Prof. Dr. T. Lohse, Prof. Dr. P. Uwer
AG Experimentelle Teilchenphysik
AG Phänomenologie der Elementarteilchenphysik
Institut für Physik

Präsenzübungen zur Klassischen Mechanik und Wärmelehre (P1a)

WS 10/11 **Blatt 1a** **Termin: 25. 10. 2010**

Differentierbarkeit.
Eine reellwertige Funktion f heißt *differenzierbar*, falls der Differentialquotient

$$f'(x) = \lim_{\delta x \to 0} \frac{f(x+\delta x) - f(x)}{\delta x} \tag{1}$$

existiert. Man nennt $f'(x)$ dann die Ableitung von f im Punkt x.
Notation: Die Ableitung wird auch als $\frac{d}{dx} f(x)$ geschrieben. Ableitungen nach der Zeit t werden in der Physik häufig durch einen Punkt dargestellt, $\dot{f}(t) = \frac{d}{dt} f(t)$.
Höhere Ableitungen werden durch mehrere Striche/Punkte oder $\frac{d^n}{dx^n}$ notiert.

Aufgabe 1: Produktregel

Es seien f, g differenzierbare Funktionen und $h(x) = f(x)g(x)$. Zeigen Sie, dass die *Produktregel* gilt:

$$h'(x) = (fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,. \tag{2}$$

Hinweis: Dabei dürfen Sie verwenden, dass f stetig ist (das folgt aus der Differenzierbarkeit), dass also $\lim_{\delta x \to 0} f(x+\delta x) = f(x)$ gilt.
Wenn zwei Funktionen einen endlichen Grenzwert haben, sind die Grenzwerte der Summe bzw. des Produkts der Funktionen durch die Summe bzw. das Produkt der Grenzwerte gegeben.

Ableitungen einiger elementarer Funktionen.
Es ist

$$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1} \qquad \text{Monome}$$
$$\frac{d}{dx} \exp x = \exp x \qquad \text{Exponentialfunktion}$$
$$\frac{d}{dx} \ln x = 1/x \qquad \text{Logarithmus}$$
$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x \qquad \text{Sinus}$$
$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x \qquad \text{Cosinus}$$

Weitere Rechenregeln.
Für reellwertige Funktionen f, g und reelle Zahlen $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x), \quad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x), \qquad \text{(Linearität)} \tag{3}$$

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) f'(x), \qquad \text{(Kettenregel)} \tag{4}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}. \qquad \text{(Quotientenregel)} \tag{5}$$

Dabei ist $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die *Verkettung* der Funktionen f und g. Die Addition von Funktionen und die Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl ist punktweise definiert, d.h es ist $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$.

Aufgabe 2: Differentiation
Berechnen Sie

a) $\frac{d}{dx} \cos\left(x^2 + ax + b\right)$

b) $\frac{d}{dx} \frac{\sin x}{x}$

c) $\tan'(x)$

d) $\dot{u}(x,t)$, wobei $u(x,t) = A \exp[i(kx - \omega t)]$ ist

e) $\frac{d}{dx} \sqrt{\ln x}$

f) $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$ für $n = 0, 1, 2$
Hinweis: für die Exponentialfunktion gilt $\exp(a)\exp(b) = \exp(a+b)$ und $\exp(0) = 1$.

Taylor-Entwicklung.
Für unendlich oft differenzierbare Funktionen $f(x)$ lässt sich die Taylorreihe

$$T_f(\delta x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\delta x)^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) \tag{6}$$

von f in δx um den Entwicklungspunkt x hinschreiben. Oft konvergiert die Taylorreihe und stellt die Ursprüngliche Funktion dar, d.h. es gilt

$$f(x + \delta x) = T_f(\delta x) \tag{7}$$

für genügend kleine δx. Da sich Potenzreihen wie die Taylorreihe mathematisch sehr gut behandeln lassen, werden in der Physik häufig komplizierte Funktionen durch ihre Taylorreihe (oder die ersten Glieder der Taylorreihe) genähert. *Vorsicht:* es kann vorkommen, dass $T_f(\delta x)$ nicht konvergiert oder aber gegen eine andere Funktion als f konvergiert.
Beispiele von Funktionen, die sich durch ihre Taylorreihe (mit Entwicklungspunkt $x = 0$) darstellen lassen:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} \qquad \text{(für } x \in \mathbb{R}.\text{)} \tag{8}$$

$$(1 \pm x)^m \approx 1 \pm mx + \frac{m(m-1)}{2} x^2 \qquad \text{(für } m > 0 \text{ und } |x| \leq 1\text{)} \tag{9}$$

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}, \quad \cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} \qquad \text{(für } x \in \mathbb{R}.\text{)} \tag{10}$$

Hinweis: Sie können diese Entwicklungen durch explizites Einsetzen in (6) verifizieren. Für (9) benötigen Sie den Binomischen Lehrsatz, $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$.