärer und nicht-entarteter Zustände betrachtet werden (die anderen Fälle werden zu einem späteren Zeitpunkt in der Vorlesung behandelt werden).
Die Störungstheorie ist ein weit verbreitetes Näherungsverfahren, bei dem der betrachtete Hamiltonoperator sich aus einem dominanten, diagonalisierten Anteil und einem als klein angenommenen Störterm zusammensetzt.
Ein solches System wird beschrieben durch

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \lambda \hat{H}' , \quad \lambda \in \mathbb{R} ,$$

wobei $\hat{H}_0$ der Hamilton-Operator des ungestörten Systems ist, für welches die Energieeigenwerte und Eigenfunktionen bekannt sind, und $\hat{H}'$ die Störung des Systems beschreibt. Hierbei ist $\lambda \ll 1$ ein Kontrollparameter.
Die Lösung des ungestörten, diskreten Systems sei durch

$$\begin{array}{c} E_1^{(0)}, E_2^{(0)}, E_3^{(0)}, E_4^{(0)}, \ldots \\ \psi_1^{(0)}, \psi_2^{(0)}, \psi_3^{(0)}, \psi_4^{(0)}, \ldots \end{array}$$

gegeben. Für $\lambda \to 0$ muß offensichtlich gelten

$$\begin{array}{rcl} E & \to & E^{(0)} , \\ \psi & \to & \psi^{(0)} . \end{array}$$

Für hinreichend kleine Störungen $\lambda \hat{H}'$ ist dann eine Entwicklung von E und ψ für den Zustand n in Potenzen von λ möglich.

$$\begin{array}{rcl} E_n & = & E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \lambda^3 E_n^{(3)} + \ldots \\ \psi_n & = & \psi_n^{(0)} + \lambda \psi_n^{(1)} + \lambda^2 \psi_n^{(2)} + \lambda^3 \psi_n^{(3)} + \ldots \end{array}$$

Bei Konvergenz der Reihe gilt dann $\hat{H}\psi_n = E_n\psi_n$.
a) Zeigen Sie, dass für die Ordnung k der Entwicklung die folgende Bestimmungsgleichung gilt:

$$\hat{H}_0\psi_n^{(k)} + \hat{H}'\psi_n^{(k-1)} = E_n^{(0)}\psi_n^{(k)} + E_n^{(1)}\psi_n^{(k-1)} + E_n^{(2)}\psi_n^{(k-2)} + E_n^{(3)}\psi_n^{(k-3)} + \ldots + E_n^{(k)}\psi_n^{(0)} .$$

b) Zeigen Sie, dass die gestörten Zustandsvektoren erster Ordnung so gewählt werden können, dass $\left(\psi_n^{(0)}, \psi_n^{(1)}\right) = 0$ gilt.
c) Bestimmen Sie nun die Energiekorrektur $E_n^{(1)}$ zum Energieeigenwert des ungestörten Systems $E_n^{(0)}$ in der 1. Ordnung Störungstheorie.
d) Bestimmen Sie die Zustandskorrektur $\psi_n^{(1)}$ in der 1. Ordnung durch Entwicklung nach den orthogonalen Eigenzuständen des ungestörten Systems $\psi_m^{(0)}$.

P2 - Harmonischer Oszillator mit Störung

Betrachten Sie einen eindimensionalen harmonischen Oszillator, dessen Kopplung durch ein zusätzliches Potential der Form

$$V' = \frac{1}{2}\lambda m\omega^2 x^2 , \quad \lambda \ll 1$$

modifiziert werde.
a) Wie schaut Ihrer Meinung nach die Lösung des Systems aus? b) Berechnen Sie in 1. Ordnung Störungstheorie die Energieeigenwerte und Zustandsfunktionen des Systems.