

# Übungsblatt 13 zur Vorlesung 'Elektrodynamik und Wellenoptik'

Humboldt-Universität zu Berlin, WS 2008/2009,  
Prof. Dr. T. Lohse, Prof. Dr. M. Müller-Preußker

Ausgabe: Montag, den 19. Januar 2008, in der Vorlesung

Rückgabe: Donnerstag, den 29. Januar 2008, in der Vorlesung

## Aufgabe 1: Bifurkation (35 %)

Betrachtet sei ein diskretes eindimensionales dynamisches System, beschrieben durch die Iteration

$$x_{k+1} = f_a(x_k),$$

wobei  $f_a$  eine beliebig oft differenzierbare Funktion sei. Der Parameter  $a$  sei der Kontrollparameter des Systems. Sei  $n \in \mathbb{N}$  beliebig und sei  $x_1, x_2, \dots, x_n$  ein  $n$ -Zyklus von  $f_a$ .

- a) Zeigen Sie, dass die  $n$ -fach iterierte Abbildung

$$g_a(x) = \underbrace{f_a(f_a(f_a(\dots f_x(x) \dots)))}_{n\text{-mal}}$$

die Fixpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  besitzt.

- b) Zeigen Sie  $g'_a(x_1) = g'_a(x_2) = \dots = g'_a(x_n)$ .

- c) Zeigen Sie, dass die Fixpunkte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  von  $g_a$  entweder alle stabil oder alle instabil (bzw. labil) sind, wobei Stabilität genau dann vorliegt, wenn

$$\prod_{i=1}^n |f'_a(x_i)| < 1$$

gilt.

- d) Betrachten Sie den Übergang von einem stabilen Fixpunkt  $x_i$  von  $g_a$  für  $a < a_c$  zu einem instabilen Fixpunkt für  $a > a_c$ , wobei  $a_c$  ein kritischer Wert des Kontrollparameters sei, bei dem  $g'_{a_c}(x_i) = -1$  gilt. Zeigen Sie, dass die iterierte Abbildung  $g_{a_c} \circ g_{a_c}$  bei  $x_i$  einen Wendepunkt mit Steigung 1 besitzt. Zeigen Sie, dass  $g_{a_c} \circ g_{a_c}$  für  $a < a_c$  einen stabilen Fixpunkt bei  $x_i$  und zwei neue stabile Fixpunkte  $x_i^\pm$  beidseitig von  $x_i$  besitzt. Untersuchen Sie dazu die Steigung von  $g_{a_c} \circ g_{a_c}$  für  $a < a_c$  und  $a > a_c$  und skizzieren Sie den Verlauf von  $g_{a_c} \circ g_{a_c}$  schematisch in der Nähe von  $x_i$ . Erläutern Sie, warum die Abbildung  $f_a$  beim Übergang von  $a < a_c$  nach  $a > a_c$  eine Periodenverdopplung durchführt.

*Bitte wenden*

## Aufgabe 2: Dualer Feldstärketensor (30 %)

Der duale Feldstärketensor ist definiert als

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\kappa\lambda} F_{\kappa\lambda},$$

wobei  $\epsilon^{\mu\nu\kappa\lambda}$  der total antisymmetrische Einheitstensor vierter Stufe ist.

- Drücken Sie den dualen Feldstärketensor explizit durch die die Feldkomponenten des elektrischen und magnetischen Feldes aus. Interpretieren Sie das Ergebnis.
- Zeigen Sie, dass sich die Gruppe der Maxwell-Gleichungen

$$\partial_\lambda F_{\mu\nu} + \partial_\mu F_{\nu\lambda} + \partial_\nu F_{\lambda\mu} = 0$$

mit Hilfe des dualen Feldstärketensors als

$$\partial_\mu \tilde{F}_{\nu\mu} = 0$$

schreiben lässt.

- Drücken Sie die Lorentz-Skalare  $F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ ,  $\tilde{F}_{\mu\nu}F_{\mu\nu}$  und  $\tilde{F}_{\mu\nu}\tilde{F}_{\mu\nu}$  durch  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  aus.

## Aufgabe 3: Lorentz-Transformation von Stromdichte und em. Feldern (35 %)

Betrachten sie einen geraden, unendlich dünnen, homogen geladenen Draht (Linienladungsdichte  $\lambda$ ), der sich im Koordinatensystem  $\Sigma$  auf der  $z$ -Achse befindet und ruht.

- Wie lauten die Viererstromdichte  $j_\mu$ , der Feldstärketensor  $F_{\mu\nu}$  sowie die Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$  im Koordinatensystem  $\Sigma$ ?
- Welche Viererstromdichte, und welche elektrischen und magnetischen Felder nimmt ein sich mit Geschwindigkeit  $v$  in  $z$ -Richtung bewogender Beobachter (Koordinatensystem  $\Sigma'$ ) wahr? Wenden Sie dafür eine geeignete Lorentz-Transformation auf die in Teilaufgabe a) gewonnenen Größen an. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse.
- Verifizieren Sie Ihre Ergebnisse, indem sie die Gültigkeit der Maxwell-Gleichungen  $\partial'_\nu F'_{\mu\nu} = \mu_0 j'_\mu$  im Koordinatensystem des Beobachters überprüfen.