Übungsblatt 11 zur Vorlesung „Elektrodynamik und Wellenoptik“

Humboldt–Universität zu Berlin, WS 2008/2009,
Prof. Dr. T. Lohse, Prof. Dr. M. Müller-Preußker

Ausgabe: Montag, 5. Januar 2008, in der Vorlesung
Rückgabe: Donnerstag, 15. Januar 2008, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Tensoren im 3D Raum (50 %)

Betrachten Sie Drehungen, dargestellt mit Transformationsmatrizen Ω, im dreidimensionalen euklidischen Raum. Begründen Sie, dass $\Omega\,\Omega^T = \Omega^T\,\Omega = \mathbf{1}$ gelten muss und dass das Volumenelement $dV \equiv d^3x$ einen Skalar darstellt. Zeigen Sie durch explizite Rechnung für eine beliebige (skalare) Ladungsdichte $\rho(\vec{x})$, dass sich gegenüber solchen Transformationen

a) die Komponenten des elektrischen Dipolmoments $p_i,\ i = 1,2,3$ wie ein Vektor bzw. Tensor erster Stufe,

b) die Komponenten des elektrischen Quadrupolmoments $Q_{i,j},\ i,j = 1,2,3$ wie ein Tensor zweiter Stufe,

c) die Komponenten des Gradienten $\nabla\rho$ wie ein Vektor,

d) der Laplace-Operator Δ wie ein Skalar verhalten.

Aufgabe 2: Allgemeines Additionstheorem der Geschwindigkeiten (50 %)

Eine allgemeine “Boost”-Lorentz-Transformation mit der Relativgeschwindigkeit $\vec{v}$ lässt sich in der in der Vorlesung gewählten pseudo-euklidischen Darstellung durch folgende Transformationsmatrix darstellen:

$$\left(A_{\mu\nu}\right) = \begin{pmatrix} 1+\frac{(\gamma-1)\beta_1^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_1\beta_3}{\beta^2} & i\gamma\beta_1 \\ \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_1}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_2^2}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_2\beta_3}{\beta^2} & i\gamma\beta_2 \\ \frac{(\gamma-1)\beta_3\beta_1}{\beta^2} & \frac{(\gamma-1)\beta_3\beta_2}{\beta^2} & 1+\frac{(\gamma-1)\beta_3^2}{\beta^2} & i\gamma\beta_3 \\ -i\gamma\beta_1 & -i\gamma\beta_2 & -i\gamma\beta_3 & \gamma \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichne $\vec{\beta} = (\beta_1,\beta_2,\beta_3) = \vec{v}/c,\ \beta = |\vec{\beta}|,\ \gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ und c die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit.

a) Zeigen Sie mit Hilfe der Hintereinanderausführung zweier Boosts mit $\vec{\beta}_1$ und $\vec{\beta}_2$, dass sich das allgemeine “Additionstheorem” der Geschwindigkeiten wie folgt schreiben lässt

$$\begin{aligned} \gamma &= \gamma_1\gamma_2\left(1+\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_2\right), \\ \vec{\beta} &= \frac{1}{1+\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_2}\left(\vec{\beta}_1+\frac{\gamma_1}{1+\gamma_1}(\vec{\beta}_1\cdot\vec{\beta}_2)\vec{\beta}_1+\frac{1}{\gamma_1}\vec{\beta}_2\right) \\ &= \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\gamma+\gamma_2}{1+\gamma_1}\gamma_1\vec{\beta}_1+\gamma_2\vec{\beta}_2\right) \end{aligned}$$

Am besten betrachten Sie dazu die Transformation der Zeitkomponenten. Ist die Reihenfolge der Einzeltransformationen wichtig?

b) Geben Sie die Formeln der Geschwindigkeitsaddition an für die Fälle $\vec{\beta}_1 \uparrow\uparrow \vec{\beta}_2$, $\vec{\beta}_1 \uparrow\downarrow \vec{\beta}_2$ und $\vec{\beta}_1 \perp \vec{\beta}_2$.

c) Zwei Raketen starten auf der Erde mit Geschwindigkeiten vom Betrag $0{,}8c$. Der Winkel zwischen den Flugrichtungen sei 60°. Wie groß ist der Betrag der *Relativgeschwindigkeit* zwischen den Raketen?