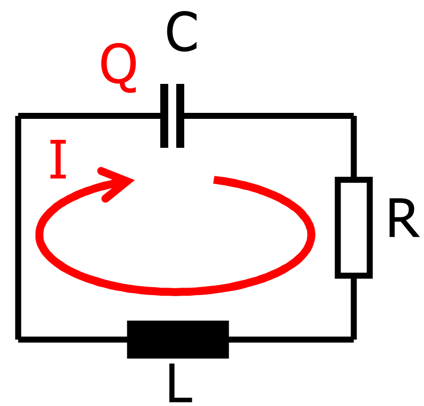
7. Elektromagnetische Schwingungen

- 7.1. Elektromagnetischer Schwingkreis
- 7.2. Gekoppelte Schwingkreise
- 7.3. Erzeugung ungedämpfter Schwingkreise
- 6.4. Offener Schwingkreis: Hertzscher Dipol
- 6.5. Abstrahlung des schwingenden Dipols

7.1. Elektromagnetischer Schwingkreis

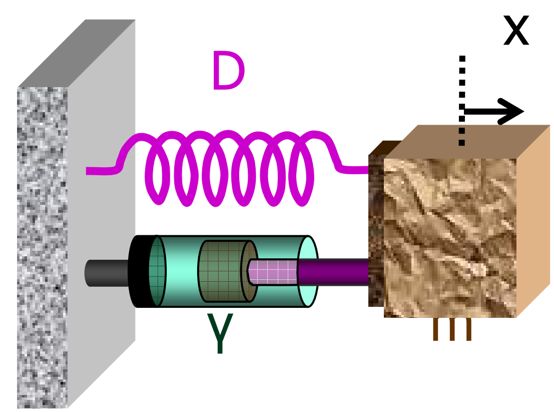
Maschenregel $\Rightarrow$ $\quad \frac{Q}{C} + RI + L\dot{I} = 0$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0}$$



Mechanisches Analogon:

$$\boxed{Dx + \gamma\dot{x} + m\ddot{x} = 0}$$

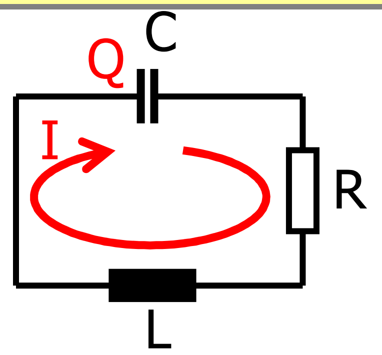


Übersetzung:	Mechanik		Elektrodynamik
	x	$\leftrightarrow$	Q
	m	$\leftrightarrow$	L
	γ	$\leftrightarrow$	R
	D	$\leftrightarrow$	C^{-1}

Gedämpfte Schwingung

Lösung übersetzt aus Mechanik:

$$\frac{Q}{C} + R\dot{Q} + L\ddot{Q} = 0$$



Schwingfall: $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$$Q \sim e^{-t/\tau} e^{i\omega t} \qquad \tau = \frac{2L}{R} \qquad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{\tau^2}}$$

Aperiodischer Grenzfall:

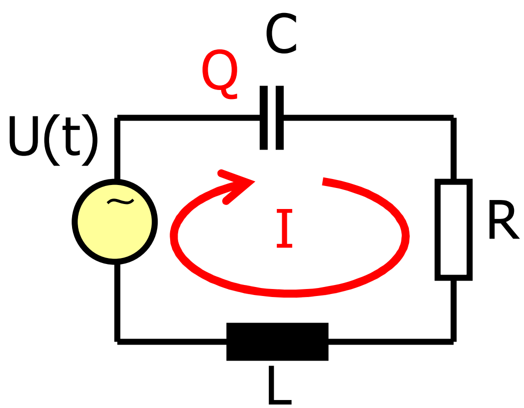
$$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad Q \sim (t + \text{const.}) \cdot e^{-t/\tau} \qquad \tau = \sqrt{LC}$$

Kriechfall:

$$R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \qquad Q \sim e^{-t/\tau_\pm} \qquad \frac{1}{\tau_\pm} = \frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

Erzwungene Schwingung

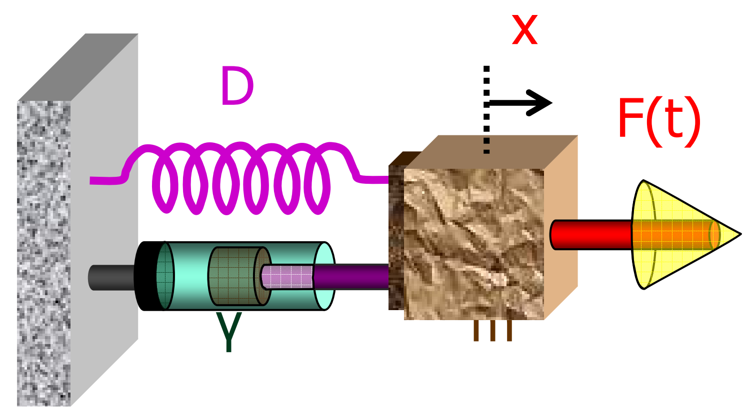
Serienschwingkreis:



$$U(t) \leftrightarrow F(t)$$
$$I = \dot{Q} \leftrightarrow \dot{x}$$

$$L \leftrightarrow m \quad R \leftrightarrow \gamma$$
$$C^{-1} \leftrightarrow D$$

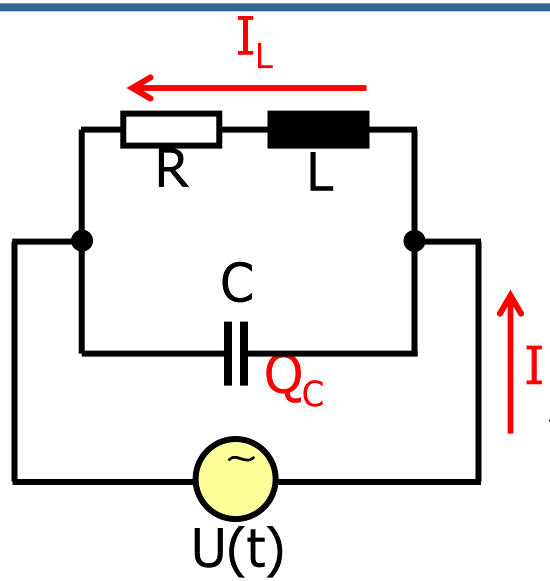
Übersetzung aus Mechanik



Resonanzfrequenz: $$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$ $\Rightarrow$ $|Z| = R$ minimal

Bandbreite: $$\Delta\omega = \frac{R}{L}$$

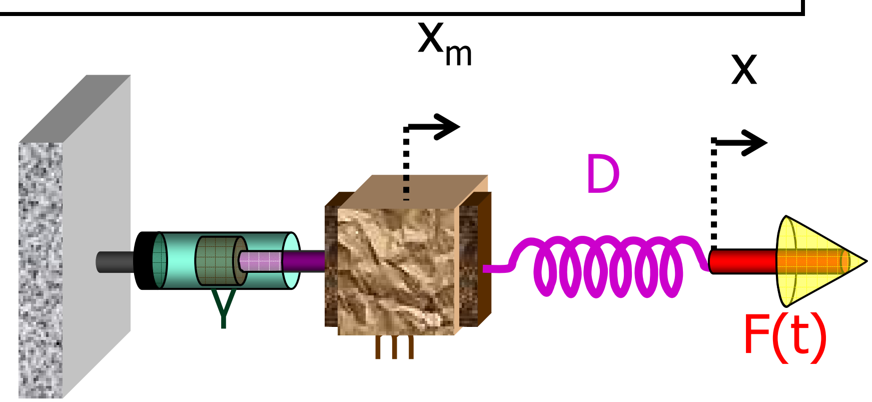
Paralellschwingkreis



$$U(t) \leftrightarrow F(t)$$

$$I \leftrightarrow \dot{x} \quad I_L \leftrightarrow \dot{x}_m \quad Q_C \leftrightarrow x - x_m$$

$$L \leftrightarrow m \quad R \leftrightarrow \gamma \quad C^{-1} \leftrightarrow D$$



Kleine Dämpfung $\Rightarrow$

Resonanzfrequenz: $\omega_R \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ $\Rightarrow$ $|Z| \approx \dfrac{L}{RC}$ maximal

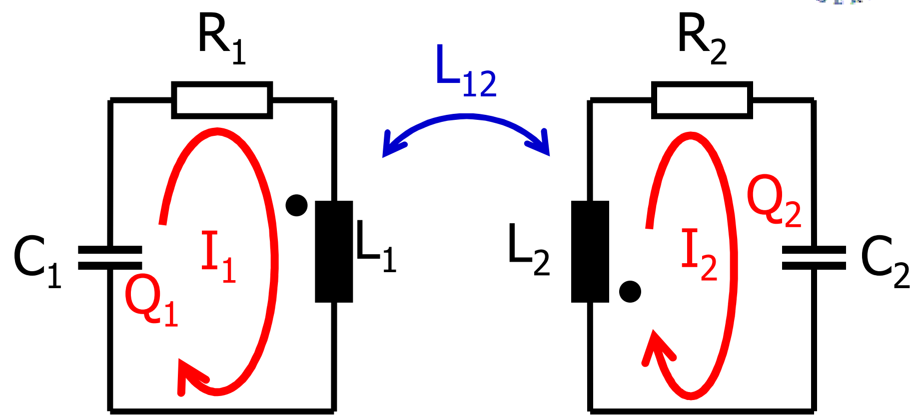
Bandbreite: $\Delta\omega \approx \dfrac{R}{L}$

Gekoppelte Schwingkreise

Induktive Kopplung:

$$L_1\ddot{Q}_1 + R_1\dot{Q}_1 + \tfrac{1}{C_1}Q_1 = -L_{12}\ddot{Q}_2$$

$$L_2\ddot{Q}_2 + R_2\dot{Q}_2 + \tfrac{1}{C_2}Q_2 = -L_{12}\ddot{Q}_1$$



Lösungsweg: Transformation auf Normalkoordinaten

Beispiel: $L_1 = L_2 = L$ $C_1 = C_2 = C$ $R_1 = R_2 = R$

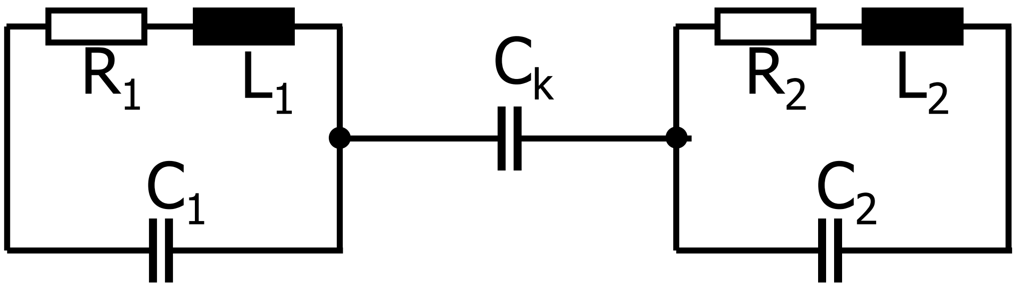
Normalkoordinaten: $Q_\pm = Q_1 \pm Q_2$ $\quad (L \pm L_{12})\ddot{Q}_\pm + R\dot{Q}_\pm + \tfrac{1}{C}Q_\pm = 0$

Eigenfrequenzen: $\omega_\pm = \sqrt{\frac{1}{(L\pm L_{12})C} - \frac{1}{4}\alpha_\pm^2}$ $\quad \alpha_\pm = \frac{R}{L\pm L_{12}}$

Normalmoden (Schwingfall): $Q_\pm \sim e^{-\frac{1}{2}\alpha_\pm t}\, e^{i\omega_\pm t}$

Andere (analoge) Kopplungen

Kapazitive Kopplung:



Galvanische Kopplung: