6. Relativistische Mechanik

- 6.1. Galilei-Transformation und Inertialsysteme
- 6.2. Die Einsteinschen Postulate
- 6.3. Die Lorentztransformation
- 6.4. Raum-Zeit-Diagramme
- 6.5. Impuls und Energie
- 6.6. Beispiele

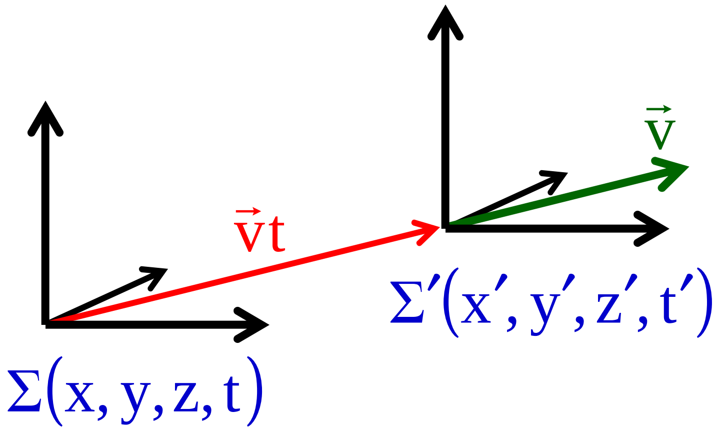
6.1. Galilei-Transformation

Newton:

- Es gibt einen absolut ruhenden Raum $\leftrightarrow$ Weltäther
- Es gibt eine absolute (universelle) Zeit
- Gleichförmig im Weltäther bewegte Systeme $\leftrightarrow$ Inertialsysteme
- Bewegungsgleichung in Inertialsystemen:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Wechsel des Inertialsystems:



Galilei-Transformation

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{v}t$$

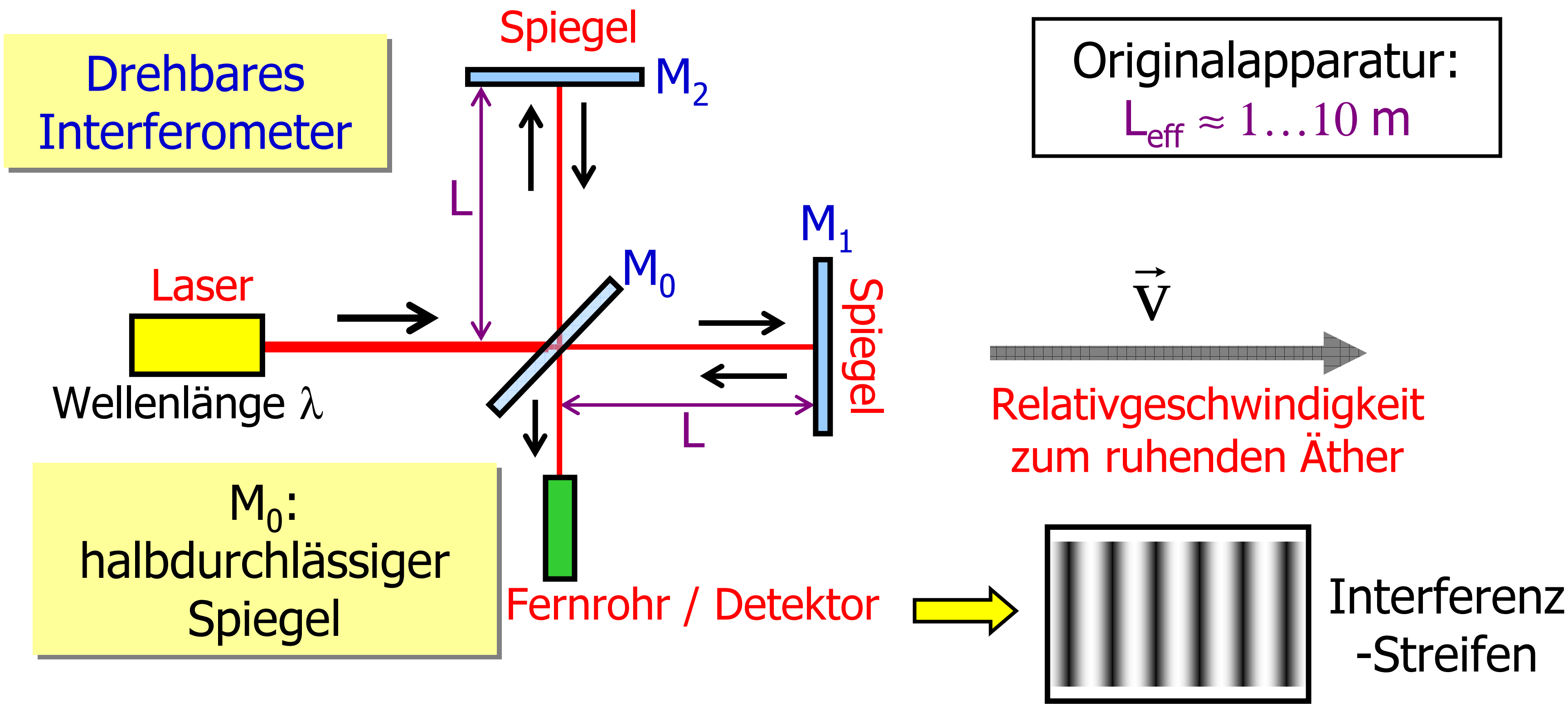
$$t' = t$$

6.2. Einsteinsche Postulate

Einstein:

- Es gibt keinen Weltäther und keine absolute Zeit
- Physikalische Gesetze sind in allen Inertialsystemen identisch (Äquivalenzpostulat)
- Die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c = 2{,}99792 \cdot 10^8$ m s^{-1} ist eine Naturkonstante, unabhängig vom Inertialsystem und unabhängig von der Geschwindigkeit der Lichtquelle

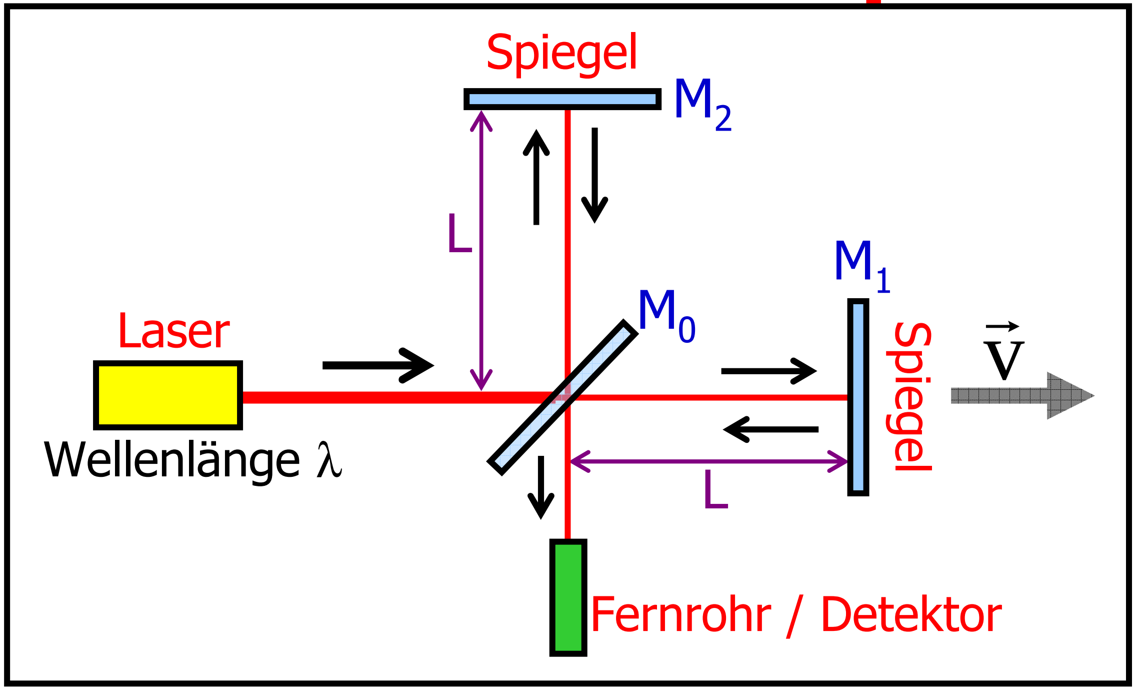
Michelson-Morley Experiment, 1

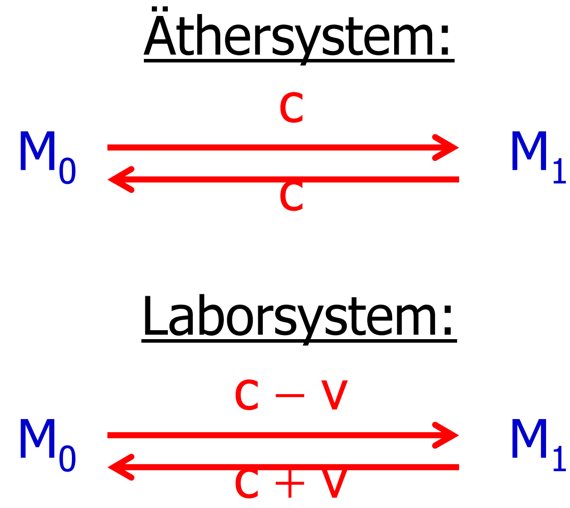


Vorhersage (Newton): Interferenzstreifen verschieben sich bei Drehung

Vorhersage (Einstein): Interferenzstreifen unabhängig von Orientierung

Michelson-Morley Experiment, 2

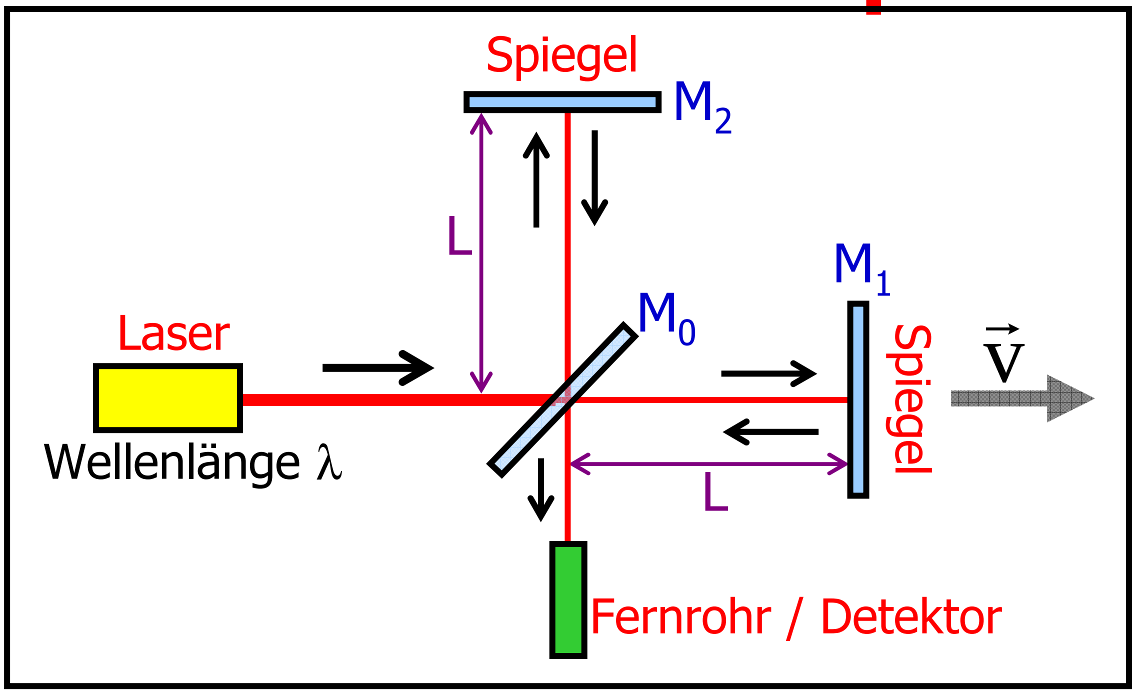




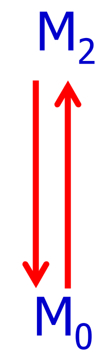
$$\boxed{M_0 - M_1 - M_0 :} \quad \Delta t_1 = \frac{L}{c-v} + \frac{L}{c+v} = \frac{L(c+v+c-v)}{c^2 - v^2} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_1 =} \frac{2\frac{L}{c}}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \boxed{= 2\gamma^2 \frac{L}{c}}$$

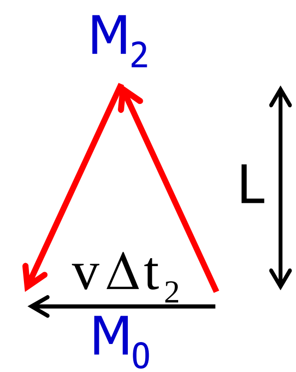
Michelson-Morley Experiment, 3



Laborsystem:



Äthersystem:

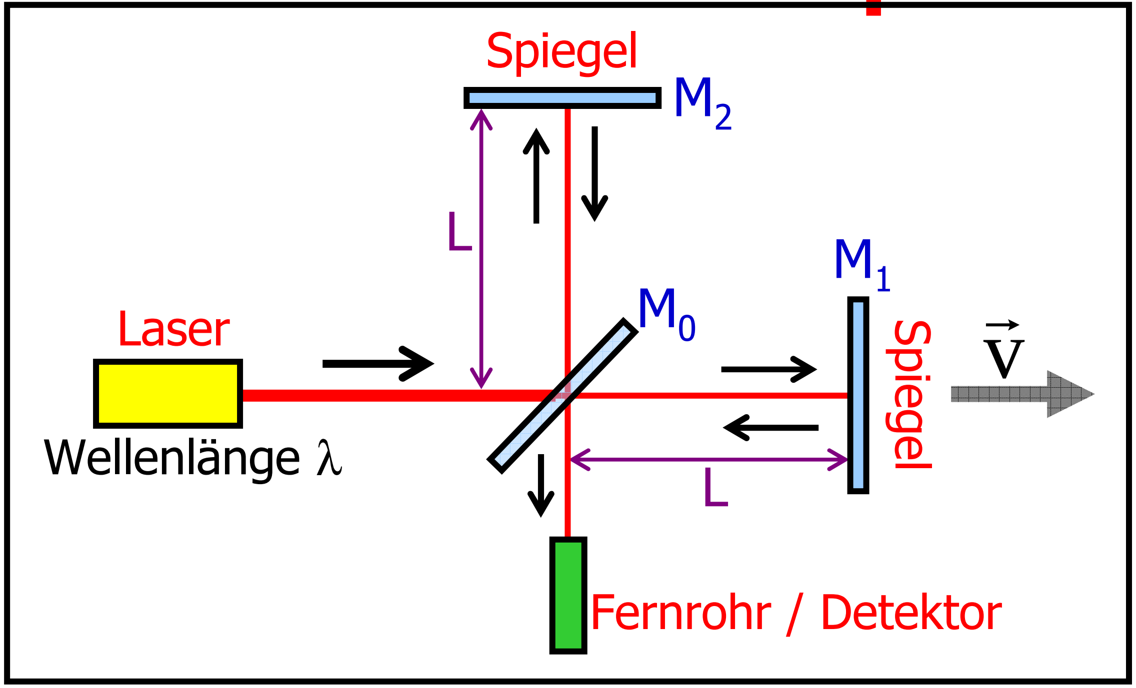


Laufstrecke $M_0 - M_2 - M_0$ im Äthersystem:

$$c\,\Delta t_2 = 2 \cdot \sqrt{L^2 + \left(\tfrac{1}{2} v\,\Delta t_2\right)^2} \quad \Rightarrow \quad (c\,\Delta t_2)^2 = 4L^2 + (v\,\Delta t_2)^2$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Delta t_2 =} \frac{2L}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2\,\frac{L}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \boxed{= 2\gamma \frac{L}{c}}$$

Michelson-Morley Experiment, 4



$M_0 - M_1 - M_0$:

$$\Delta t_1 = 2\gamma^2 \frac{L}{c}$$

$M_0 - M_2 - M_0$:

$$\Delta t_2 = 2\gamma \frac{L}{c}$$

Laufzeitdifferenz der interferierenden Strahlen:

$$\delta t = \Delta t_1 - \Delta t_2 = 2\gamma \frac{L}{c}(\gamma - 1)$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot \frac{L}{c} \cdot \frac{\beta^2}{2} + O\left(\beta^4\right) = \frac{L}{c}\beta^2 + O\left(\beta^4\right)$$

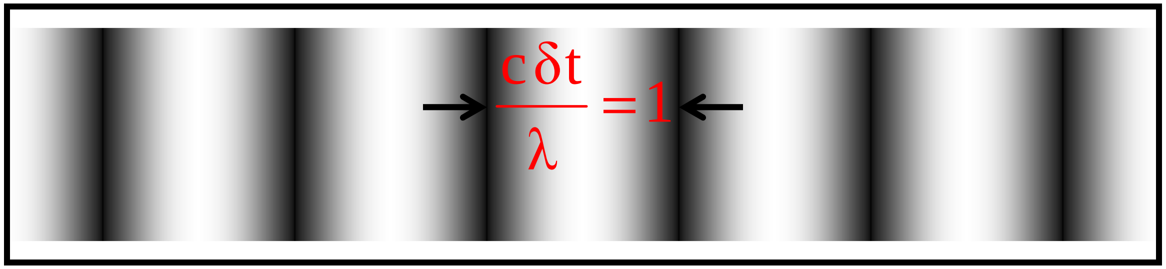
Taylorentwicklung:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + O\left(\beta^4\right)$$

Michelson-Morley: Resultat

$$\delta t \approx \frac{L}{c}\beta^2$$

Interferenzstreifen



Optischer Gangunterschied: $\frac{c\,\delta t}{\lambda} \approx \frac{L}{\lambda}\beta^2$ (in „Streifennummern")

Verschiebung der Streifen bei Drehung um 90°: $2\frac{c\,\delta t}{\lambda} \approx 2\frac{L}{\lambda}\beta^2$

Zahlen für Originalapparatur (Beobachtung über ein volles Jahr):

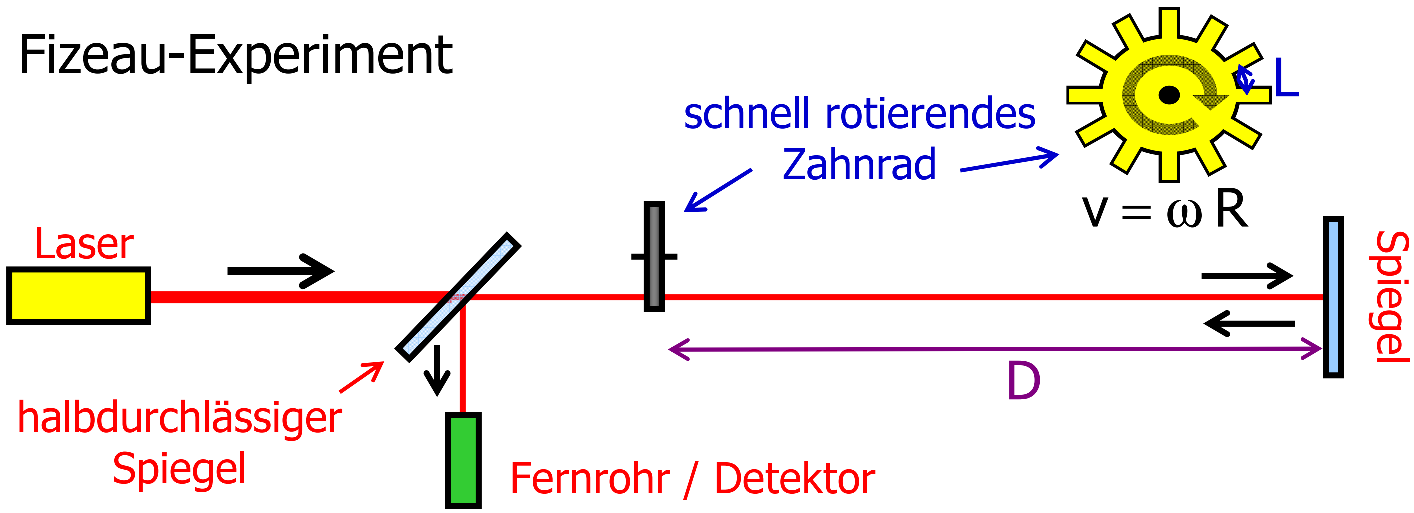
$$\left.\begin{array}{l} v \geq v_{\text{Erde-Sonne}} \approx 3\cdot 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \beta \geq 1\cdot 10^{-4} \\ \lambda \approx 500\,\mathrm{nm}\,, \quad L \approx 10\,\mathrm{m} \end{array}\right\} \quad \boxed{2\frac{L}{\lambda}\beta^2 \geq 0{,}4 \text{ Streifen}}$$

Beobachtung negativ $\Rightarrow$ Ende der Ätherhypothese ! …?

Rettungsversuch: Ätherwind

$\rightarrow$ Äther wird von Erde und Atmosphäre mitgerissen $\leftarrow$

Test: Fizeau-Experiment



Drehzahländerung: $\frac{2D}{c} = \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{v}$ $\Rightarrow$ dunkel, $\frac{2D}{c} = 1 \cdot \frac{L}{v}$ $\Rightarrow$ hell,

$\frac{2D}{c} = \frac{3}{2} \cdot \frac{L}{v}$ $\Rightarrow$ dunkel, $\frac{2D}{c} = 2 \cdot \frac{L}{v}$ $\Rightarrow$ hell ...

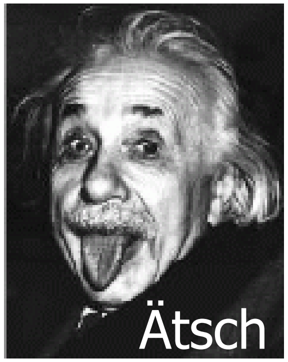
Laserstrahl in strömenden Gasen / Flüssigkeiten
$\Rightarrow$ Äther nicht mitgerissen $\Rightarrow$ Ende der Ätherhypothese !...?

Rettungshypothese: Kontraktion

Rettungsversuch 2: Kontraktionshypothese (Lorentz-Fitzgerald)
(verzweifelt)

$\rightarrow$ Alle Körper, die sich relativ zum Äther bewegen, werden in Bewegungsrichtung kontrahiert $\leftarrow$

$\rightarrow$ möglich aber höchst unnatürlich und unelegant
(verglichen mit Äquivalenzhypothese)

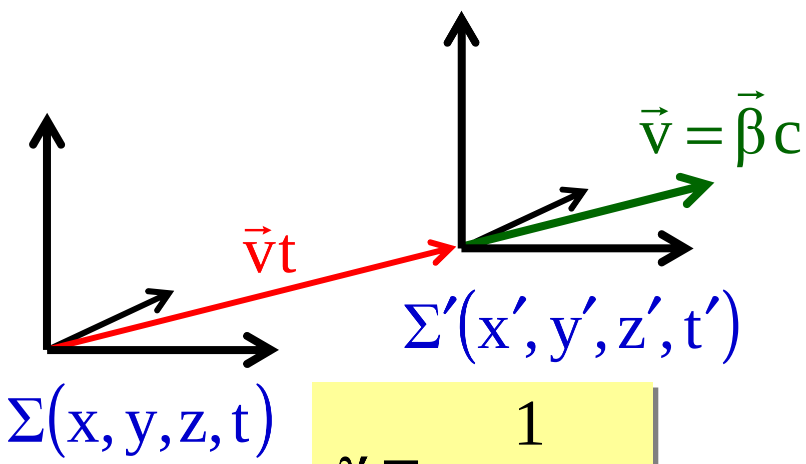


$\Rightarrow$ Paradigmenwechsel:

- akzeptiere die Äquivalenzhypothese und die daraus folgende spezielle Relativitätstheorie
- ersinne möglichst sensitive experimentelle Tests dieser Theorie

6.3. Lorentz-Transformation

Wechsel des Inertialsystems:



$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\vec{\beta}^2}}$$

$$\vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$$

<u>Lorentz-Transformation</u>

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\beta}\gamma\left(ct - \tfrac{\gamma}{1+\gamma}\vec{\beta}\vec{r}\right)$$

$$ct' = \gamma\left(ct - \vec{\beta}\vec{r}\right)$$

<u>Spezialfall:</u> $\vec{\beta} = \beta\vec{e}_z$

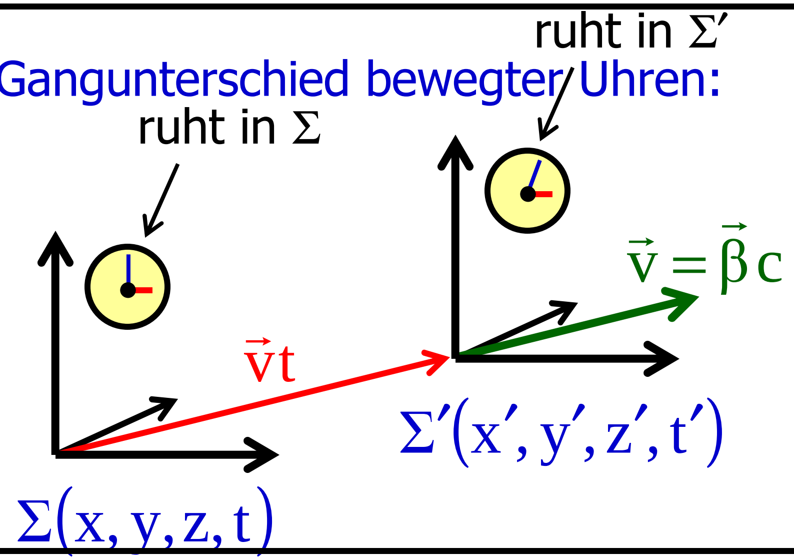
$$z' = \gamma(z - \beta ct)$$

$$x' = x\,,\quad y' = y$$

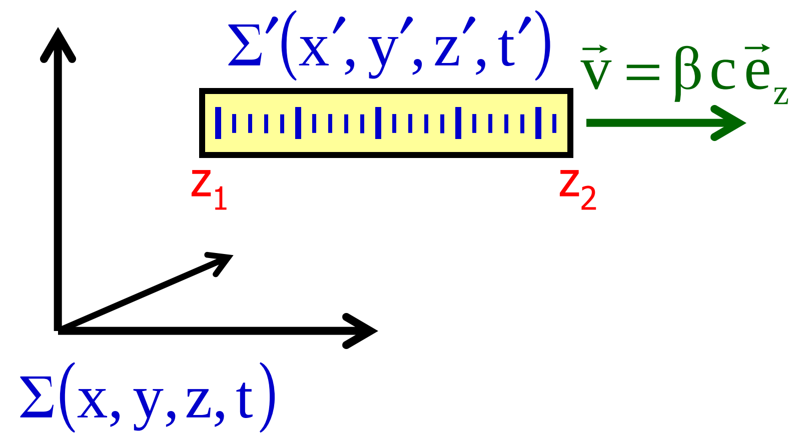
$$ct' = \gamma(ct - \beta z)$$

Längenkontraktion und Zeitdilatation

Gangunterschied bewegter Uhren:



Längenänderung bewegter Maßstäbe:



Zeitdilatation: $\Delta t=\gamma\,\Delta t'$

Bewegte Uhren laufen langsamer !

$$L\;=z_2(t)-z_1(t)$$
$$L'=z_2'(t')-z_1'(t')$$

Längenkontraktion: $L=\frac{1}{\gamma}L'$

Bewegte Maßstäbe sind kürzer !