Hausübungen 13 zur Vorlesung „Kern- und Teilchenphysik“

Humboldt–Universität zu Berlin, WS 2009/2010,
Prof. Th. Lohse, U. Schwanke, O. M. Kind

Ausgabe: 18. Januar 2010
Abgabe: 25. Januar 2010

Aufgabe 1: Quark-Parton-Modell (50%)

In der Vorlesung wurde mit der Rosenbluth-Formel der Wirkungsquerschnitt für die tiefunelastische Lepton-Hadron-Streuung als Produkt des Wirkungsquerschnitts für die Streuung an punktförmigen, spinlosen Teilchen (Mott-Streuung) und einem Term, welcher die relativistischen Formfaktoren G_E und G_M enthält, dargestellt.

Im Quark-Parton-Modell wird die unelastische Streuung erklärt durch die elastische Streuung an den Quarks (Spin-½), aus welchen sich die Hadronen aufbauen. Hierbei sind in der Rosenbluth-Formel die Formfaktoren G_E und G_M durch die *Strukturfunktionen* $F_1(x,Q^2)$ und $F_2(x,Q^2)$ zu ersetzen, die aus den Verteilungsdichten für die verschiedenen Quarkflavours aufgebaut sind. Da die Strukturfunktionen durch Messung der differentiellen Streuquerschnitte für die Lepton-Hadron-Streuung zugänglich sind, lassen sich daraus Eigenschaften der beteiligten Partonen bestimmen.

Für die Elektron-Hadron-Streuung lautet die Strukturfunktion F_2

$$F_2^{\mathrm{eN}}(x) = \sum_{i\in\{u,d,s,c\}} e_i^2\,(xq_i(x) + x\bar{q}_i(x))\ ,$$

wobei die $q_i(x)$, $\bar{q}_i(x)$ die Dichteverteilungen der Quarks bzw. Antiquarks in Abhängigkeit der Björken-Skalenvariable x mit den jeweiligen elektrischen Ladungen e_i bedeuten. Analog gilt für die Neutrino-Hadron-Streuung

$$F_2^{\nu\mathrm{N}}(x) = \sum_{i\in\{u,d,s,c\}} (xq_i(x) + x\bar{q}_i(x))\ .$$

a) Geben Sie einen Ausdruck für die Strukturfunktion $F_2^{\mathrm{ep}}(x)$ im Falle der Lepton-Proton-Streuung an. Summieren Sie hierbei über alle auftretenden Quark-Flavours unter Vernachlässigung der Anteile von Beauty- und Top-Quarks (aber nicht Strange und Charm).

b) Konstruieren Sie nun durch Anwendung der Isospin-Symmetrie die Strukturfunktion $F_2^{\mathrm{en}}(x)$ für die Elektron-Neutron-Streuung.

c) Berechnen Sie durch Mittelung der Isospins von Proton und Neutron die Strukturfunktion $F_2^{\mathrm{eN}}(x)$ für ein isoskalares Nukleon-Target (z. B. ${}^2_1\mathrm{H}$, ${}^6_3\mathrm{Li}$, ${}^{12}_6\mathrm{C}$, ...).

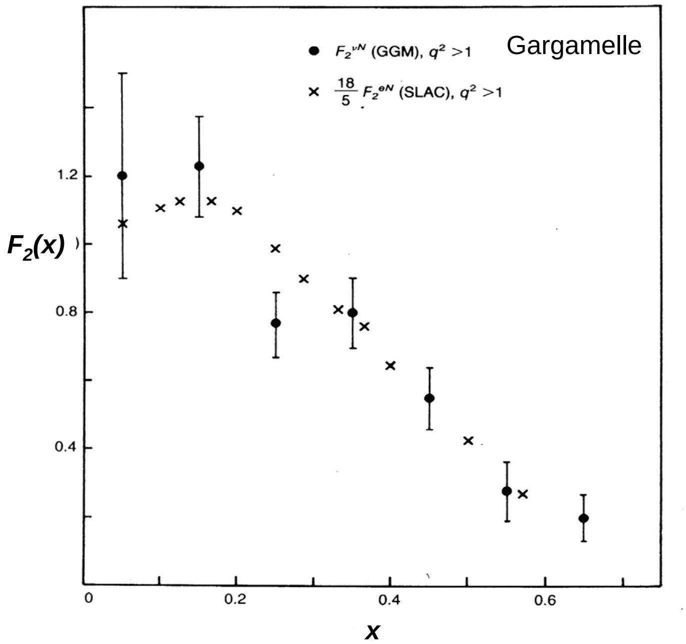
d) Betrachten Sie nun die Streuung von Neutrinos an Hadronen, und berechnen Sie $F_2^{\nu p}(x)$, $F_2^{\bar{\nu}p}(x)$, $F_2^{\nu N}(x)$ und $F_2^{\bar{\nu}N}(x)$. Zeigen Sie, dass für die Streuung an isoskalaren Kernen

$$F_2^{eN}(x) \approx \frac{5}{18} F_2^{\nu N}(x)$$

gilt, wenn die Ladungen von u-,c-Quarks $+\frac{2}{3}e$, und die von d-,s-Quarks $-\frac{1}{3}e$ betragen.

In der Abbildung sehen Sie den ersten Vergleich der Strukturfunktion in der Neutrino-Nukleon-Streuung, welche zu Beginn der siebziger Jahre mit der Blasenkammer Gargamelle aufgenommen wurde, und der Elektron-Nukleon-Steuung. Die Annahme drittelzahliger Ladungen für die Quarks wurde hierdurch bestätigt.

e) Welchen Wert erwarten Sie für $\int F_2^{eN}(x)\,\mathrm{d}x$? Schätzen Sie den Wert aus der Abbildung ab, und erklären Sie Ihre Beobachtung.



Aufgabe 2: SU(3) und Farbe (50%)

Gegeben seien die Gell-Mann-Matrizen

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

a) Zeigen Sie, dass die Matrizen $T_a = \frac{1}{2}\lambda_a$ ($a = 1, \ldots, 8$) die SU(3)-Gruppe generieren, d.h. dass die Matrizen den $\mathbb{R}$-Vektorraum der spurlosen, hermiteschen 3×3-Matrizen aufspannen. Überprüfen Sie für mindestens zwei Beispiele die Orthonormalitätsrelation $\mathrm{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2}\delta_{ab}$ für die gewählte Matrizen-Basis.

b) Zeigen Sie, dass in der SU(3)-Vertauschungsrelation

$$[T_a, T_b] = i f_{abc} T_c$$

die Strukturkonstanten reell und total antisymmetrisch sind. (Erbringen Sie den Beweis ohne explizites Ausrechnen von Strukturkonstanten.)

c) Zeigen Sie, dass auch die Matrizen $-T_a^*$ die SU(3) generieren.

d) Die Farb-Wellenfunktion eines Quarks transformiert sich unter SU(3) gemäß

$$|f\rangle \to e^{i\Theta_a T_a}|f\rangle,$$

und man kann beweisen, dass die Wellenfunktion eines Antiquarks sich gemäß

$$|\bar{f}\rangle \to e^{-i\Theta_a T_a^*}|\bar{f}\rangle$$

transformiert. Zeigen Sie, dass ein Meson mit der Farb-Wellenfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(|r\bar{r}\rangle + |g\bar{g}\rangle + |b\bar{b}\rangle)$$

ein Farb-Singulett ist. Betrachten Sie dazu infinitesimale Θ_a und entwickeln Sie die Transformationsmatrizen bis zur ersten Ordnung in Θ_a.