Kap. 5 Wechselströme

- 5.1. Generatoren und Motoren
- 5.2. Wechselströme
- 5.3. Wechselstromkreise und Impedanzen
- 5.4. Wechselstromschaltungen, Hoch- und Tiefpassfilter
- 5.5. Transformatoren
- 5.6. Gleichrichter

Quasistationäre Phänomene

Quasistationäre Näherung: $\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \cancel{\frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$

Gesetze der Magneto~~statik~~ gelten unverändert

Interpretation: $c \to \infty$, d.h. in der Zeit, die Licht benötigt, um die Strom- und Ladungskonfiguration ($\to$ den elektrischen Schaltkreis) zu durchqueren, ändern sich Ströme und Ladungsdichten nicht wesentlich.

$\Rightarrow$ Frequenzen nicht zu groß (Kupferleitung: $\omega \ll 10^{19}\,\mathrm{s}^{-1}$)

$\Rightarrow$ Schaltkreiselemente bewegen sich in externen E/B-Feldern nichtrelativistisch, $v \ll c$

Die Gesetze der Statik gelten modifiziert weiter:

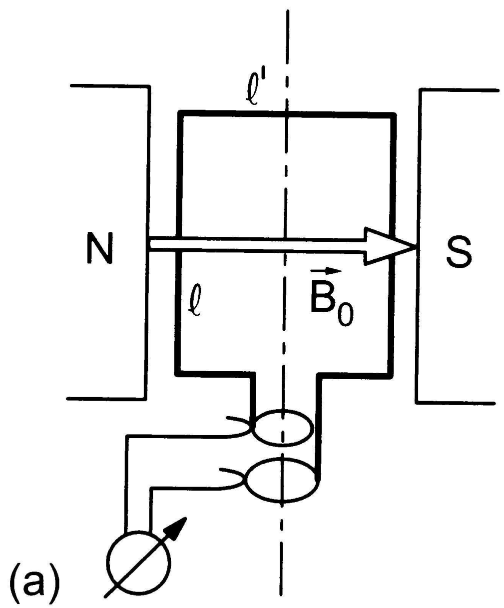
$\mathrm{div}\;\vec{j} = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{div}\;\mathrm{rot}\;\vec{B} = 0 \quad \Rightarrow$ Kirchhoffsche Knotenregel: $\sum_{k \in \mathrm{Knoten}} I_k = 0$

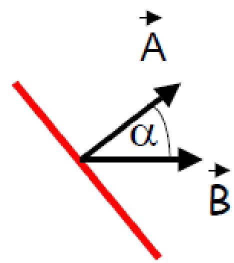
$\mathrm{rot}\;\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \overset{2.2.1.}{\Rightarrow}$ Kirchhoffsche Maschenregel: $\sum_{k \in \mathrm{Masche}} U_k = -\dot{\Phi}_M$

Die Summe der Spannungen in einer Masche verschwindet, falls der magnetische Fluss durch die Masche konstant ist.

5.1. Generatoren

Prinzip: im B-Feld rotierende Leiterschleife





$$\Phi = \vec{B}\cdot\vec{A} = B\cdot A\cdot\cos\alpha$$

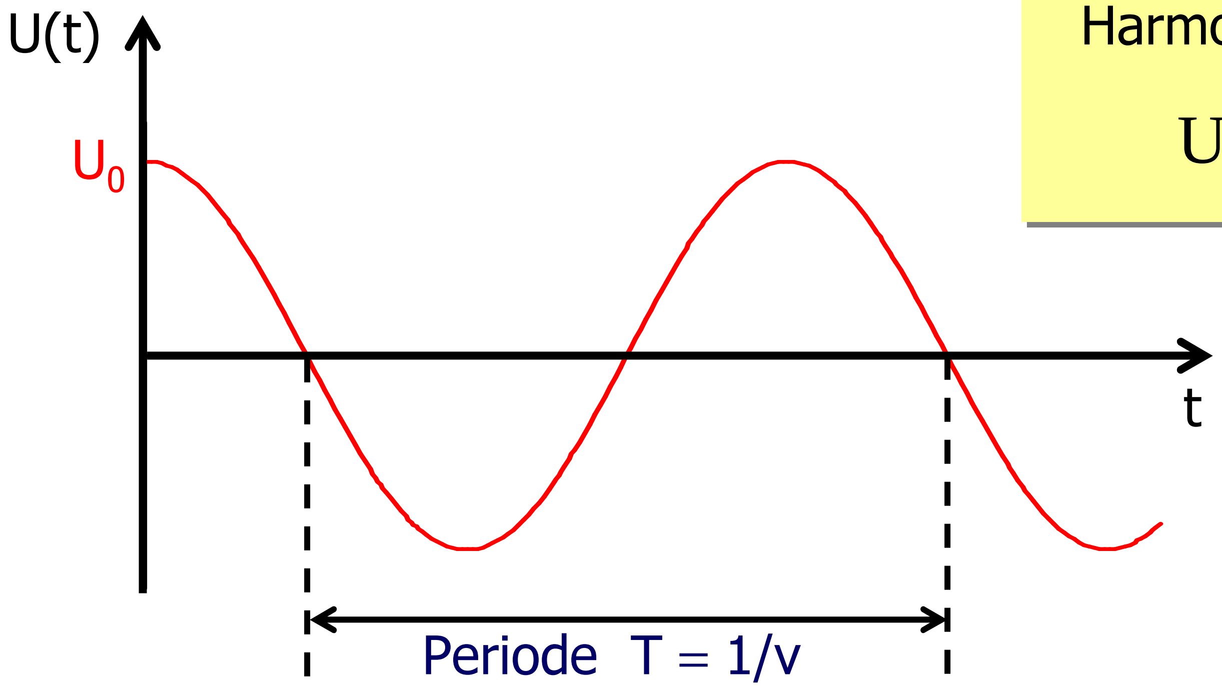
$$\alpha = \omega\cdot t = 2\pi\cdot\frac{t}{T}$$

Φ: magnetischer Fluss
ω: Kreisfrequenz
T: Umlaufperiode

$$U_i = -\dot{\Phi} = B\cdot A\cdot\omega\cdot\sin\omega t$$

$$U_0 = B\cdot A\cdot\omega$$

5.2. Wechselstrom



Harmonische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

Schaltsymbol:

U_0: Scheitelwert	$U(t)$: Momentanwert
T: Periode	$\nu = \frac{1}{T}$: Frequenz
$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz	

Europa

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 230\,\mathrm{V}$$
$$\nu = 50\,\mathrm{Hz}$$

U.S.A.

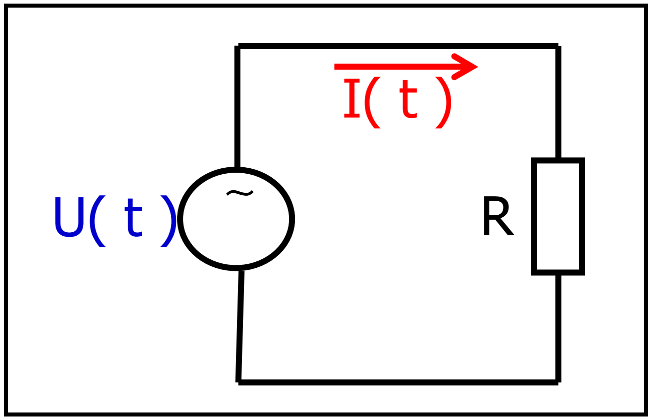
$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 110\,\mathrm{V}$$
$$\nu = 60\,\mathrm{Hz}$$

Leistung im Ohmschen Verbraucher

$$I(t)=\frac{1}{R}U(t)=\frac{U_0}{R}\cos(\omega t)=I_0\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \boxed{U_0=R I_0}$$

$$P(t)=U(t)I(t)=\frac{U_0^2}{R}\cos^2(\omega t)=I_0^2 R\cos^2(\omega t)$$



Mittlere Leistung für beliebige periodische Wechselspannung:

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{U^2(t)}{R}dt=\frac{1}{R}\overline{U^2}\equiv\frac{1}{R}U_{eff}^2$$

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T R I^2(t)\,dt=R\,\overline{I^2}\equiv R I_{eff}^2$$

$$\boxed{\overline{P}=U_{eff}\,I_{eff}}$$

Effektivspannung: $U_{eff}=\sqrt{\overline{U^2}}$

Effektivstrom: $I_{eff}=\sqrt{\overline{I^2}}$

Harmonische Wechselspannung

$$\overline{U^2} = \frac{1}{T}\int_0^T U_0^2 \underbrace{\cos^2(\omega t)}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t))} dt = \frac{U_0^2}{2T}\cdot\left[\underbrace{\int_0^T dt}_{T} + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt}_{0}\right] = \tfrac{1}{2}U_0^2$$

$$\overline{I^2} = \frac{1}{T}\int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t)\,dt = \quad \ldots \qquad \cdots \quad = \tfrac{1}{2}I_0^2$$

$$U_{eff} = \sqrt{\overline{U^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}U_0$$

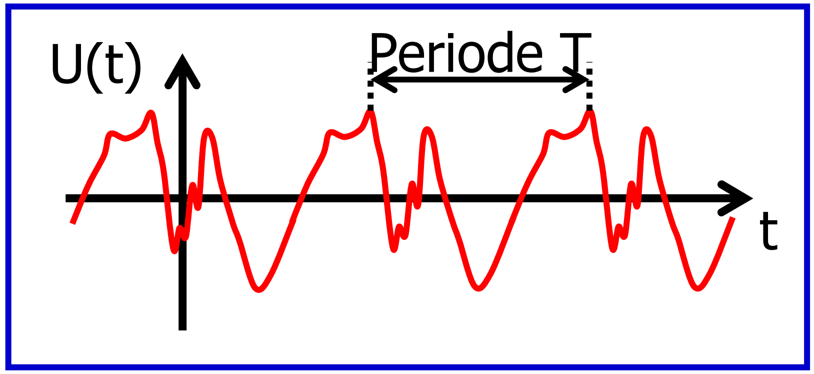
$$I_{eff} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}I_0$$

$$\overline{P} = U_{eff}I_{eff} = \tfrac{1}{2}U_0 I_0$$

Allgemeine Wechselspannung

Periode T: $U(t) = U(t+T)$

Fundamentalkreisfrequenz: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$



Fourierzerlegung:

$$U(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \tfrac{1}{2}a_0 + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - i b_n)e^{in\omega t}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

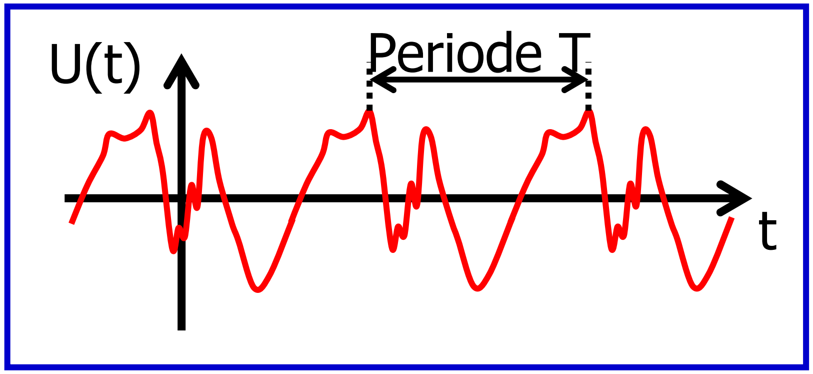
$$U_{eff} = \sqrt{\overline{U^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tfrac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)}$$

U_{eff} ist gleich der quadratischen Summe der Effektivspannungen der Fourierkomponenten

Allgemeine Wechselspannung

Periode T: $U(t) = U(t+T)$

Fundamentalkreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$



Fourierzerlegung:

$$U(t) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) = \tfrac{1}{2}a_0 + \mathrm{Re}\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - ib_n)e^{in\omega t}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\cos(n\omega t)\,dt \qquad b_n = \frac{2}{T}\int_0^T U(t)\sin(n\omega t)\,dt$$

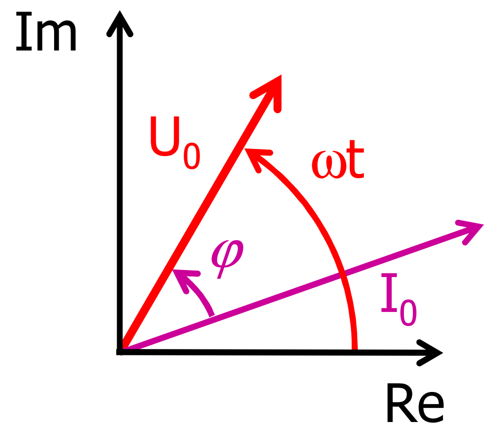
Folgerung: Für lineare Netzwerke (↔ Superpositionsprinzip anwendbar) reicht es aus, das Verhalten für harmonische Wechselströme / Wechselspannungen zu untersuchen.

5.3. Komplexe Widerstände

Neues (eleganteres) Konzept: Komplexe Spannung/Strom

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$



physikalischer Anteil ⇒

$$\mathrm{Re}\ U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$\mathrm{Re}\ I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$

Definition: Komplexer Wechselstromwiderstand

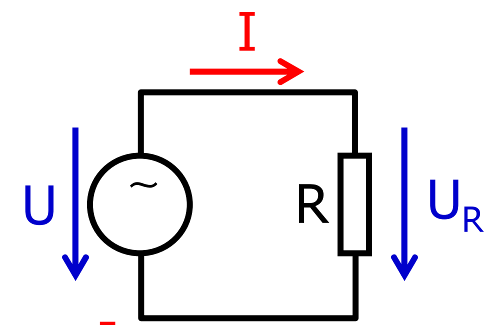
$$\boxed{Z = Z(\omega) = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi}}$$

Nach Konstruktion ⇒ Gesetze der Quasistatik (Kirchhoffsche Regeln, …) gelten weiter

Ohmscher Widerstand / Induktivität

$$U(t) = U_R(t) = R\,I(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{Z = R}$$

Z reell und unabhängig von ω

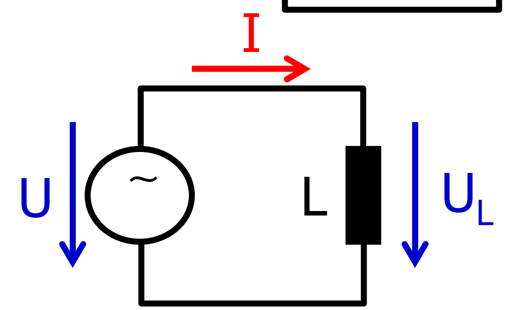


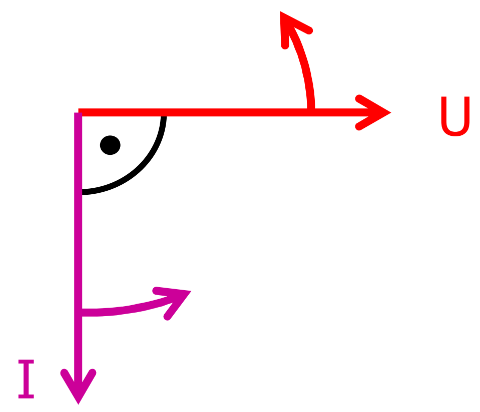
Beispiel: **Induktivität**

$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_L(t) = -U_{ind}(t) = L\,\dot{I}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{L}\int e^{i\omega t}\,dt = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega L} U(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z = i\omega L} = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \to 0\,, & \omega \to 0 \\ \to \infty, & \omega \to \infty \end{cases}$$





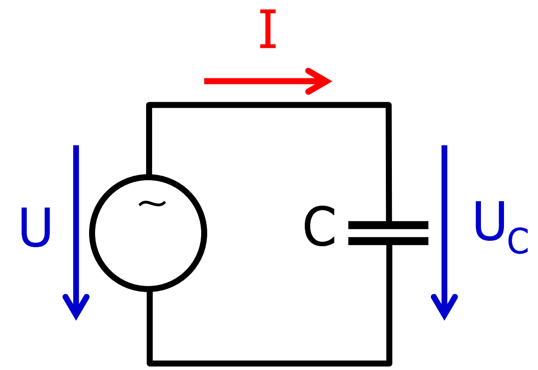
Z imaginär und proportional zu ω

$\varphi = +90^\circ \Rightarrow$ Strom eilt Spannung um 90° nach

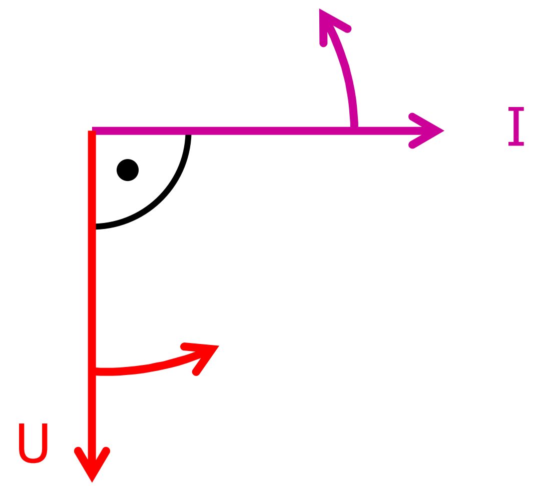
Kapazität

$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C\frac{d}{dt}\left(U_0 e^{i\omega t}\right) = i\omega C U_0 e^{i\omega t} = i\omega C U(t)$$



$$\Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \to 0, & \omega \to \infty \\ \to \infty, & \omega \to 0 \end{cases}$$

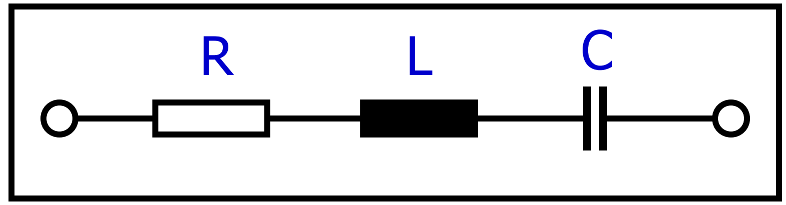


Z imaginär und umgekehrt proportional zu ω

$\varphi = -90° \Rightarrow$ Spannung eilt Strom um 90° nach

RLC-Serien-Schaltung

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

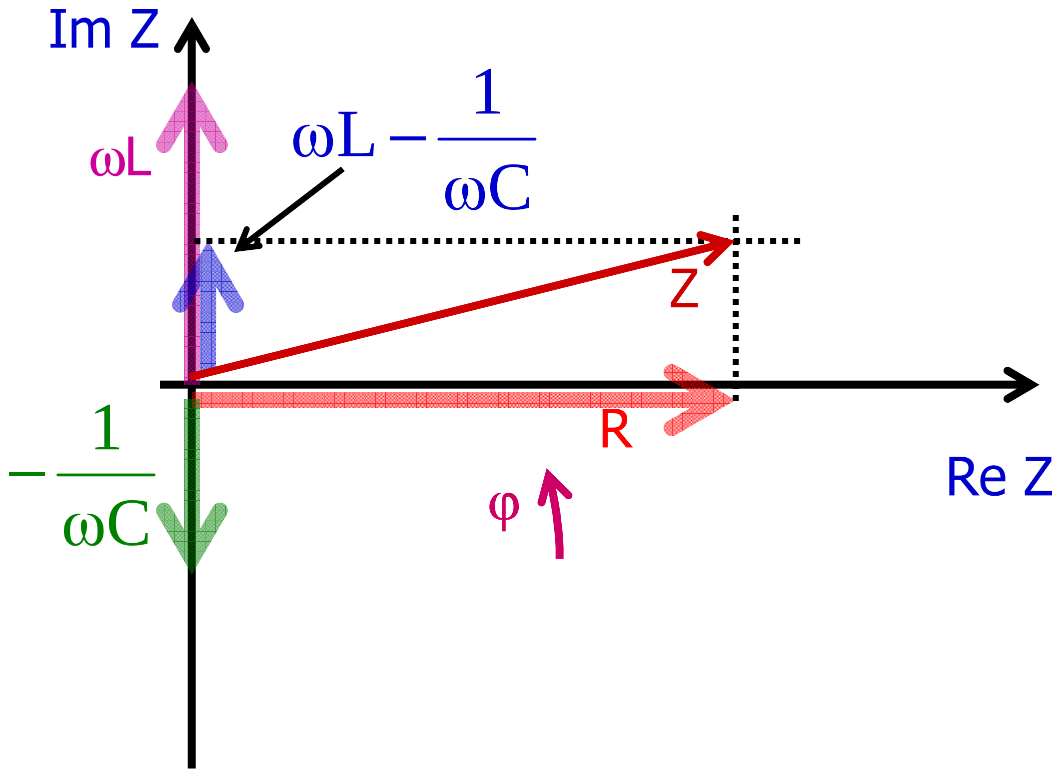


$$\tan\varphi = \frac{\mathrm{Im}\,Z}{\mathrm{Re}\,Z} = \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$

Konstruktion im Zeigerdiagramm:

Dieses Beispiel: $\mathrm{Re}\,Z = R > 0$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]}$$



Wechselstromleistungen

<u>Momentane Wechselstromleistung in Z:</u>

$$Z = \mathrm{Re}\,Z + i\,\mathrm{Im}\,Z = |Z|e^{i\varphi} = \tfrac{U_0}{I_0}e^{i\varphi}$$

$$P(t) = \mathrm{Re}(U)\mathrm{Re}(I) = U_0 I_0 \cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi)$$
$$= U_0 I_0 \cos\varphi \cos^2(\omega t) + U_0 I_0 \sin\varphi \cos(\omega t)\sin(\omega t)$$

<u>Mittlere Wechselstromleistung in Z:</u> Wirkleistung

$$P_W \equiv \overline{P} = \tfrac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \underbrace{U_0 I_0 \cos\varphi}_{\Rightarrow \text{ Wirkleistung}}\underbrace{\overline{\cos^2(\omega t)}}_{1/2} + \underbrace{U_0 I_0 \sin\varphi}_{\Rightarrow \text{ Blindleistung}}\underbrace{\overline{\sin(\omega t)\cos(\omega t)}}_{0}$$

Wirkleistung:

$$P_W = \tfrac{1}{2}U_0 I_0 \cos\varphi = U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \cos\varphi$$

Blindleistung:

$$P_B = \tfrac{1}{2}U_0 I_0 \sin\varphi = U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}} \sin\varphi$$

Scheinleistung:

$$P_S = |P| = U_{\mathrm{eff}} I_{\mathrm{eff}}$$

Komplexe Leistung:

$$P = \tfrac{1}{2}UI^* = \tfrac{1}{2}U_0 e^{i\omega t} I_0 \left(e^{i(\omega t - \varphi)}\right)^* = \tfrac{1}{2}U_0 I_0 e^{i\varphi}$$
$$= P_W + iP_B = \tfrac{1}{2}I_0^2 Z = \tfrac{1}{2}U_0^2 / Z^*$$

$|Z|$ = Scheinwiderstand, Re Z = Wirkwiderstand, Im Z = Blindwiderstand