IV.4 EIGENWERTE VON DREHIMPULSOPERATOREN

Die Eigenwerte des Drehimpulses lassen sich rein aus den algebraischen Relationen

$$\boxed{[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i\hbar\, \varepsilon_{ijk} \hat{L}_k} \qquad i,j,k = x,y,z\,.$$

ableiten. Das Ergebnis ist deshalb für jeden Drehimpuls (Bahndrehimpuls, Spin, Gesamtdrehimpuls) gültig.

Da Komponenten $\hat{L}_x, \hat{L}_y, \hat{L}_z$ nicht miteinander kommutieren existiert kein gemeinsames Basissystem. Es gilt jedoch

$$\boxed{[\vec{L}^2, L_i] = 0} \qquad i = x,y,z \qquad \vec{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$$

$\Rightarrow$ Wir können $\hat{\vec{L}}^2$ und eine Komponente von $\hat{\vec{L}}$ gemeinsam diagonalisieren.

Wahl: $\vec{L}^2$ und L_z. "Quantisierungsachse"

DEF: $$\boxed{L_\pm = L_x \pm i L_y}$$ (IV.7)

Eigenschaften:

- $(L_\pm)^+ = L_\mp$
- $[L_z, L_\pm] = i\hbar L_y \pm \hbar L_x = \pm\hbar L_\pm$
- $[L_+, L_-] = -2i\,[L_x, L_y] = 2\hbar L_z$

- $[\vec{L}^2, L_\pm] = 0$

- $\vec{L}^2 = L_- L_+ + \hbar L_z + L_z^2$

Da $L_- L_+ = (L_x - iL_y)(L_x + iL_y) = L_x^2 + L_y^2 + i[L_x, L_y]$

$$= L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z .$$

$$L_+ L_- = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z$$

<u>Nun zum Eigenwertproblem:</u> ψ_{lm} bezeichne Eigenfunktion zu $\vec{L}^2$ und L_z:

$$\boxed{\begin{aligned} \hat{L}_z \psi_{lm} &= \hbar m \,\psi_{lm} \\ \hat{\vec{L}}^2 \psi_{lm} &= \hbar^2 l(l+1)\, \psi_{lm} \qquad (l \geq 0) \end{aligned}} \qquad (\text{IV}.8)$$

$L_\pm$ sind Leiteroperatoren $\quad L_z L_\pm \psi_{lm}$

$$= (L_\pm L_z \pm \hbar L_\pm)\psi_{lm}$$

$$= \hbar(m+1)\psi_{lm}$$

$\Rightarrow$ $L_\pm$ erhöht (erniedrigt) $\hat{L}_z$-Eigenwert m um 1: $\underline{L_\pm \psi_{lm} \sim}$ [illegible]

Wegen $[L_\pm, \vec{L}^2] = 0$ bleibt $\vec{L}^2$-Eigenwert l jedoch unverändert:

$$\vec{L}^2 (L_\pm \psi_{lm}) = L_\pm \vec{L}^2 \psi_{lm} = \hbar\, l(l+1) (L_\pm \psi_{lm}).$$

Norm von $L_\pm \psi_{lm}$:

$$(\hat{L}_\pm \psi_{lm}, \hat{L}_\pm \psi_{lm}) = (\psi_{lm}, \underbrace{\hat{L}_\mp \hat{L}_\pm}_{\vec{L}^2 - L_z^2 \mp \hbar L_z} \psi_{lm})$$

$$= \hbar^2 \left(l(l+1) - m^2 \mp m \right) \underbrace{(\psi_{lm}, \psi_{lm})}_{=1}$$

$$= \hbar^2 (l(l+1) - m^2 \mp m).$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{L_\pm \psi_{lm} = \hbar^2 \sqrt{l(l+1) - m(m\pm 1)}\; \psi_{l,m+1}} \qquad (\text{IV}.9)$$

Da $\| L_\pm \psi_{lm} \|^2 \geq 0$ gilt:

$$l(l+1) - m(m\pm 1) \geq 0$$

Es folgen die Bedingungen:

$m > 0$: $\quad l(l+1) \geq m(m+1) \quad \Rightarrow \quad l \geq m$

$m < 0$: $\quad l(l+1) \geq -|m|(-|m| \pm 1) = |m|(|m| \mp 1)$

$\Rightarrow$ schärfere Bed.: $l(l+1) \geq |m|(|m|+1)$

Damit:

$$\boxed{|m| \leq l}$$

IV Welche Werte nehmen die l und m an?

Sei M maximales m für gegebenes festes l.

Dann muß $L_+ \psi_{lM} = 0$ sein, ansonsten wäre M nicht maximal. Aus Normierungsbed. $\| L_+ \psi_{lm} \|^2 = 0$ folgt dann

$l(l+1) = M(M+1)$ oder $\boxed{M = l}$.

Analoges Argument für minimales μ der m-Eigenwerte.

$\Rightarrow \quad L_- \psi_{l,\mu} = 0 \quad \Rightarrow \quad l(l+1) = |\mu|(|\mu|+1)$

$\Rightarrow \quad \boxed{\mu = -l}$.

Nun kann man durch Absteigeoperator L_- ausgehend von $\psi_{l,l}$ sämtliche Werte von m gewinnen.

$L_+ \psi_{l,l} = 0 \quad ; \quad L_- \psi_{l,l} \sim \psi_{l,l-1}$

$L_- \psi_{l,l-1} = (L_-)^2 \psi_{l,l} \sim \psi_{l,l-2}$

$(L_-)^3 \psi_{l,l} \sim \psi_{l,l-3}$

$\vdots$

Diese Reihe muß bei $m = -l$ abbrechen:

$(L_-)^k \psi_{l,l} \sim \psi_{l,-l} \quad \Rightarrow \quad k = 2l$

D.h. $\boxed{l = \frac{k}{2}}$ mit $k \in \mathbb{N}$.

<u>Drehimpulsspektrum:</u> $\vec{L}^2\, \psi_{lm} = \hbar\, l(l+1)\, \psi_{lm}$

$L_z\, \psi_{lm} = \hbar m\, \psi_{lm}$ (IV)

mit $l = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$ <u>oder</u> $l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

und $m = -l, -l+1, -l+2, \ldots, l-1, l$

Eigenwerte l & m sind diskret und halbzahlig.

<u>BEMERKUNGEN:</u>

i) Der $\vec{L}^2$-Eigenraum ist $(2l+1)$-fach entartet.

ii) Die Drehimpulsvertauschungsrelation $[L_i, L_j] = \hbar\, \varepsilon_{ijk} L_k$ werden <u>mathematisch</u> als SO(3)-Algebra bezeichnet. Drehgruppe: SO(3)-Gruppe, folgt aus Algebraelement durch Exponation: $D(\varphi) = e^{\frac{i}{\hbar} \vec{\varphi} \cdot \vec{L}}$.

iii) Wir werden sehen, daß der Bahndrehimpuls stets <u>ganzzahlige</u> Werte l einnimmt.

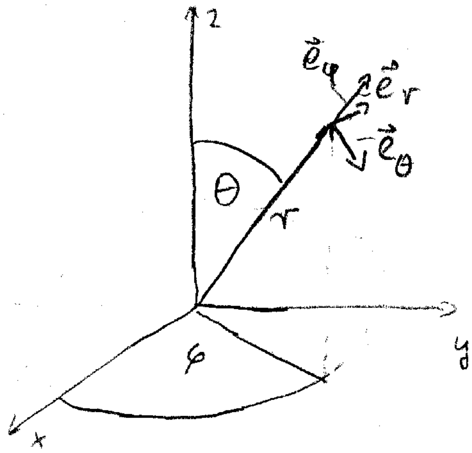
Berühmte Situation $l = 1/2$: <u>Spin 1/2</u> des Elektrons, "Eigendrehimpuls"

iv) Spins der Elementarteilchen → ganzzahlig: "<u>Boson</u>"
→ halbzahlig: "<u>Fermion</u>"

IV.5 BAHNDREHIMPULS IN POLARKOORDINATEN, KUGELFLÄCHENFUNKTIONEN

Wollen nun die expliziten Eigenfunktionen $\psi_{\ell m}(x)$ des Bahndrehimpulses $\vec{L} = \frac{\hbar}{i}\,\vec{x} \times \vec{\nabla}$ bestimmen.

Polarkoordinaten:



$$\vec{x} = r\,\vec{e}_r$$

$$d^3x = \underbrace{r^2 \sin\theta}_{\text{Mass}}\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}$$

Daraus ergibt sich:

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i}\left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \cos\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_y = \frac{\hbar}{i}\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} - \sin\varphi\, \mathrm{ctg}\,\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\hat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi} \qquad \text{(IV.1}$$

$$\hat{L}_\pm = \hbar e^{\pm i\varphi}\left(\pm\frac{\partial}{\partial\theta} + i\,\mathrm{ctg}\,\theta \frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

$$\vec{L}^2 = -\hbar^2\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]$$