

1. Grundlagen der Quantenmechanik



1. Wärmestrahlung
 1. Erzeugung und Absorption von Strahlung
 2. Schwarzkörperstrahlung, Hohlraumstrahlung
 3. Planck'sches Strahlungsgesetz
2. Photonen
 1. Photoeffekt
 2. Comptoneffekt
3. Quanteneffekte mit Materie
 1. Bohrsches Atommodell
 2. Welleneigenschaften von Materie
 1. Röntgenbeugung
 2. Elektronenbeugung

Einführung: Quanteneffekte



Historische Höhepunkte:

1900	Planck	Einführung der „Hilfsgröße“ h (Wirkungsquantum) Erklärung des Spektrums der Wärmestrahlung	
1905	Einstein	Einführung des Lichtquants (Photon), $E_\gamma = h \nu$ Erklärung des Photoeffekts	
1907	Einstein	Gitterschwingungsquanten (Phononen), $E_{\text{vib}} = h \nu$ Erklärung der spezifischen Wärme der Festkörper	
1913	Bohr	Einführung des Drehimpulsquants , $\hbar = h / (2\pi)$ Erklärung des Wasserstoffspektrums	
1924	de Broglie	Postulat der Welle-Teilchen-Dualität , $p = \hbar k$ Vorhersage von Materiewellen	
1925	Schrödinger Heisenberg	Wellen-Quantenmechanik Matrizen-Quantenmechanik	} Geburt der modernen Quanten(feld)theorie

1.1.1 Wärmestrahlung

Wärmestrahlung = Temperaturabhängige e.m. Strahlung von Körpern

Beispiel: Wärmestrahlung unserer **Sonne**

Beispiel: Kosmische Infrarot-Hintergrundstrahlung vom **Universum**

→ Licht von der Materie/Antimaterie-Vernichtung

→ wurde $3..4 \cdot 10^5$ Jahre nach dem **Urknall** freigesetzt als Kerne und Elektronen neutrale Atome bildeten

Folgerung: Auch durch Vakuum getrennte Körper können sich mittels Austausch von Wärmestrahlung im thermischen Gleichgewicht befinden

1.1.1 Erzeugung und Absorption

Beobachtung: Es gibt zwei Strahlungsklassen

Typ 1: Diskrete Frequenzspektren (Linienpektren)

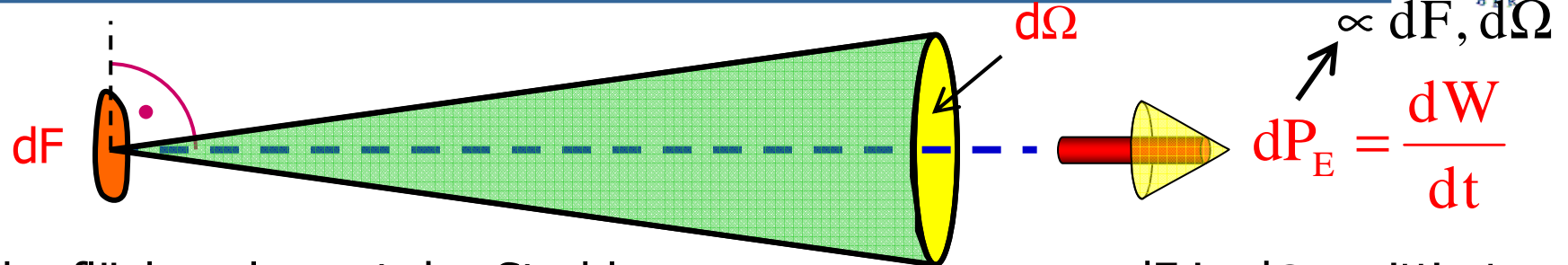
- bei atomaren / molekularen Gasen nicht zu großen Drucks
↔ unabhängige Partikel
- T-unabhängig; Eigenschaft der Atomhüllen-Struktur
→ Bohrsches Atommodell

Typ 2: Kontinuierliche Frequenzspektren

- bei festen / flüssigen Strahlern, Gasen großen Drucks, dichten Plasmen
- in charakteristischer Weise T-abhängig

Beispiele: Glühlampe, Bogenlampe, Metallschmelze, Sonnenplasma

1.1.1 Emissionsvermögen



Oberflächenelement des Strahlers
(Projektion \perp Strahlungsrichtung)

von dF in $d\Omega$ emittierte
Strahlungsleistung

Definition:

Emissionsvermögen:

$$E^* = \frac{dP_E}{dF d\Omega}$$

$$E^* = E^*(T)$$

Strahlungsleistung pro Fläche und Raumwinkel

$$P_E = \text{Geometriefaktor} \times E^*$$

Beobachtung: E^* hängt von der Oberflächenbeschaffenheit ab

schwarze Oberfläche

$\Rightarrow E^*$ groß

spiegelnde / weiße Oberfläche

$\Rightarrow E^*$ klein

1.1.1 Integrales Absorptionsvermögen

$$A = \frac{\int d\omega \left\{ \begin{array}{l} \text{absorbierte Strahlungsleistung} \\ \text{auftreffende Strahlungsleistung} \end{array} \right\}_\omega}{\int d\omega \left\{ \begin{array}{l} \text{absorbierte Strahlungsleistung} \\ \text{auftreffende Strahlungsleistung} \end{array} \right\}_\omega}$$

$$A = A(T)$$

Gedankenexperiment:

unterschiedl. Oberflächen ①, ② \Rightarrow i.a. $P_1 \neq P_2$

2. Hauptsatz (Thermodynamik) \Rightarrow

$$P_1 + (1 - A_1)P_2 = P_2 + (1 - A_2)P_1$$

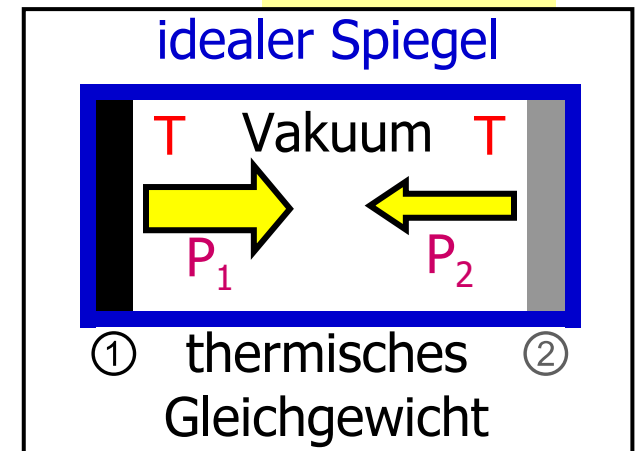
$$\Rightarrow A_1(T)P_2(T) = A_2(T)P_1(T)$$

Geometriefaktor

$$P_2 = k_{\text{geom}} E_2^*, \quad P_1 = k_{\text{geom}} E_1^*$$

unabhängig von Oberfläche

$$\Rightarrow \frac{E_1^*(T)}{A_1(T)} = \frac{E_2^*(T)}{A_2(T)} \equiv K(T)$$



Kirchhoffscher Strahlungssatz:

$$E^*(T) = K(T)A(T)$$

1.1.1 Kirschhoffsches Strahlungssatz



Kirchhoffscher Strahlungssatz: $E^*(T) = K(T)A(T)$

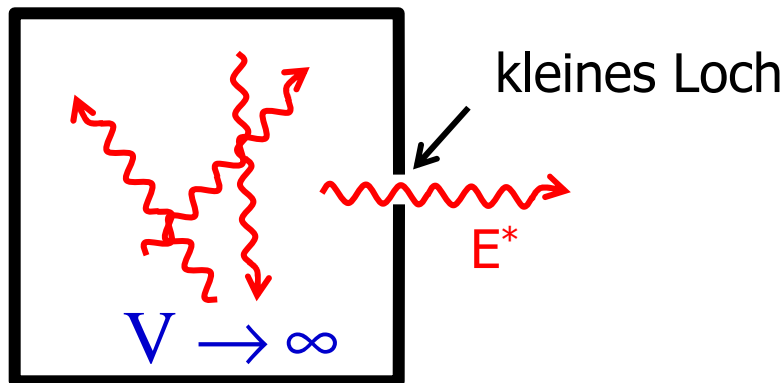
Defintion: Ein Körper heißt ideal schwarz, wenn seine Oberfläche alle elektromagnetische Strahlung vollkommen absorbiert, d.h. $A = 1$.

Folgerung: Ein ideal schwarzer Körper besitzt das größtmögliche Emissionvermögen für thermische Strahlung.

1.1.1 Schwarze Körper

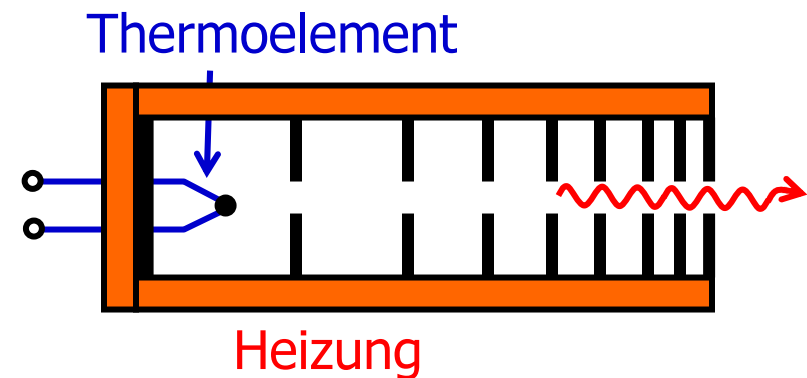
- a) schwarze Oberfläche großer Rauigkeit
→ Vielfachstreuung, allmähliche Absorption, kaum Reflexion
- b) **Hohlraum** mit geschwärzten Innenwänden

Prinzip:



Wandtemperatur T

Praktische Realisierung:



Schwarzkörperstrahlung \equiv Hohlraumstrahlung
→ universelles Emissionsspektrum für gegebene Temperatur

1.1.2 Charakteristische Strahlungsgrößen

Strahlungsfeld = Überlagerung ebener Wellen

$$\vec{E} = \iiint \vec{E}_0(\omega, \theta, \varphi) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} d\omega d\Omega$$

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \begin{pmatrix} \sin\theta \sin\varphi \\ \sin\theta \cos\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

a) **Energiedichte** eines Strahlungsfeldes

$$d\Omega = d\varphi d\cos\theta$$

$$w = \varepsilon_0 \iiint E_0^2 d\omega d\Omega$$

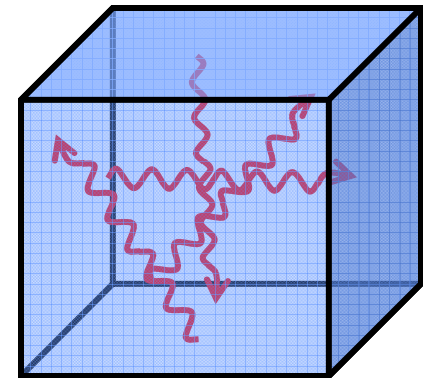
$$[w] = \frac{J}{m^3}$$

Spezialfall: Isotropes Feld

$$E_0 = E_0(\omega)$$

$$w = 4\pi\varepsilon_0 \int E_0^2 d\omega$$

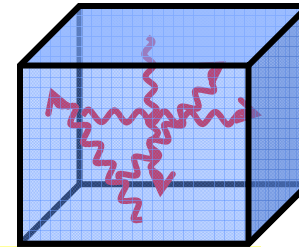
$$\frac{dw}{d\Omega} = \frac{w}{4\pi}$$



1.1.2 Charakteristische Strahlungsgrößen

Spektrale Energiedichten eines Strahlungsfeldes

$$\vec{E} = \iiint \vec{E}_0(\omega, \theta, \varphi) e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} d\omega d\Omega$$



$$w_\nu = \epsilon_0 \iiint E_0^2 \delta\left(\nu - \frac{\omega}{2\pi}\right) d\omega d\Omega = 2\pi \epsilon_0 \iint E_0^2 \Big|_\nu d\Omega \quad [w_\nu] = \frac{J}{m^3 \text{ Hz}}$$

$$w_\lambda = \epsilon_0 \iiint E_0^2 \delta\left(\lambda - \frac{2\pi c}{\omega}\right) d\omega d\Omega = \frac{2\pi c}{\lambda^2} \epsilon_0 \iint E_0^2 \Big|_\lambda d\Omega \quad [w_\lambda] = \frac{J}{m^4}$$

$$w_\lambda \Big|_{\lambda=c/\nu} = \frac{c}{\lambda^2} w_\nu = \frac{\nu^2}{c} w_\nu$$

$$w = \int w_\nu d\nu = \int w_\lambda d\lambda$$

Spezialfall: Isotropes Feld

$$E_0 = E_0(\omega)$$

$$\frac{dw_\nu}{d\Omega} = \frac{w_\nu}{4\pi}$$

$$\frac{dw_\lambda}{d\Omega} = \frac{w_\lambda}{4\pi}$$

1.1.2 Charakteristische Strahlungsgrößen



b) Intensität bzw. **Energieflussdichte** eines Strahlungsfeldes

$$\vec{E} = \iiint \vec{E}_0(\omega, \theta, \varphi) e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} d\omega d\Omega$$

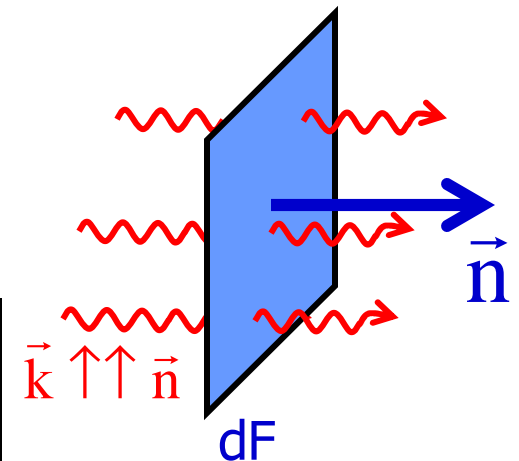
$$I = \int |\vec{S}| d\omega = \int |\vec{E}_0 \times \vec{H}_0| d\omega \quad [I] = \frac{W}{m^2}$$

$$= \epsilon_0 c \int E_0^2 d\omega$$

Spezialfall: Isotropes Feld

$$E_0 = E_0(\omega)$$

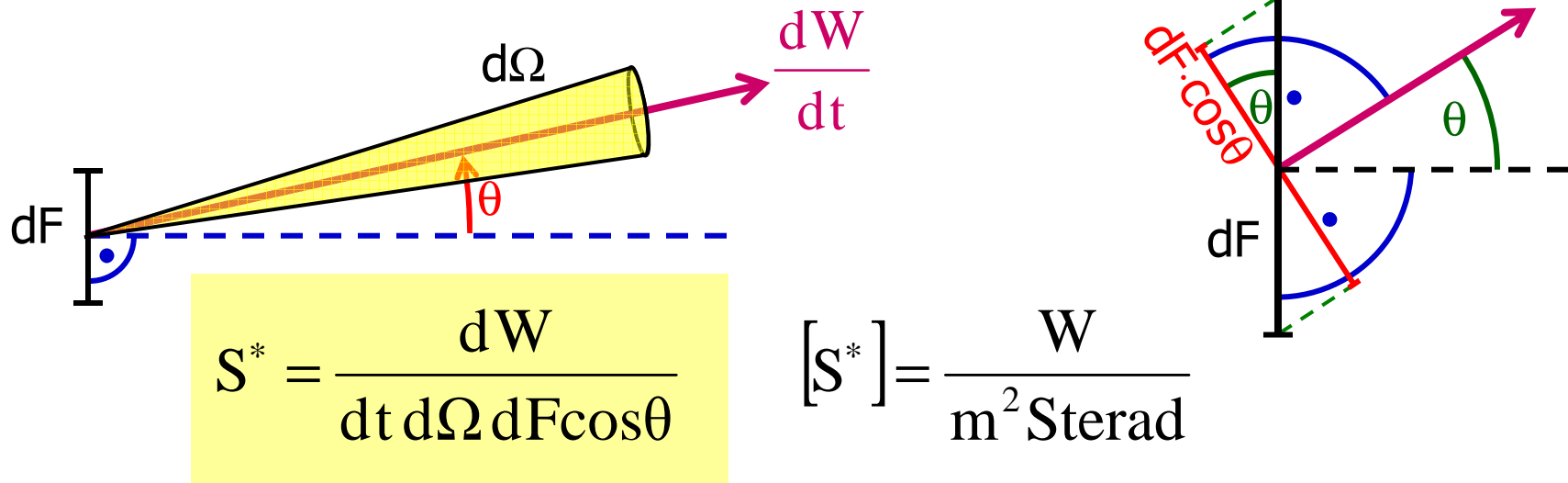
$$W = 4\pi\epsilon_0 \int E_0^2 d\omega \quad \Rightarrow \quad 4\pi I = c W$$



1.1.2 Charakteristische Strahlungsgrößen



c) Messgröße: **Strahlungs-** bzw. **Leuchtdichte** einer Quellfläche



Die **Strahlungsdichte** S^* ist die pro Raumwinkel und projizierter Emissionsfläche in einem weit entfernten Detektor registrierte Leistung

Analog: **Spektrale Strahlungsdichten**

$$S^*_\nu = \frac{dS^*}{d\nu}$$

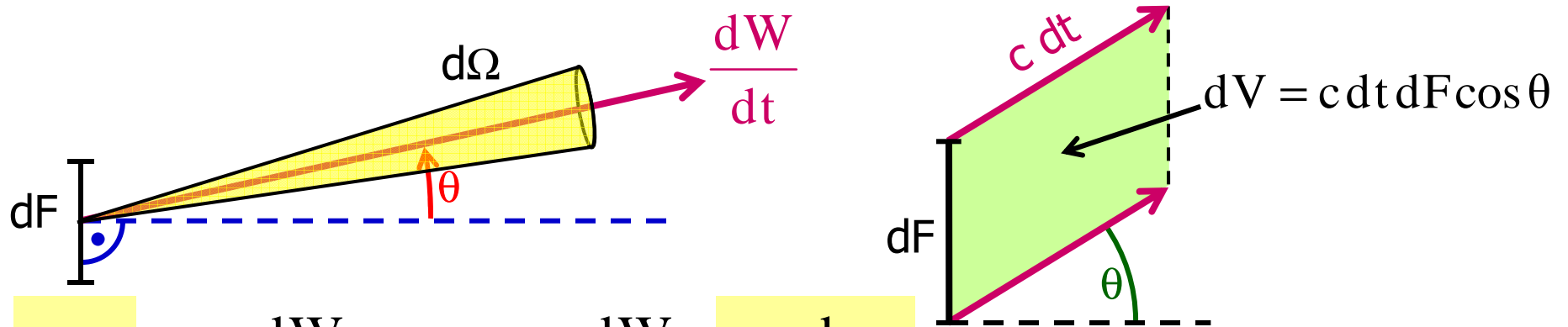
$$S^*_\lambda = \frac{dS^*}{d\lambda}$$

Spezialfall: S^* ist **richtungsunabhängig** → Quellfläche heißt **Lambertstrahler**. Hohlraumöffnungen sind Lambertstrahler!

1.1.2 Charakteristische Strahlungsgrößen



Zusammenhang mit der Energiedichte des Quellfeldes:



$$S^* = \frac{dW}{dt d\Omega dF \cos\theta} = c \frac{dW}{dV d\Omega} = c \frac{dw}{d\Omega}$$

Analog:

$$S_v^* = c \frac{dw_v}{d\Omega}$$

$$S_\lambda^* = c \frac{dw_\lambda}{d\Omega}$$

Isotropes Quellfeld:

$$\frac{dw_{(v,\lambda)}}{d\Omega} = \frac{w_{(v,\lambda)}}{4\pi} \Rightarrow 4\pi S_{(v,\lambda)}^* = w_{(v,\lambda)} c$$

1.1.2 Hohlraumstrahlung

Definition: Der **ideale Hohlraum** hat das Volumen $V \rightarrow \infty$. Die Wände befinden sich im thermischen Gleichgewicht (Temperatur T).

Folgerung 1:

Leistungsbilanz der Wände an jeder Stelle:

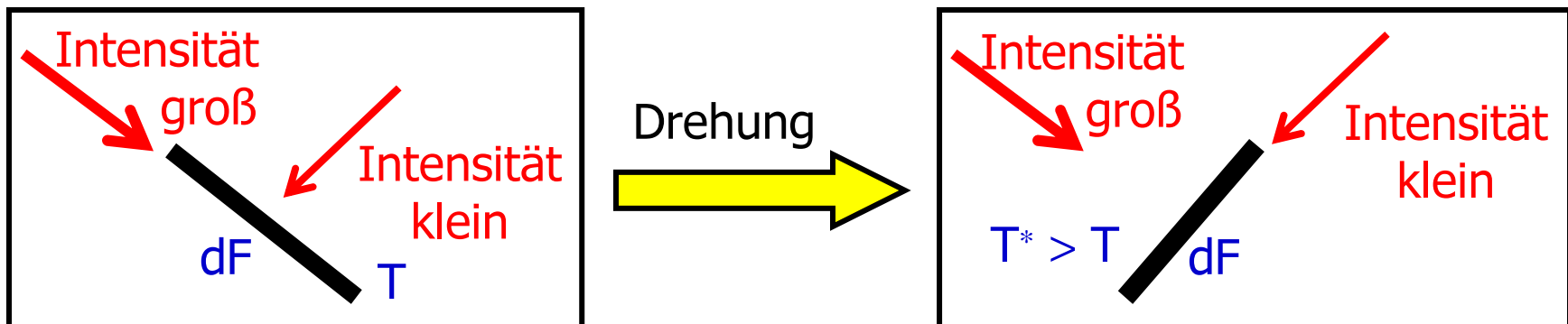
$$\frac{dW_A(v)}{dt} = \frac{dW_E(v)}{dt}$$

absorbiert emittiert

Folgerung 2: Das Strahlungsfeld (**Hohlraumstrahlung**) ist **isotrop**.

Beweis: Betrachte Testscheibe. Therm. Gleichgewicht \Rightarrow Temperatur T .

Angenommen, am Ort der Testscheibe wäre die Strahlung anisotrop:



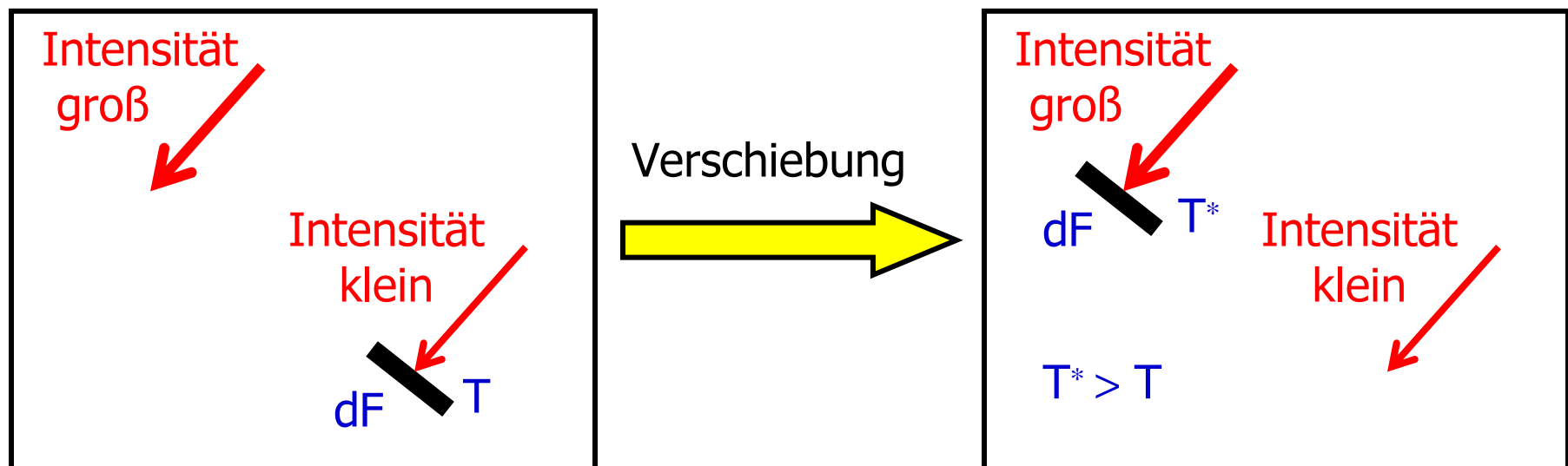
Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik. \square

1.1.2 Hohlraumstrahlung



Folgerung 3: Das Strahlungsfeld (Hohlraumstrahlung) ist auch **homogen**.

Beweis: Betrachte Testscheibe. Therm. Gleichgewicht \Rightarrow Temperatur T .
Angenommen, es gäbe 2 Orte mit unterschiedlicher Strahlungsintensität:



Widerspruch zum 2. Hauptsatz der Thermodynamik. \square

1.1.2 Hohlraumstrahlung

Folgerung 4:

Leistungsbilanz der Testscheibe an jedem Ort in jeder Orientierung

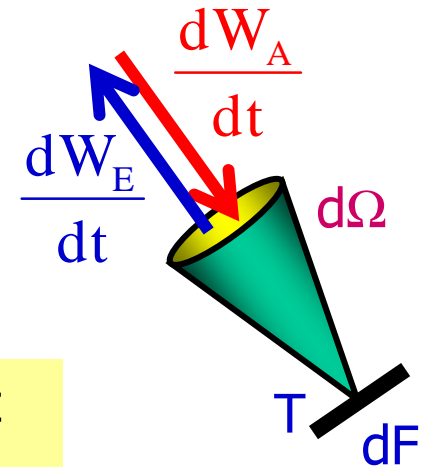
$$\frac{dW_A}{dt} = A_v S_v^* dF d\Omega dv$$

$$\frac{dW_E}{dt} = E_v^* dF d\Omega dv$$

$$\frac{dW_A}{dt} = \frac{dW_E}{dt} \Rightarrow$$

Kirchhoffsches Strahlungsgesetz

$$E_v^* = S_v^* A_v$$



⇒ Thermische Emission und Absorption eines Körpers der Temperatur T sind über die Strahlungsdichte der zugehörigen Hohlraumstrahlung verknüpft:

$$K_v(T) = S_v^*$$

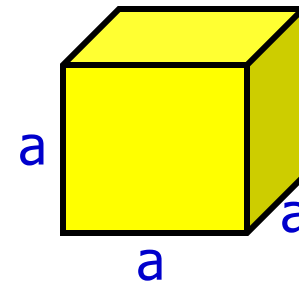
1.1.2 Hohlraumstrahlung

Folgerung 5: **Spektrale Modendichte** der Hohlraumstrahlung

Wandgeometrie und Beschaffenheit beliebig ($V \rightarrow \infty$)

\Rightarrow verwende o.B.d.A. **ideal leitenden Würfel**, **Kantenlänge** $a \rightarrow \infty$

Kubischer Hohlraumresonator



Physik III \Rightarrow **Eigenfrequenzen** der stehenden Wellen (**Moden**)

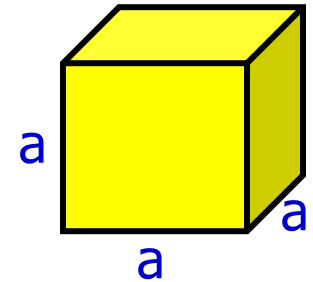
$$v_{nmj} = \frac{c}{2a} \sqrt{n^2 + m^2 + j^2}, \quad (n, m, j) \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \{0,0,0\}$$

Beachte: Es gibt 2 **Polarisationen** pro Mode

1.1.2 Hohlraumstrahlung

Spektrale Modendichte der Hohlraumstrahlung

$$v_{nmj} = \frac{c}{2a} \sqrt{n^2 + m^2 + j^2}, \quad (n, m, j) \in \mathbb{N}_0^3 \setminus \{0,0,0\}$$



Modendichte $N(v) \equiv$ Zahl der Moden in $[0, v]$ pro Volumen

Polarisierungen

$$N(v) = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^3} \sum_{\substack{n,m,j \\ v_{nmj} \leq v}} 1 = 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^3} \iiint_{v_{nmj} \leq v} dn \, dm \, dj$$

$\vec{r} = (n, m, j)$

$$= 2 \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{a^3} \underbrace{\iiint_{n,m,j \geq 0} d\Omega}_{\frac{4\pi}{8}} \underbrace{\int_0^{\frac{2a}{c}v} r^2 dr}_{\frac{1}{3} \left(\frac{2a}{c}v \right)^3}$$

$$N(v) = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{v}{c} \right)^3$$

Spektrale Modendichte

$$n(v) = \frac{dN}{dv} = \frac{8\pi}{c^3} v^2$$

1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz

Spektrale Modendichte der Hohlraumstrahlung: $n(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2$

Mittlere Energie der Moden: $\overline{W}_\nu(T)$

$$w_\nu(T) = n(\nu) \overline{W}_\nu(T)$$

Spektrale Energiedichte der Hohlraumstrahlung:

Klassisches Modell: W_ν folgt Boltzmann-Verteilungsgesetz

$$\rho_\nu(W_\nu) = \frac{1}{kT} \exp\left(-\frac{W_\nu}{kT}\right) \quad \text{mit} \quad k \equiv k_B \quad \text{und} \quad 0 < W_\nu < \infty$$

$$\Rightarrow \overline{W}_\nu(T) = \int_0^\infty \rho_\nu(W_\nu) W_\nu dW_\nu = \frac{1}{kT} \int_0^\infty W_\nu \exp\left(-\frac{W_\nu}{kT}\right) dW_\nu = kT$$

Rayleigh-Jeansches Strahlungsgesetz

$$w_\nu(T) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} kT \quad \Rightarrow \quad S_\nu^* = \frac{w_\nu c}{4\pi} = \frac{2\nu^2}{c^2} kT$$

Experiment \rightarrow nur OK für $\nu \rightarrow 0$ (z.B. Infrarot, $T = 5000$ K) ☹️

Ultraviolett-Katastrophe: $w_\nu(T) \propto \nu^2 \Rightarrow w(T) = \int w_\nu(T) d\nu = \infty$ ☹️

1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz



Plancksche Hypothese: Jede Mode ist an quantisierte harmonische Schwingungen der Wandatome gekoppelt: $W_\nu = n h \nu$ $n \in \mathbb{N}$

„Hilfsgröße“ h : Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Das Energiequantum $h\nu$ wird von dem Feldquant des elektromagnetischen Feldes, dem Photon, getragen. Die Energie $W_\nu = n h \nu$ entspricht der Energie von n Photonen der Frequenz ν im Hohlraum.

Postulat: „Besetzungszahlen“ $n(\nu)$ folgen aus der klassischen Statistik

Boltzmannsches Verteilungsgesetz $\Rightarrow p_\nu(W_\nu) \propto \exp\left(-\frac{W_\nu}{kT}\right) = \exp\left(-n \frac{h\nu}{kT}\right)$

Normierte Wahrscheinlichkeitsverteilung für n :

$$p_\nu(n) = \frac{e^{-n h \nu \beta}}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-j h \nu \beta}} \quad \text{mit} \quad \beta \equiv \frac{1}{kT}$$

1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz



$$W_\nu(T) = nh\nu \quad p_\nu(n) = \frac{e^{-nh\nu\beta}}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-jh\nu\beta}} \quad \beta \equiv \frac{1}{kT}$$

Also:

$$\bar{W}_\nu(T) = \sum_{n=0}^{\infty} p_\nu(n) W_\nu(T) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\beta}}{\sum_{j=0}^{\infty} e^{-jh\nu\beta}} = \frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}} h\nu e^{-h\nu\beta}$$

geometrische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} nh\nu e^{-nh\nu\beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nh\nu\beta} = -\frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{1 - e^{-h\nu\beta}} = \frac{h\nu e^{-h\nu\beta}}{(1 - e^{-h\nu\beta})^2}$$

$$\Rightarrow \bar{W}_\nu(T) = \frac{h\nu e^{-h\nu\beta}}{1 - e^{-h\nu\beta}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu\beta} - 1}$$

1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz



$$\overline{W}_\nu(T) = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad n(\nu) = \frac{dN}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \quad W_\nu(T) = n(\nu) \overline{W}_\nu(T)$$

Plancksches Strahlungsgesetz

$$W_\nu(T) = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$S_\nu^* = \frac{c}{4\pi} W_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

$$S_\lambda^* = \frac{\nu^2}{c} S_\nu^* = \frac{2h\nu^5}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Vorhersage von Form und Normierung des thermischen Spektrums

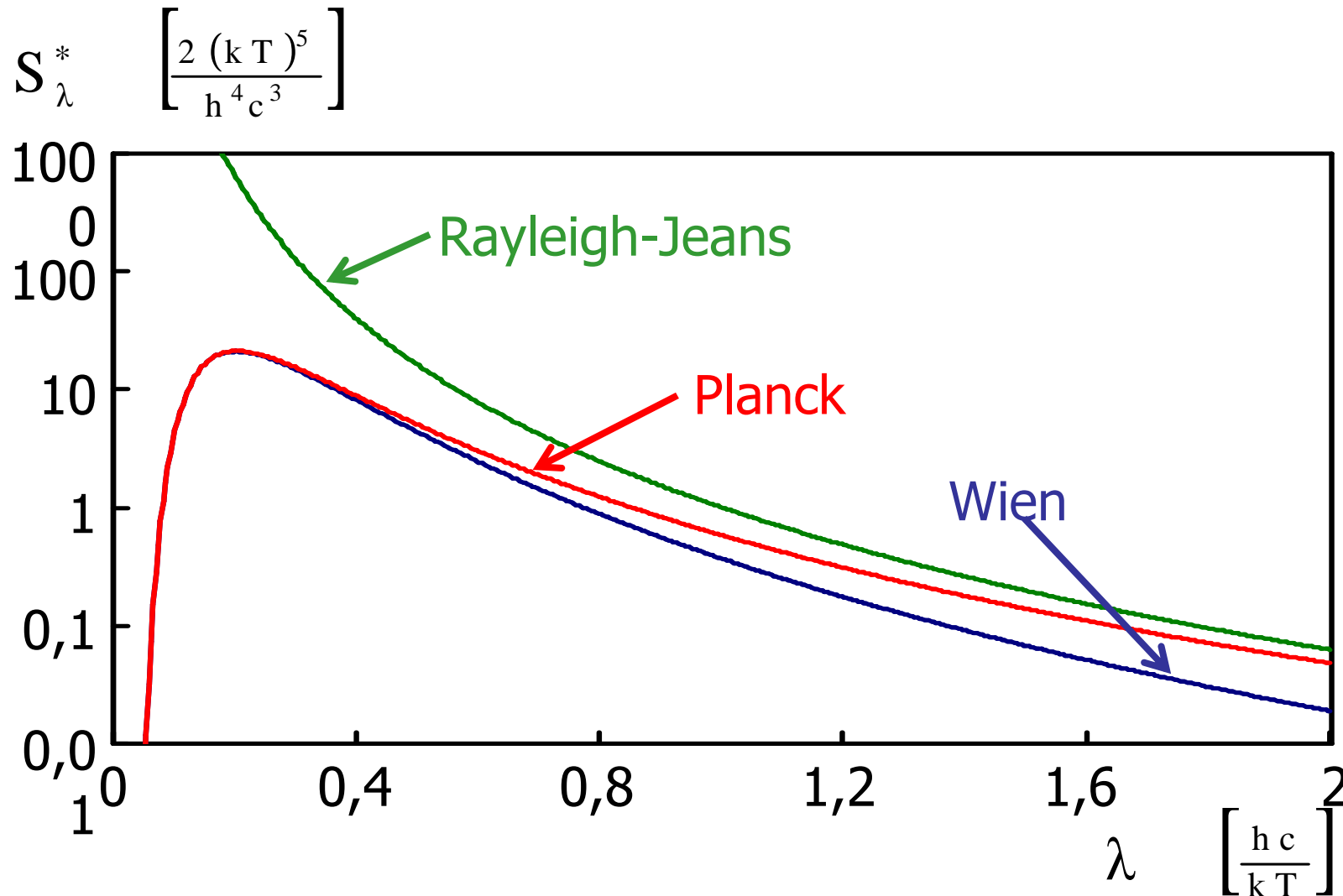
Infrarot-Grenze: $h\nu \ll kT \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT} \Rightarrow W_\nu(T) \approx \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$
 (klassischer Grenzfall „ $h \rightarrow 0$ “)

Rayleigh-Jeans-Gesetz

Ultraviolett-Grenze: $h\nu \gg kT \Rightarrow e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \approx e^{\frac{h\nu}{kT}} \Rightarrow W_\nu(T) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \nu^3 e^{-\frac{h\nu}{kT}}$

Wiensches Strahlungsgesetz

1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz



Planck'sche Strahlungsgesetz



Position des Maximums:

$$S_{\lambda}^* = \frac{2 h \nu^5}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h \nu}{k T}} - 1}$$

$$S_{\lambda}^* = \text{Max} \Leftrightarrow \ln S_{\lambda}^* = \text{Max}$$

Abkürzung: $x = \frac{h \nu}{k T}$

$$\ln S_{\lambda}^* = \text{const.} + 5 \ln x - \ln(e^x - 1)$$

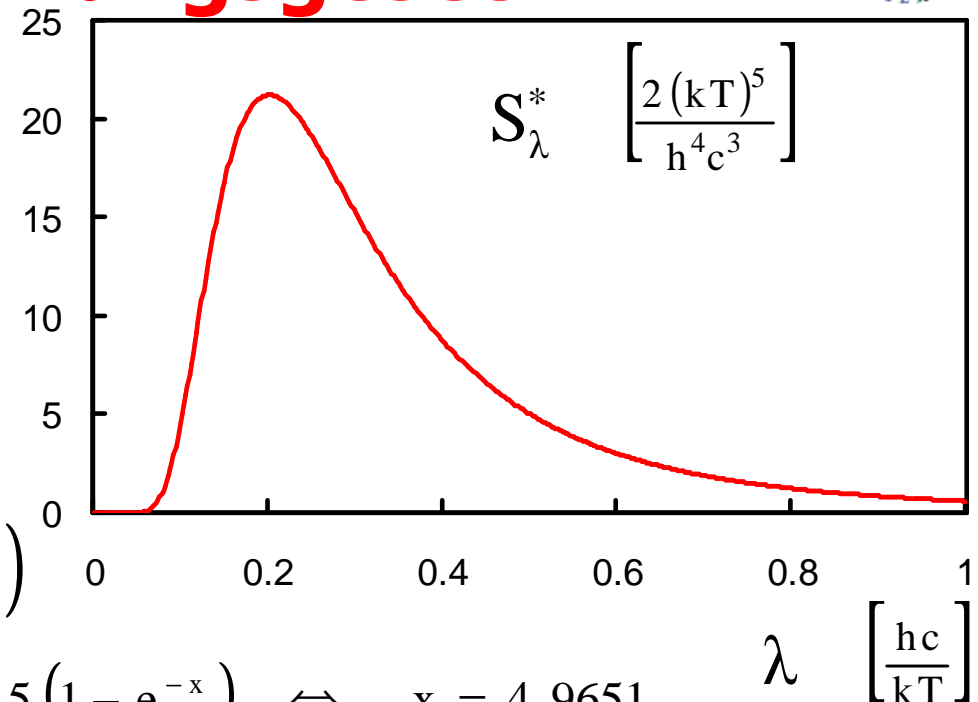
$$0 \stackrel{!}{=} \frac{d}{d\lambda} \ln S_{\lambda}^* = \left(\frac{5}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} \right) \frac{dx}{d\lambda} \Leftrightarrow x = 5(1 - e^{-x}) \Leftrightarrow x = 4,9651 \dots$$

$$\nu_{\text{max}} = 4,9651 \frac{kT}{h} = 103 \text{ GHz} \cdot T[\text{K}]$$

$$\lambda_{\text{max}} = 0,2014 \frac{hc}{kT} = \frac{2,898 \text{ mm}}{T[\text{K}]}$$

Wiensches Verschiebungsgesetz

$$T \lambda_{\text{max}} = 2,898 \text{ mm K} = \text{const.}$$



1.1.3 Planck'sches Strahlungsgesetz

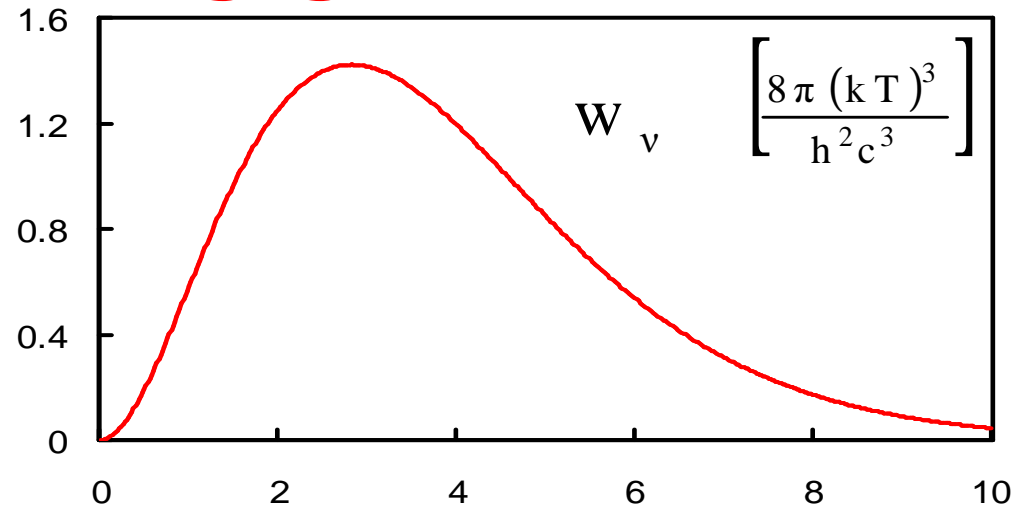


Gesamte Energiedichte:

$$w_v(T) = \frac{8\pi h v^3}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

Abkürzung: $x = \frac{h\nu}{kT}$

$$w_v dv = \frac{8\pi h}{c^3} \left(\frac{kT}{h}\right)^3 x^3 \frac{1}{e^x - 1} \frac{kT}{h} dx$$



$$w = \frac{8\pi(kT)^4}{(hc)^3} \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{8\pi^5}{15h^3 c^3} (kT)^4$$

$\underbrace{\int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx}_{\frac{1}{15} \pi^4}$

$$S^* = \frac{c}{4\pi} w = \frac{2\pi^4}{15h^3 c^2} (kT)^4$$

Leistungsabgabe von Lambertstrahler (Fläche ΔF) in Halbraum: $\pi S^* \Delta F$

Stefan-Boltzmann-Gesetz

$$\frac{dW}{dt} = \sigma \Delta F T^4, \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15 h^3 c^2} = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

Stefan-Boltzmann-Konstante

1.1. Anmerkung: Quantenmechanik



- Experimentelle Messung des Hohlraumspektrums
 - Bestätigung der Planckschen Theorie
 - Messung von h durch Anpassung der Planck-Formel an gemessene Spektren

$$S_{\lambda}^* = \frac{2h\nu^5}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

- Interpretation der Photonen als Korpuskeln mit Wellennatur (?)

- Energie: $E_{\gamma} = h\nu = \hbar\omega$

- Impuls: $|\vec{p}_{\gamma}| \stackrel{\uparrow}{=} \frac{1}{c} E = \frac{1}{c} h\nu = \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{2\pi} |\vec{k}| = \hbar |\vec{k}|$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$v_{\gamma} = c, m_{\gamma} = 0$$

- Vorgriff: De Broglies Geniestreich → Gilt das vielleicht auch für Korpuskeln (Elektronen, Protonen, Viren, Katzen, ...), die dann auch Wellennatur haben?

Postulat:

$$E = \hbar \omega$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$