Hausübungen 11 zur Vorlesung „Kern- und Teilchenphysik“

Humboldt–Universität zu Berlin, WS 2009/2010,
Prof. Th. Lohse, U. Schwanke, O. M. Kind

Ausgabe: 4. Januar 2010
Abgabe: 11. Januar 2010

Aufgabe 1: SU(N)-Symmetriegruppe (50%)

Betrachtet sei ein N-dimensionaler abstrakter Zustandsraum für Elementarteilchen, aufgespannt durch die orthonormalen Basiszustände

$$|1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \ldots \quad |N-1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |N\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(Beispiele: Spinzustände, Isospinzustände, Flavourzustände, Farbzustände von Quarks etc.). Betrachtet sei ein beliebiger normierter Zustand

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{N} a_j \, |j\rangle$$

mit komplexen Zahlen a_j. Eine Wechselwirkung, die blind gegen die Quantenzahlen des Zustandsraumes ist, d.h. unter der sich alle N Basiszustände identisch verhalten, ist <u>symmetrisch</u> unter ,,Drehungen”:

$$|\Psi\rangle \rightarrow |\tilde{\Psi}\rangle = U \cdot |\Psi\rangle$$

(i) Zeigen Sie, dass U in der angegebenen Basisdarstellung eine <u>unitäre</u> Matrix (d.h. $U^\dagger = U^{-1}$) sein muss und dass $\det U = \exp(i\phi)$ gilt, wobei ϕ eine reelle Phase ist. Hinweis: Normierung der Wellenfunktionen beachten!

(ii) Die Drehung soll <u>kontinuierlich</u> sein, d.h. es soll zu jeder Drehung U einen glatten (d.h. beliebig oft stetig differenzierbaren) Weg $U(t)$ mit $U(0) = I_N = (N \times N)$–Einheitsmatrix und $U(1) = U$ geben. Ferner sind globale Phasenfaktoren $\exp(i\phi)$ für die physikalische Bedeutung von $|\Psi\rangle$ nicht relevant, so dass man sich auf Wege mit $\det U = \text{const.}$ beschränken darf. Zeigen Sie, dass U dann <u>speziell</u> ist, d.h. $\det U = 1$.

(iii) Der Weg sei konkret parametrisiert durch

$$U(t) = \exp(itH)\,,$$

wobei H eine komplexe $(N \times N)$–Matrix mit $U = \exp(iH)$ ist. Zeigen Sie, dass U genau dann speziell unitär ist, wenn H eine hermitesche Matrix mit verschwindender Spur ist. Hinweis: $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$

(iv) Zeigen Sie, dass es für reelle Linearkombinationen $n = N^2 - 1$ linear unabhängige $(N \times N)-$Matrizen $H_1, \ldots, H_n$ gibt (sogenannte Generatoren der Symmetriegruppe). Zählen Sie dazu die unabhängigen reellen Elemente einer entsprechenden $(N \times N)-$Matrix ab.

(v) Zeigen Sie, dass die kontinuierlichen speziellen unitären Transformationen

$$U(\vec{\varphi}) = \exp\left(i\vec{\varphi} \cdot \vec{H}\right) = \exp\left(i\varphi_1 \cdot H_1 + \ldots + i\varphi_n \cdot H_n\right)$$

(mit reellen Phasen $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$) alle möglichen Drehungen (SU(N)−Gruppe) umfassen.

(vi) Zeigen Sie, dass die Pauli-Matrizen

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die SU(2)−Gruppe generieren.

Aufgabe 2: Interpretation von Formfaktoren (50%)

Bestimmen Sie anhand der Messung des Wirkungsquerschnittes der Elektron-Calzium Streuung (siehe Abbildung) bei einer Energie von $E_e = 450$ MeV den Radius des ^{40}Ca-Kernes und vergleichen Sie Ihr Resultat mit den Formeln aus der Vorlesung ($R = r_0\, A^{\frac{1}{3}}$ mit $r_0 = 1.3$ fm).

Anleitung:

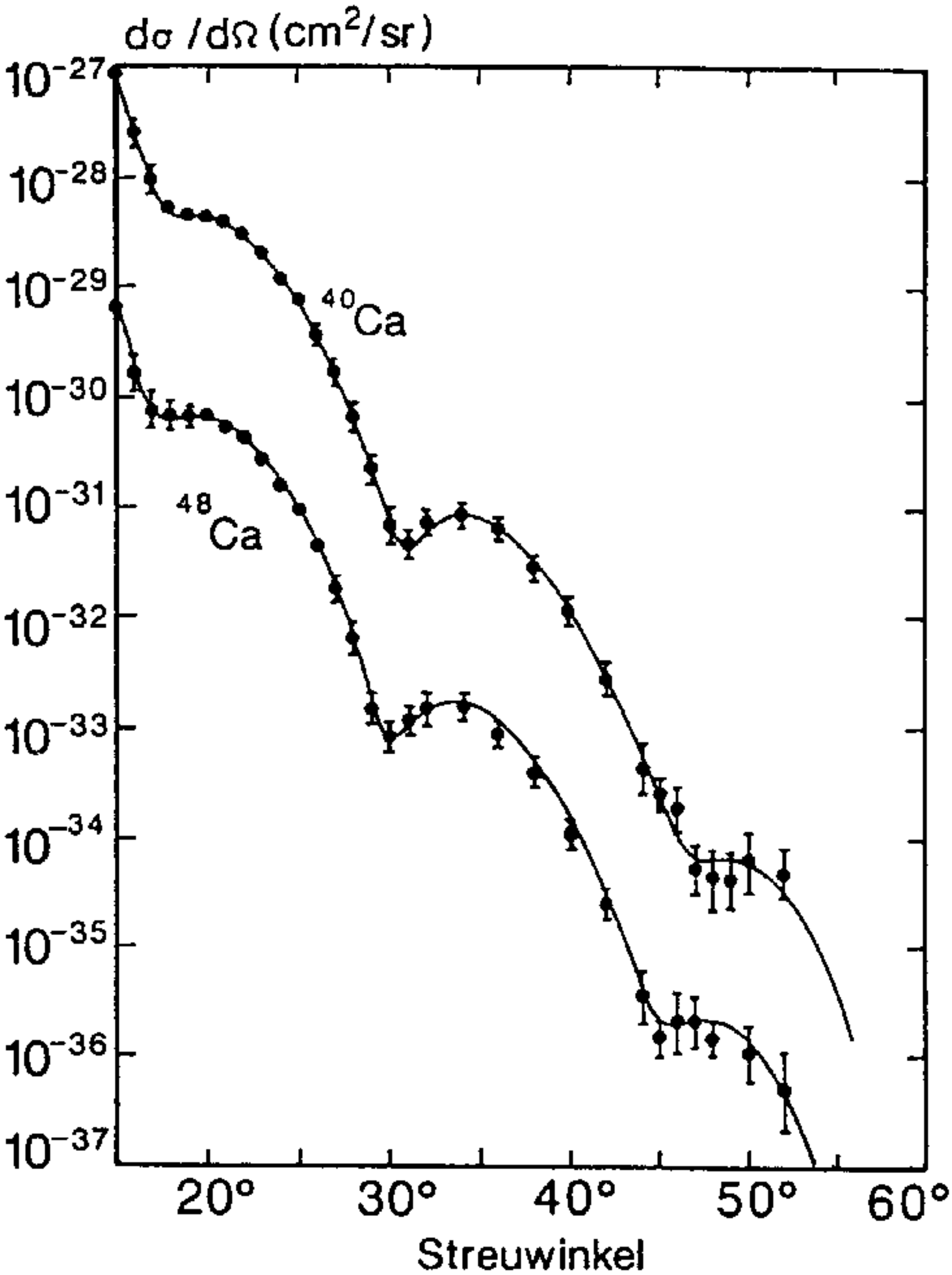
(i) Nehmen Sie an, dass die Ladungsverteilung der einer homogen geladenen Kugel mit Radius R von $\rho(r) = \rho_0 \cdot \Theta(R - r)$ entspricht. Berechnen Sie daraus den entsprechenden Formfaktor

$$F(\vec{q}) = \int \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\, d^3r$$

und stellen Sie ihn grafisch dar.

(ii) Leiten Sie den Zusammenhang zwischen dem Streuwinkel des Elektrons θ und dem Impulsübertrag q ab!

(iii) Bestimmen Sie die Nullstellen des Formfaktors (q_0) als Funktion von R und vergleichen Sie diese mit der Abbildung. Beachten Sie dabei, dass den Nullstellen im angenommenen, vereinfachenden Modell Minima der Messung entsprechen, bei denen der Wirkungsquerschnitt σ aber nicht verschwindet.


dσ /dΩ (cm²/sr)
10⁻²⁷
10⁻²⁸
10⁻²⁹
10⁻³⁰
10⁻³¹
10⁻³²
10⁻³³
10⁻³⁴
10⁻³⁵
10⁻³⁶
10⁻³⁷
⁴⁰Ca
⁴⁸Ca
20°
30°
40°
50°
60°
Streuwinkel