Übungsblatt 4 zur Vorlesung
‘Elektrodynamik und Wellenoptik’

Humboldt–Universität zu Berlin, WS 2008/2009,
Prof. Dr. T. Lohse, Prof. Dr. M. Müller-Preußker

Ausgabe: Montag, den 3. November 2008, in der Vorlesung
Rückgabe: Donnerstag, den 13. November 2008, in der Vorlesung

Aufgabe 1: Bessel-Funktion (40 %)

Betrachten Sie die Besselsche Differentialgleichung

$$r^2 f''(r) + r f'(r) + (r^2 - n^2) f(r) = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$, wobei $r \mapsto f(r)$, $r \in [0,\infty[$ eine reelle Funktion ist. Die einzige Lösung, die bei $r \to 0$ beschränkt ist, ist proportional zur Besselfunktion 1. Art

$$J_n(r) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \cdot \left(\frac{r}{2}\right)^{n+2k} .$$

Zusätzlich wird definiert: $J_{-n}(r) := (-1)^n \cdot J_n(r)$, d. h. auch $J_n(r) = (-1)^n J_{-n}(r)$.

a) Zeigen Sie (z. B. unter Verwendung des Majorantenkriteriums), dass die obige Reihe für alle $r \in \mathbb{R}$ konvergiert.

b) Beweisen Sie die folgenden Rekursionsformeln für alle $n \in \mathbb{Z}$:

(i) $J_n'(r) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(r) - J_{n+1}(r))$, speziell $J_0' = -J_1(r)$

(ii) $\frac{n}{r} J_n(r) = \frac{1}{2}(J_{n-1}(r) + J_{n+1}(r))$

(iii) $J_n' = J_{n-1}(r) - \frac{n}{r} J_n(r)$

(iv) $J_n'(r) = -J_{n+1}(r) + \frac{n}{r} J_n(r)$

c) Beweisen Sie, dass $J_n(r)$ die Besselsche Differentialgleichung löst!

d) Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

(i) $\int_0^\pi \sin^{2k} \varphi \, \mathrm{d}\varphi = \pi \cdot \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2}$; $k \in \mathbb{N}_0$

(ii) $J_n(r) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi \cos(r \sin\varphi - n\varphi) \, \mathrm{d}\varphi$

e) Diskutieren Sie das Verhalten von $J_n(r)$ für $r \to 0$! Unterscheiden Sie die Fälle $n = 0$, $n = 1$ und $n > 1$.

f) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$g(r) = \frac{a}{\sqrt{r}} \cdot \cos(r - \alpha) , \qquad a, \alpha = \text{const.}$$

die Besselsche Differentialgleichung für $r \gg n$, $r \to \infty$ asymptotisch löst.
Bemerkung: es gilt $J_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \left\{ \cos\left(r - \frac{\pi}{4} - \frac{n\pi}{2}\right) + \mathcal{O}(\frac{1}{r}) \right\}$.

Aufgabe 2: (30 %)

Gegeben sei ein homogener, isotroper, ungeladener Isolator, in dem sich ebene elektromagnetische Wellen ausbreiten mögen.

a) Gegeben sei das elektrische Feld

$$\vec{E}(\vec{x},t) = c(2\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\ i(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t), \qquad \vec{k} = k\vec{e}_z, \quad c = \text{const.}$$

Berechnen Sie dazu das Magnetfeld $\vec{B}(\vec{x},t)$ und geben Sie dessen Polarisation an.

b) Gegeben sei das Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{x},t) = c(\sin(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\,\vec{e}_x + \cos(\vec{k}\cdot\vec{x} - \omega t)\,\vec{e}_y), \qquad c = \text{const.}$$

Berechnen Sie die zugehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}(\vec{x},t)$ und bestimmen Sie deren Polarisation.

Aufgabe 3: Feldmittelung und makroskopisches Feld (30 %)

Schematisch (in nur einer Dimension) bestehe ein mikroskopisches Feld aus der Überlagerung

$$e = e_0\cos(k_a x - \omega_a t) + E_0\cos(kx - \omega t)$$

Der erste Term beschreibe molekulare Felder ($e_0 = 10^{11}\text{Vm}^{-1}$, $k_a = 1/r_{Bohr} = 10^8\text{cm}^{-1}$), der zweite eine Welle mit $E_0 = 1\mu\text{Vm}^{-1}$, $k = 1\text{cm}^{-1}$. Mitteln sie dieses Feld mit der Verteilungsfunktion

$$f(x-y) = C\exp\left(-(x-y)^2/2l_0^2\right), \quad l_0 = 10^{-6}\text{cm}$$

a) Bestimmen Sie die Normierungskonstante C.

b) Bestimmen Sie das gemittelte (makroskopische) Feld E und interpretieren Sie das Resultat.