Übungsblatt zum Tutorium „Greensche Funktionen“

Aufgabe 1:

a) Berechnen Sie die Greensche Funktion im Bereich außerhalb der Sphäre mit dem Radius R, die auf der Oberfläche der Sphäre die Dirichlet Randbedingungen erfüllt.

b) Mit diesem Ergebnis berechnen Sie das Potential auf der z-Achse, wenn das Potential der Sphäre wie folgt gegeben sei:

$$\phi(r = R) = \begin{cases} \mathrm{V}_0 & 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\ \text{-}\mathrm{V}_0 & \frac{\pi}{2} \le \theta < \pi \end{cases}$$

c) Wie würden Sie das vorherige Ergebnis benutzen um das Potential im ganzen Bereich V zu finden?

Aufgabe 2

Berechnen Sie, mit den Dirichlet Randbedingungen auf z=0 Ebene, im V=Halbraum ($z \ge 0$):

a) Entsprechende Greensche Funktion;

b) Wenn das Potential in der z=0 Ebene durch:

$$\phi(\rho,\varphi,z = 0) = \begin{cases} \mathrm{V}_0, & \rho < a \\ 0 & \rho \ge a \end{cases}$$

gegeben sei, berechnen Sie das Potential im Bereich $\varphi, z \ge 0$;

c) Zeigen Sie, dass das Potential auf der z-Achse gleich

$$\phi = V_0(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}})$$

ist;

d) Zeigen Sie, dass für große Entfernungen ($\rho^2 + z^2 \gg a^2$) das Potential gleich

$$\phi = \frac{V_0 a^2}{2} \frac{z}{(\rho^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} (1 - \frac{3a^2}{4(\rho^2 + z^2)} + \frac{5(3\rho^2 a^2 + a^4)}{8(\rho^2 + z^2)^2})$$

ist.

Aufgabe 3

a) Finden Sie die Greensche funktion im Bereich außerhalb des unendlichen Zylinders mit dem Radius R, wenn das Potential auf der Oberflache des Zylinders ($\phi(\rho,\varphi)$) bekannt ist und innerhalb dez Zilinders mit dem folgenden Ausdruck

$$\phi(\rho,\varphi) = \int_0^{2\pi} \phi(R,\varphi') \frac{(R^2 - \rho^2) d\varphi'}{R^2 + \rho^2 - 2Rrcos(\varphi - \varphi')}$$

gegeben sei;

b) Zwei Hälften des langen leitenden Zylinders mit dem Radius R haben konstante potentiale $V_1(-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2})$ und $V_2(\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{3\pi}{2})$. Zeigen Sie, dass das Potential innerhalb des Zylinders die folgende Relation efüllt:

$$\phi(\rho,\varphi) = \frac{V_1 + V_2}{2} + \frac{V_1 - V_2}{\pi} arctan(\frac{2R\rho}{R^2 - \rho^2} cos\varphi)$$

c) Berechnen Sie die induzierte Flächenladungsdichte im Zylinder.

Aufgabe 4

Innerhalb der leitenden Sphäre mit dem Radius R gibt es eine Punktladung q im Abstand a ($a < R$) von dem Zentrum der Sphäre. Berechnen Sie das Potential im ganzen Raum unter der Annahme, dass das Potential auf der Oberfläche konstant (V_0) ist. Innerhalb der Sphäre ist das Potential gleich der Summe der Potentialen von q und seiner Bildungladung. Nehmen Sie das Potential innerhalb Sphäre in integraler Form als Greensche Funktion vom Dirchlet-Typ an.