

2. Welle-Teilchen Dualismus



1. De-Broglie-Wellenlänge
2. Die Wellenfunktion
3. Heissenbergsche Unschärfe-Relation
4. Schrödingergleichung
5. Erwartungswerte und Observablen
6. Potentiale
7. Tunneleffekt

2.1. De Broglie Wellenlängen



Simulationen: <http://vqm.uni-graz.at/>

Photonen: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$...sind e.m.-Wellen $(\omega, \vec{k}) \Rightarrow \omega = c|\vec{k}|$
 $E = \hbar \omega$...und masselose Teilchen $(E, \vec{p}) \Rightarrow E = c|\vec{p}|$

Hypothese: (de-Broglie 1924, Nobelpreis 1929)

Umgekehrt haben auch „Teilchen“ (Elektronen, Atome, Kristalle, Katzen, ...) Wellencharakter mit $\vec{k} = \frac{1}{\hbar} \vec{p}$ $\omega = \frac{1}{\hbar} E$

Nichtrelativistische „Teilchen“ der Masse m:

de-Broglie-Wellenlänge

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{h^2}{2m} \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}}$$

2.1. Elektronenbeugung

$$m_e c^2 = 511 \text{ keV}$$

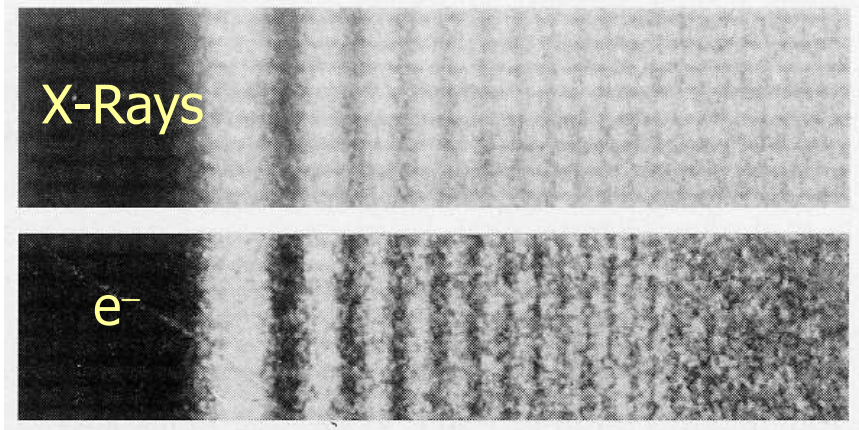
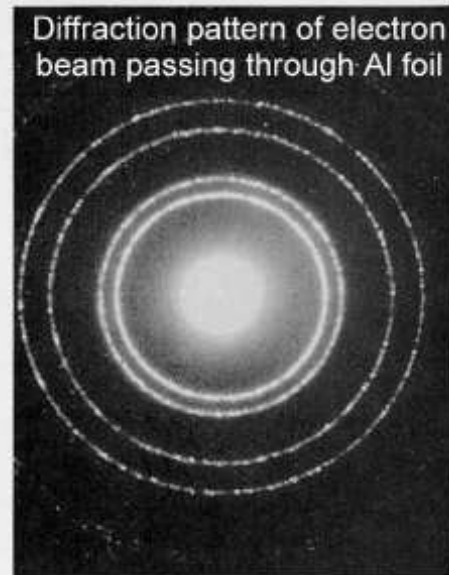
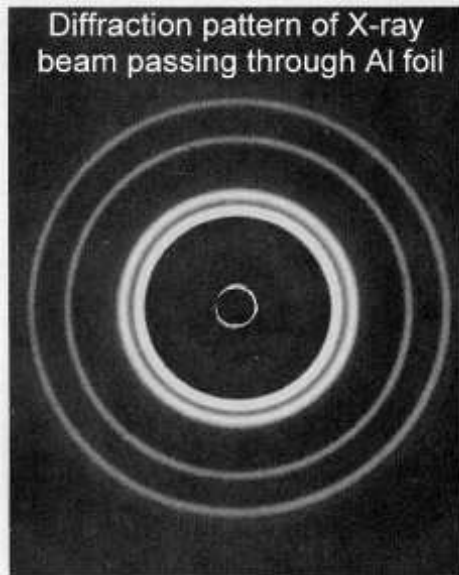
Beschleunigungsspannung:

$$U \ll 511 \text{ kV}$$

$$E = eU \Rightarrow \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m_e eU}} = \frac{1,22 \text{ nm}}{\sqrt{U/V}}$$

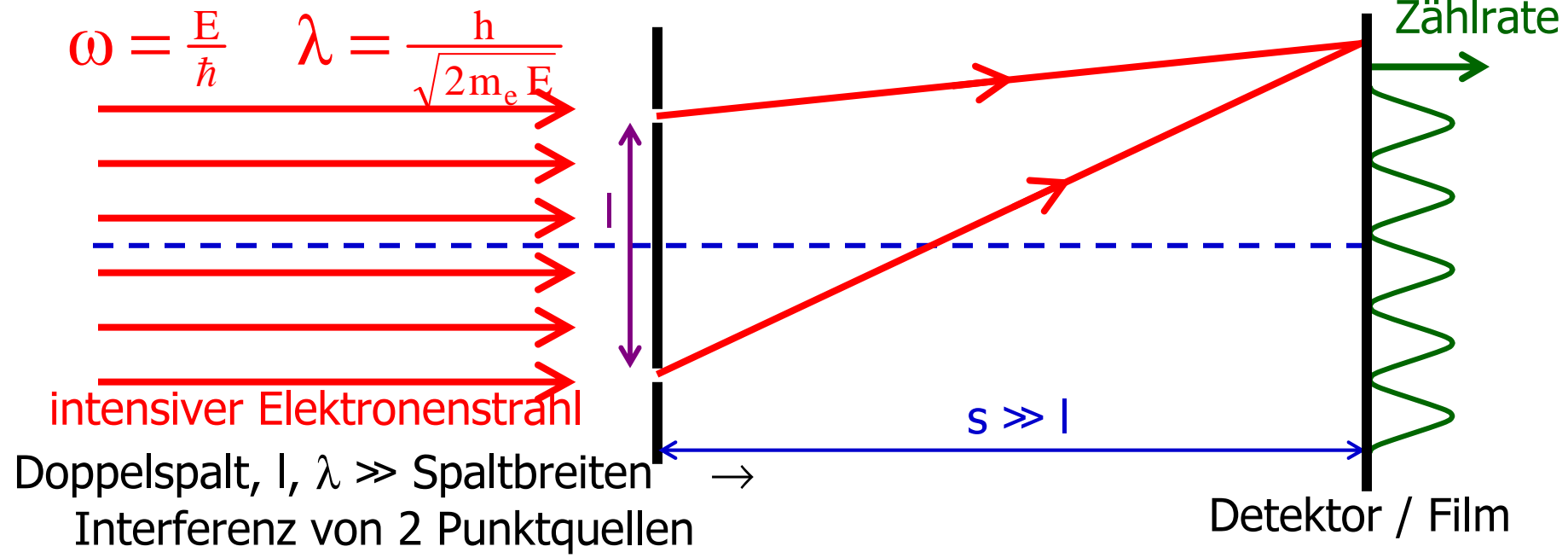
$U = 100 \text{ V} \Rightarrow \lambda = 0,12 \text{ nm}$
 Gitterkonstanten $\approx (0,3 \dots 0,7) \text{ nm}$

} Kristallbeugung ist möglich
 (Experiment: Davisson, Germer 1926, Nobelpreis 1937)



Kantenbeugung am MgO-Einkristall

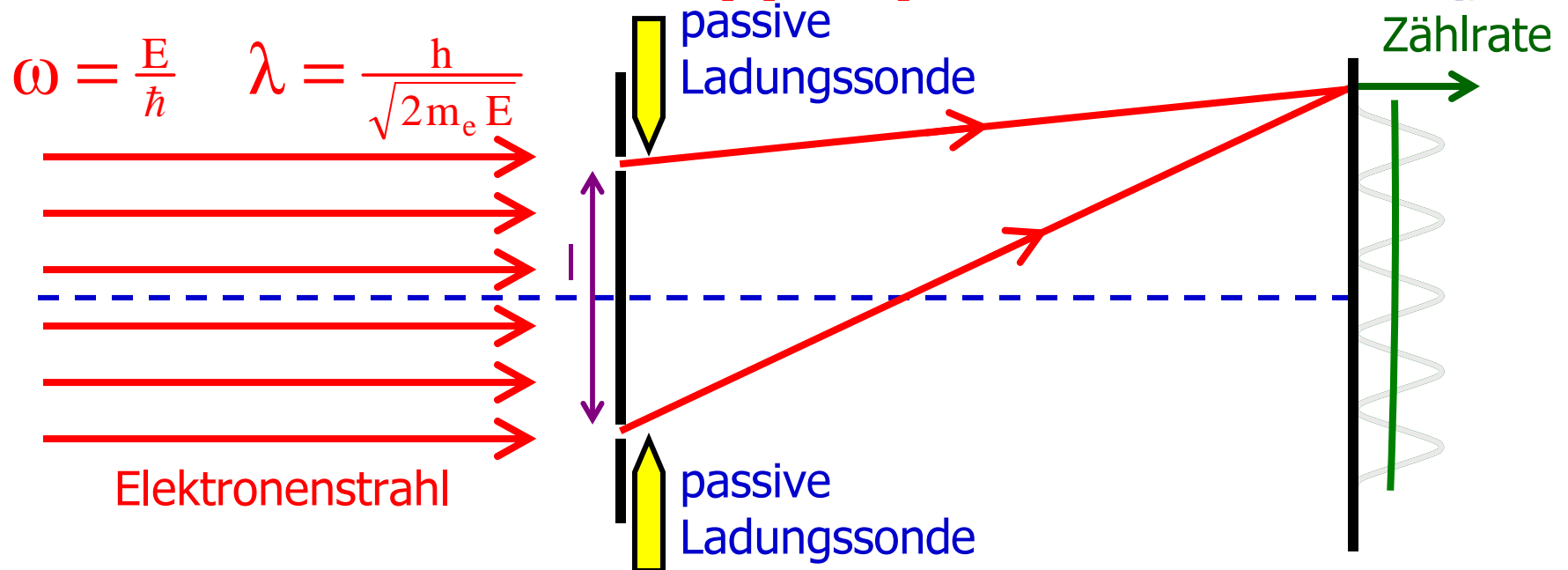
2.1. Elektronenbeugung am Doppelspalt



Exp.: Schwacher Elektronenstrahl \rightarrow Auftreffen von **Einzel**elektronen

Folgerung: Einzelne Elektronen interferieren mit sich selbst!

2.1. Elektronenbeugung am Doppelspalt



⇒ Elektronen nehmen jeden möglichen Weg gleichzeitig?

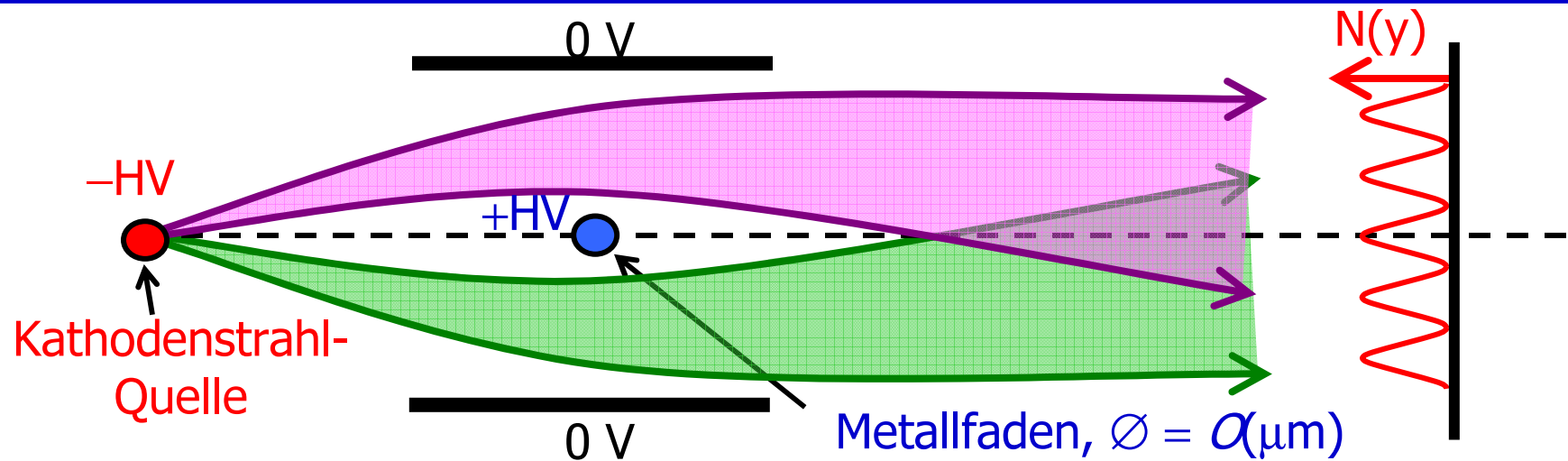
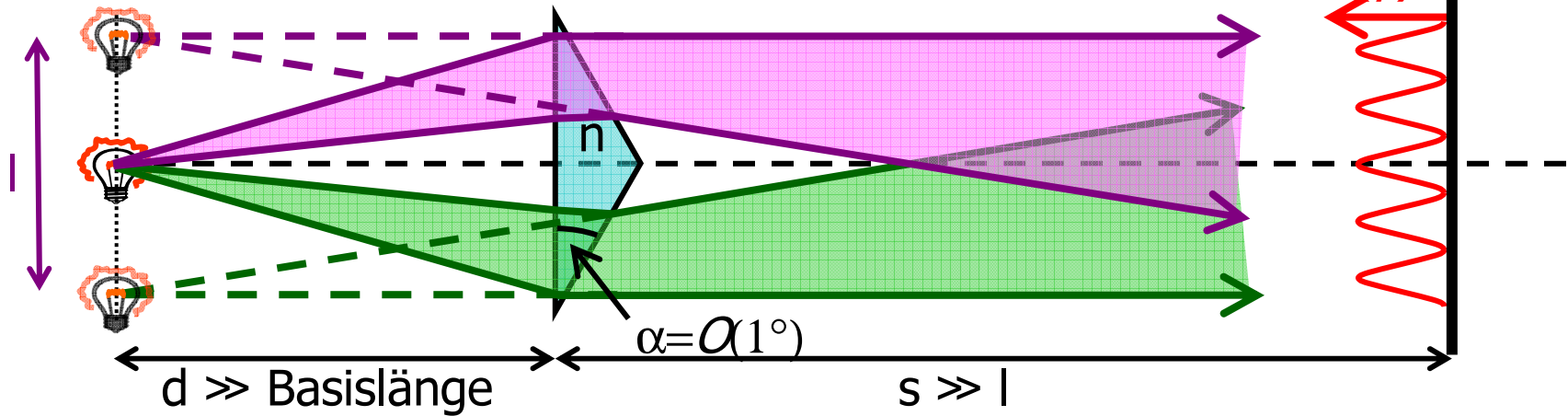
Experiment: Detektiere den Weg jedes Elektrons mit passiven Sonden.

Beobachtung: Das Zweistrahl-Interferenzmuster verschwindet, sobald die Sonden aktiviert werden.

Durch die („passive“) Messung wurde die quantenmechanische „Kohärenz“ zerstört. **Jede Messung ändert das gemessene System!**

2.1. Doppelspaltexperiment (Dübner / Möllenstedt)

optisches Analogon: Fresnelsches Biprisma



2.2. Wellenfunktionen

Einfachster Fall: Die Bewegung einer Punktmasse m wird durch deren komplexe **Wellenfunktion** $\psi(\vec{r}, t)$ beschrieben.

Physikalische Bedeutung:

$|\psi(\vec{r}, t)|^2 =$ Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte am Ort \vec{r} zur Zeit t

$|\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r =$ Aufenthaltswahrscheinlichkeit im Volumen d^3r um \vec{r} zur Zeit t

Bewegungsgleichung im Potential V :

Schrödingergleichung:
$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi \quad (\rightarrow \text{lineare Dgl.})$$

(Schrödinger 1926, Nobelpreis 1933)

2.2. Wellenfunktionen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

Lösung für freie Teilchen ($V = 0$):

Wellenpaket

(= Superposition ebener Wellen)

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \tilde{C}(\vec{k}) e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} d^3k \equiv \int \tilde{\psi}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}}$$

mit nichtlinearer Dispersionsrelation:

$$\omega = \omega(\vec{k}) = \frac{\hbar}{2m} k^2$$

de Broglies Ansatz: $\vec{p} = \hbar \vec{k}$, $E = \hbar \omega$

$$\Rightarrow E = \hbar \frac{\hbar k^2}{2m} = \frac{(\hbar \vec{k})^2}{2m} = \frac{\vec{p}^2}{2m} = \frac{1}{2} m v^2 \quad \checkmark$$

2.2. Orts- und Impulsraum



Ortsraum:

Impulsraum:

$$\psi(\vec{r}, t) = \int \tilde{\psi}(\vec{k}, t) e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2}} \longleftrightarrow \tilde{\psi}(\vec{k}, t) = \int \psi(\vec{r}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} \frac{d^3r}{(2\pi)^{3/2}}$$

Wahrscheinlichkeitserhaltung:

Wahrscheinlichkeitsdichte:

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2$$

Wahrscheinlichkeitsflussdichte:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2mi} \left(\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^* \right) = \frac{\hbar}{m} \rho \vec{\nabla} \arg \psi$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

2.2. Klassischer Grenzfall

Klassischer Grenzfall ($\hbar \rightarrow 0$):

klassischer Messwert \triangleq „Erwartungswert“

Ort: $\langle \vec{r} \rangle = \int \vec{r} |\psi|^2 d^3 r$

Impuls: $\langle \vec{p} \rangle = \langle \hbar \vec{k} \rangle = \int \hbar \vec{k} |\tilde{\psi}|^2 d^3 k = \int \psi^* \underbrace{\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}}_{\text{Impulsoperator}} \psi d^3 r$

Impulsoperator $\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$

(hermitescher) Messoperator \hat{O} : $\langle \hat{O} \rangle = \int \psi^* \hat{O} \psi d^3 r$

Quantenmechanische Unschärfe der Messgröße \hat{O} :

Standardabweichung (vgl. Praktikum)

$$\Delta O = \sqrt{\langle \hat{O}^2 \rangle - \langle \hat{O} \rangle^2}$$

2.3. Unschärferelation

(Heisenberg 1927, Nobelpreis 1932)



→ Gilt für alle über Fouriertransformationen verknüpfte Messgrößen

Beispiel: Orts / Impuls-Unschärfe

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta y \Delta p_y \geq \frac{\hbar}{2} \quad \Delta z \Delta p_z \geq \frac{\hbar}{2}$$

(Gleichheit gilt für spezielle gaußförmige Wellenpakete)

Spezialfall: Energie / Zeit-Unschärfe

$$\Delta t \Delta E \geq \frac{\hbar}{2}$$

Anwendung: Lebensdauer τ angeregter Zustände, radioaktiver Kerne, ...

$$N(t) = N_0 e^{-t/\tau} \Rightarrow \text{natürliche Linienbreite:} \quad \Gamma = \Delta E = \hbar \Delta \omega = \frac{\hbar}{\tau}$$

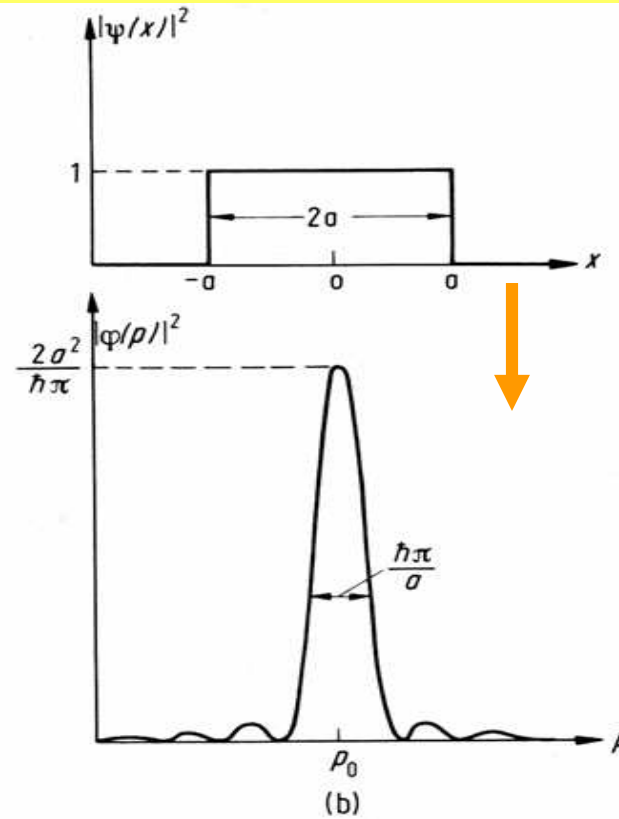
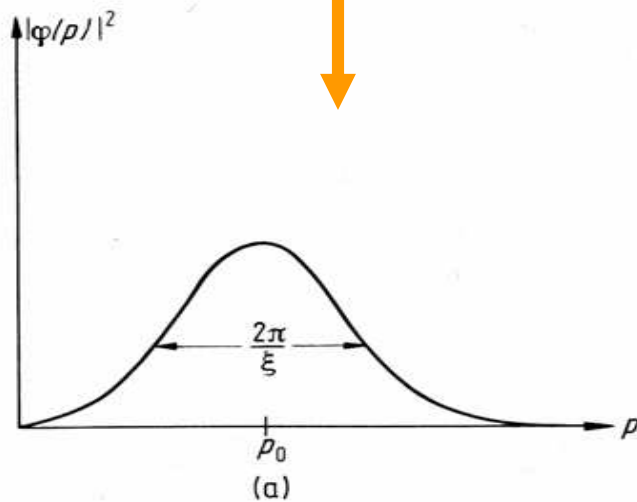
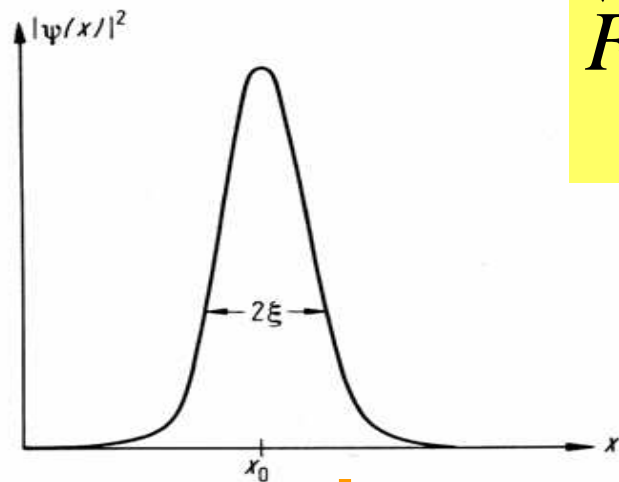
$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \Delta t = \tau \end{array}$$

$$\Delta E \Delta t = \Gamma \cdot \tau = \hbar > \frac{\hbar}{2}$$

2.2. Fourier-Transformation



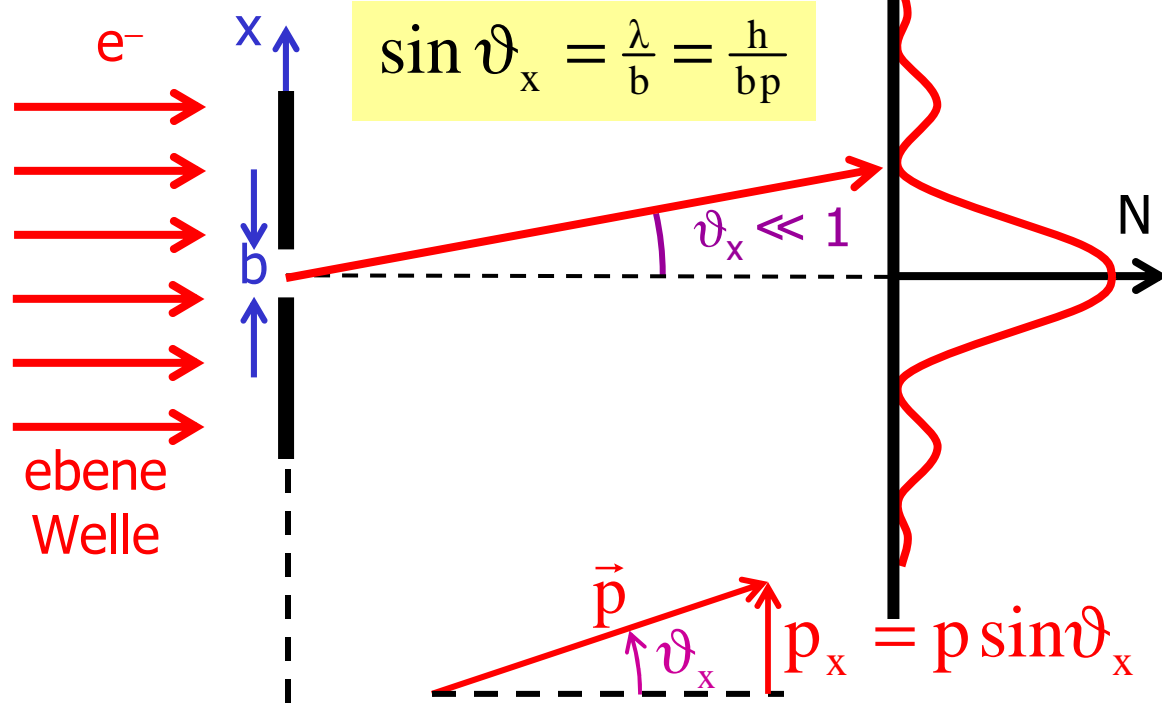
$$\tilde{F}(f)(t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-it \cdot x} dx$$



2.3. Unschärferelation

Experiment:

Elektronen-
beugung
am Spalt



ebene
Welle

$$p_x = 0 \quad \Delta p_x = 0$$

$$\Delta x = \infty$$

x völlig unbestimmt

$$\Delta p_x \approx 2p \sin \vartheta_x = 2 \frac{h}{b}$$

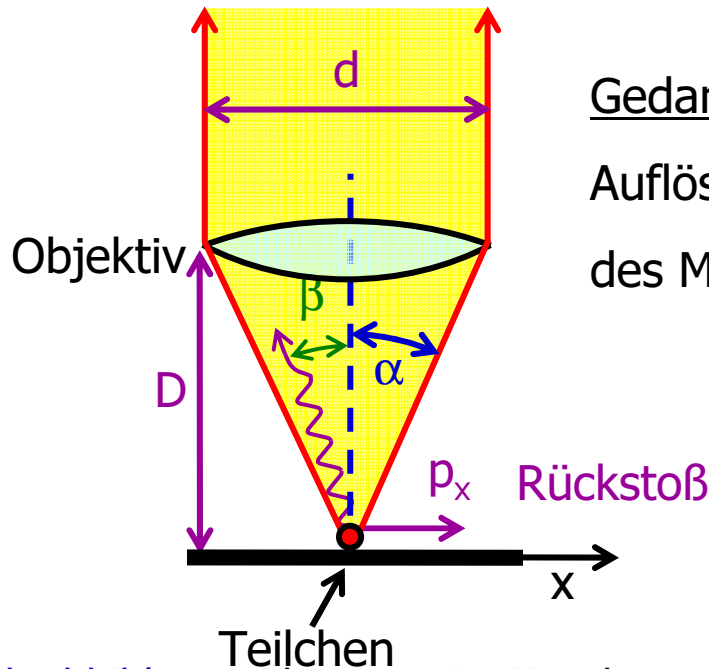
$$\Delta x \approx b$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx 2h = 4\pi\hbar$$

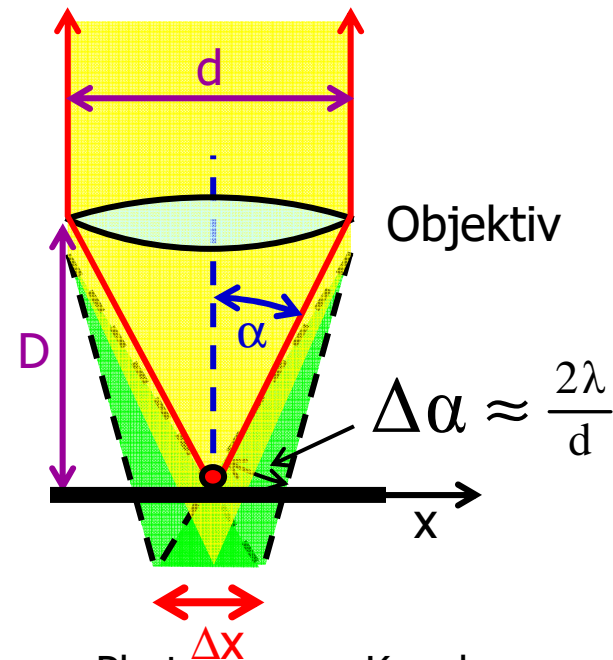
2.3. Unschärferelation

Punktabbildg. durchs Okular/Auge

Punktabbildg. durchs Okular/Auge



Gedankenexperiment:
Auflösungsgrenze
des Mikroskops



Punktabbildg. \Rightarrow Photonen im Kegel
 $-\alpha \leq \beta \leq \alpha$ ununterscheidbar

Beugung \Rightarrow Photonen aus Kegel
 $\Delta\alpha$ ununterscheidbar

$$\Delta \beta \approx 2 \alpha \approx \frac{d}{D}, \quad \Delta p_x \approx \Delta (p_y \beta) \approx \frac{h}{\lambda} \frac{d}{D}$$

$$\Delta x \approx D \Delta \alpha \approx 2 \lambda \frac{D}{d}$$

$$\Delta x \Delta p_x \approx 2 h = 4 \pi \hbar$$

λ kleiner \Rightarrow

{ bessere Ortsauflösung
größere Impulsverschmierung

2.4. Schrödinger-Gleichung

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi$$

Betrachte stationäre Potentiale: $V = V(\vec{r})$ (zunächst 1-dimensional)

Ansatz: $\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{=} \hbar\omega \cdot$ mit $E = \hbar\omega$

Stationäre Schrödingergleichung

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi + V \psi = E \psi$$

Operator der
kinetischen Energie

potentielle
Energie

Gesamtenergie

Lösung (\rightarrow Theorie) \Rightarrow $\left\{ \begin{array}{l} \text{Eigenzustände mit fester (erhaltener) Energie} \\ \text{Spektrum der zugehörigen Energieeigenwerte} \end{array} \right.$