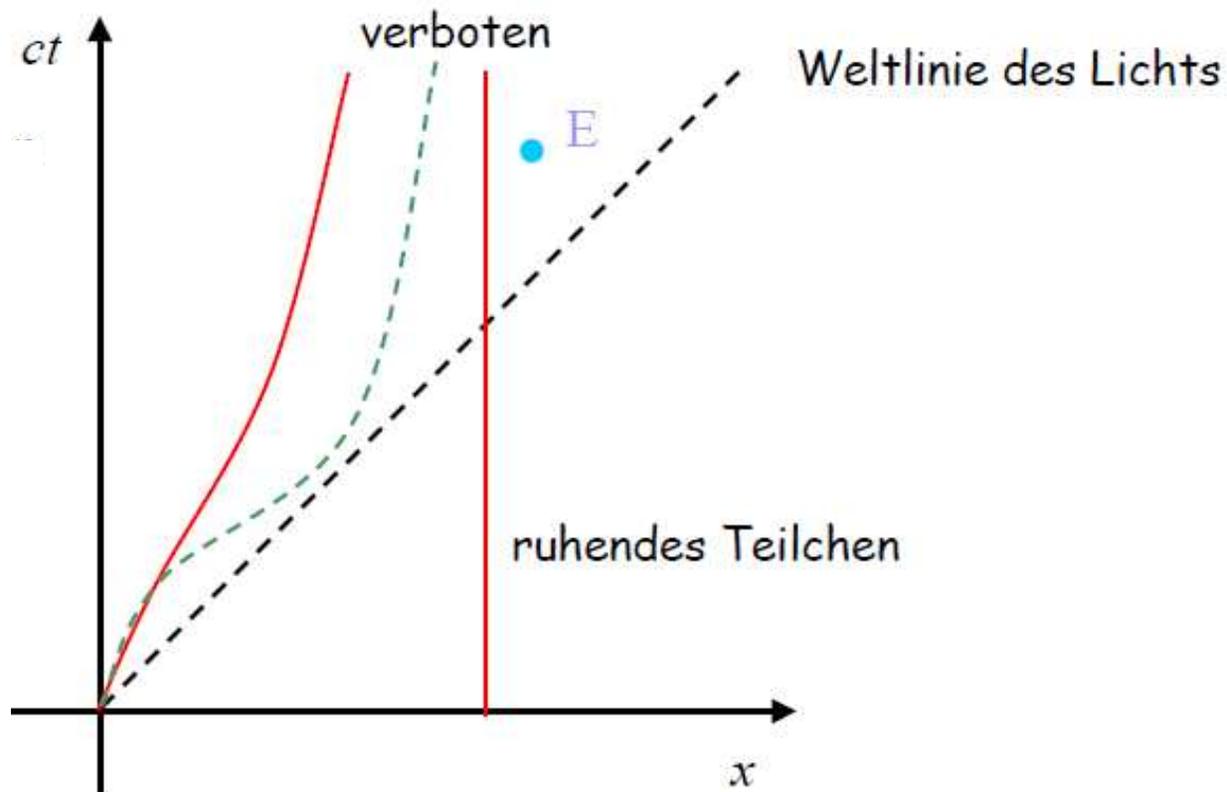
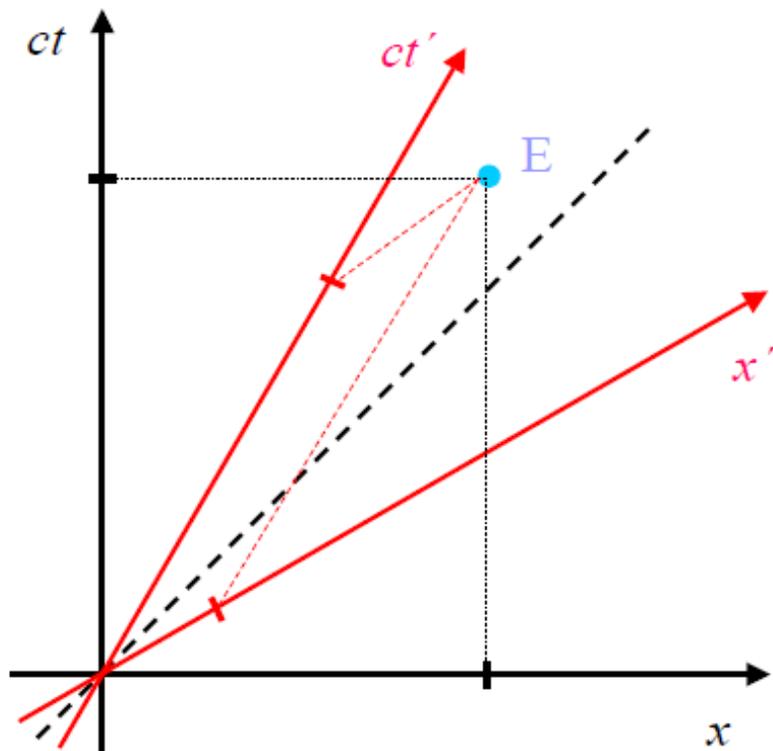


## 6.4. Raum/Zeit Diagramme



Messung der Zeit in Einheiten von  $c^{-1}$ :  $[ct]=m$  (0. Raumdimension)  
**Weltlinie** eines materiellen Objekts bzw. Teilchens:  **$(ct, x, y, z)$**

# Raum-Zeit Diagramme

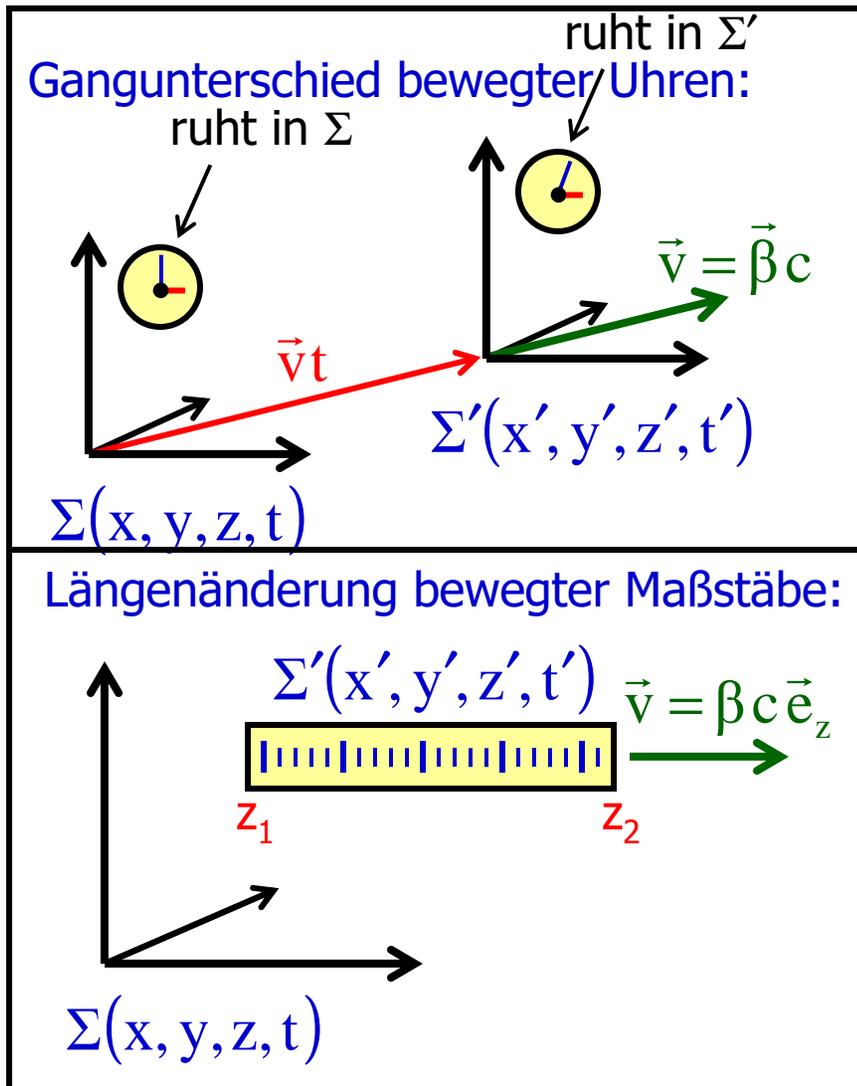


$$0 = x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow ct = \frac{x}{\beta}$$

$$0 = t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Rightarrow ct = \beta x$$

Zeit- und Ortsachse von  $\Sigma'$  in  $\Sigma$

# Längenkontraktion und Zeitdilatation



Zeitdilatation:  $\Delta t = \gamma \Delta t'$

**Bewegte Uhren laufen langsamer !**

$$L = z_2(t) - z_1(t)$$

$$L' = z'_2(t') - z'_1(t')$$

Längenkontraktion:  $L = \frac{1}{\gamma} L'$

**Bewegte Maßstäbe sind kürzer !**

# Kosmische Höhenstrahlung



Wechselwirkung kosmischer Strahlen  
(Protonen...) in der Atmosphäre

$$\left. \begin{array}{l} \langle E_\mu \rangle \approx 5 \text{ GeV} \\ m_\mu c^2 \approx 0,1 \text{ GeV} \end{array} \right\} \langle \gamma \rangle = \frac{\langle E_\mu \rangle}{m_\mu c^2} \approx 50, \quad \langle \beta \rangle \approx 1$$

Problem:

$$\beta c \tau = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 2,2 \mu\text{s} = 660 \text{ m} \ll 40 \text{ km}$$

Einsteins Triumph aus Sicht des Myons:

Längenkontraktion

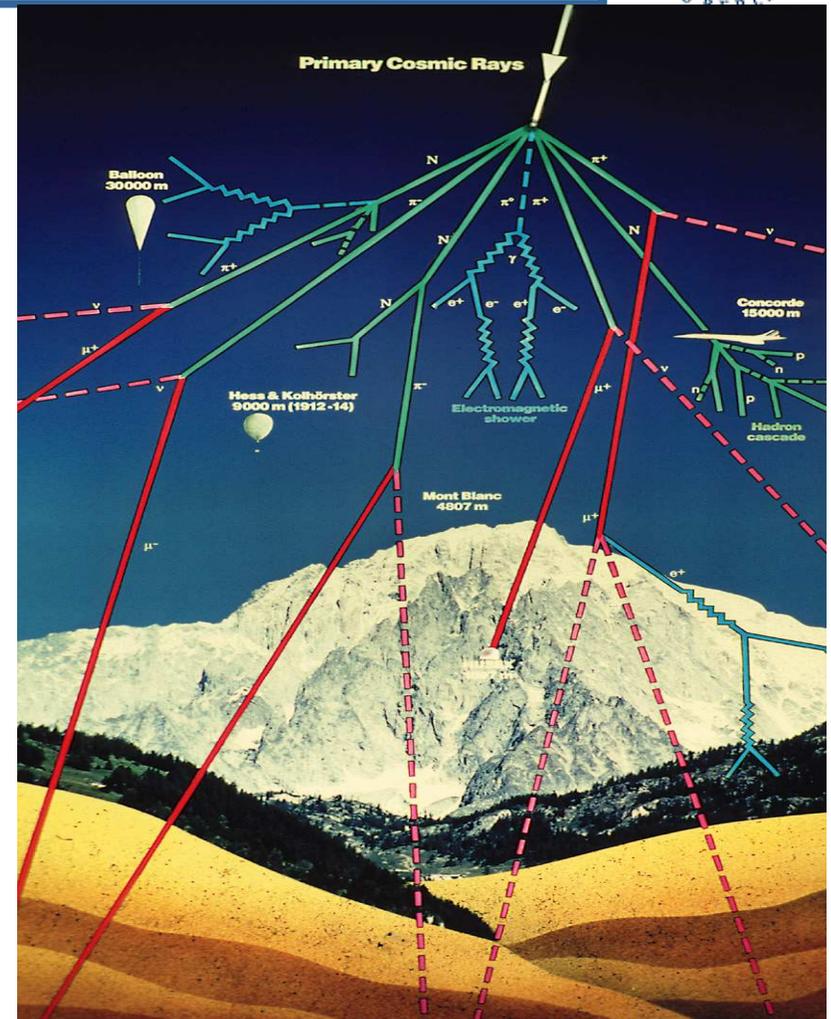
$$h_\mu \stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{\gamma} \cdot h = \frac{1}{50} \cdot 40 \text{ km} = 800 \text{ m} \approx \beta c \tau$$

... und aus Sicht des Beobachters:

Zeitdilatation

$$\Delta t_{\text{Erde}} \stackrel{\downarrow}{=} \gamma \tau = 50 \cdot 2,2 \mu\text{s} = 110 \mu\text{s}$$

$$\Delta t_{\text{Erde}} \cdot \beta c = 110 \mu\text{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 33 \text{ km} \approx h$$



## 6.5. Äquivalenz von Masse und Energie



Bewegungsgleichung:  $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}mc)$

relativistischer Impuls:  $\vec{p} = \gamma\vec{\beta}mc \rightarrow$  **Ruhemasse:**  $m$   
**Relativistische Masse:**  $\gamma m$

Kinetische Energie:  $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\beta^2 mc^2 \rightarrow T = (\gamma - 1)mc^2$

Relativistische Energie:  $E = T + mc^2 = \gamma mc^2$  Ruheenergie:  $E_0 = mc^2$

$\Rightarrow$  Energie-Impuls-Beziehung:  $E = \gamma mc^2 = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$

Nützliche Merkformel mit „ $c = 1$ “:

$E^2 = m^2 + \vec{p}^2$

Nützliche Beziehungen:

$\gamma = \frac{E}{m c^2}$

$\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}$

$\gamma\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{m c}$

# Vierervektoren

$$E = \gamma m c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^2 c^2}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^2 = (m c)^2$$

Analogie:  $(c t)^2 - \vec{r}^2 = (c \tau)^2$

Eigenzeit

Lorentz-invariant

Folgerung:  $(c t, \vec{r})$  und  $\left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right)$  sind Vierervektoren (vgl. Theorie-VL), d.h. sie transformieren identisch unter Lorentztransformationen.

## Lorentz-Transformation

$$\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\beta} \gamma \left( c t - \frac{\gamma}{1+\gamma} \vec{\beta} \vec{r} \right)$$

$$c t' = \gamma \left( c t - \vec{\beta} \vec{r} \right)$$

## Lorentz-Transformation

$$\vec{p}' = \vec{p} - \vec{\beta} \gamma \left( \frac{E}{c} - \frac{\gamma}{1+\gamma} \vec{\beta} \vec{p} \right)$$

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left( \frac{E}{c} - \vec{\beta} \vec{p} \right)$$

Spezialfall:  $\vec{\beta} = \beta \vec{e}_z$

$$z' = \gamma (z - \beta c t)$$

$$x' = x, \quad y' = y$$

$$c t' = \gamma (c t - \beta z)$$

$$p'_z = \gamma \left( p_z - \beta \frac{E}{c} \right)$$

$$p'_x = p'_x, \quad p'_y = p_y$$

$$\frac{E'}{c} = \gamma \left( \frac{E}{c} - \beta p_z \right)$$