Hausübungen 14 zur Vorlesung „Kern- und Teilchenphysik“

Humboldt–Universität zu Berlin, WS 2009/2010,
Prof. Th. Lohse, U. Schwanke, O. M. Kind

Ausgabe: 25. Januar 2010
Abgabe: 1. Februar 2010

Aufgabe 1: Klein-Gordon-Gleichung (100%)

Die Lagrange-Dichte eines massiven Bosons, d. h. eines spinlosen Teilchens mit Masse m lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \,,$$

wobei ϕ ein reelles, skalares Quantenfeld bedeutet, welches das Teilchen darstellt.

a) Leiten Sie unter Anwendung der Euler-Lagrange-Differentialgleichung die Feldgleichung des Teilchens her und zeigen Sie, dass sich die Klein-Gordon-Gleichung

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right) \phi = 0$$

ergibt. Tipp: Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = \partial^\mu \phi$ gilt.

b) Für ein *komplexes* Feld ϕ des massiven, spinlosen Teilchens ist die Langrange-Dichte durch

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^\star (\partial^\mu \phi) - \frac{1}{2} m^2 \phi^\star \phi$$

gegeben. Behandeln Sie ϕ und $\phi^\star$ als unabhängige Feldvariablen, und leiten Sie getrennt die Feldgleichungen für beide Variablen her. Zeigen Sie, dass die sich ergebenden Gleichungen konsistent sind, d. h. zueinander komplex konjugiert sind.

c) Zeigen Sie, dass die komplexe Lagrange-Dichte des massiven, spinlosen Teilchens invariant unter *globalen* Eichtransformationen der Form

$$\phi \to e^{i\alpha} \phi$$

ist.

d) Vervollständigen Sie die Lagrange-Dichte für das Teilchen unter Zuhilfenahme der kovarianten Ableitung $D_\mu \equiv \partial_\mu \to \partial_\mu + iqA_\mu$ derart, dass diese auch eichinvariant unter *lokalen* Eichtransformationen

$$\phi \to e^{iq\alpha(x)} \phi$$

ist. Das Vektorfeld A_μ transformiere sich unter lokalen Eichtransformationen gemäß $A_\mu \to A_\mu - \partial_\mu \alpha(x)$. Interpretieren Sie die Terme der resultierenden Lagrange-Dichte.

e) Prüfen Sie nach, dass die sich ergebende Stromdichte $j^\mu \equiv iq \left[\phi^\star (\partial^\mu \phi) - (\partial^\mu \phi)^\star \phi\right]$ der Kontinuitätsgleichung $\partial_\mu j^\mu = 0$ genügt.