2.6. Potentialkästen

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + V\psi$$

Betrachte stationäre Potentiale: $V = V(\vec{r})$ (zunächst 1-dimensional)

Ansatz: $\psi(\vec{r},t) = \psi(\vec{r}) \cdot e^{-i\omega t} \quad \Rightarrow \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathrel{\hat{=}} \hbar\omega \cdot$ mit $E = \hbar\omega$

Stationäre Schrödingergleichung

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta}_{\text{Operator der kinetischen Energie}}\psi + V\psi = E\psi$$

potentielle Energie

Gesamtenergie

Lösung ($\rightarrow$ Theorie) $\Rightarrow$ $\begin{cases} \text{Eigenzustände mit fester (erhaltener) Energie} \\ \text{Spektrum der zugehörigen Energieeigenwerte} \end{cases}$

Hier: Anschauliche Darstellung und Computersimulationen

2.6. Potentialtopf

Randbedingung: $\psi(0) = \psi(a) = 0$

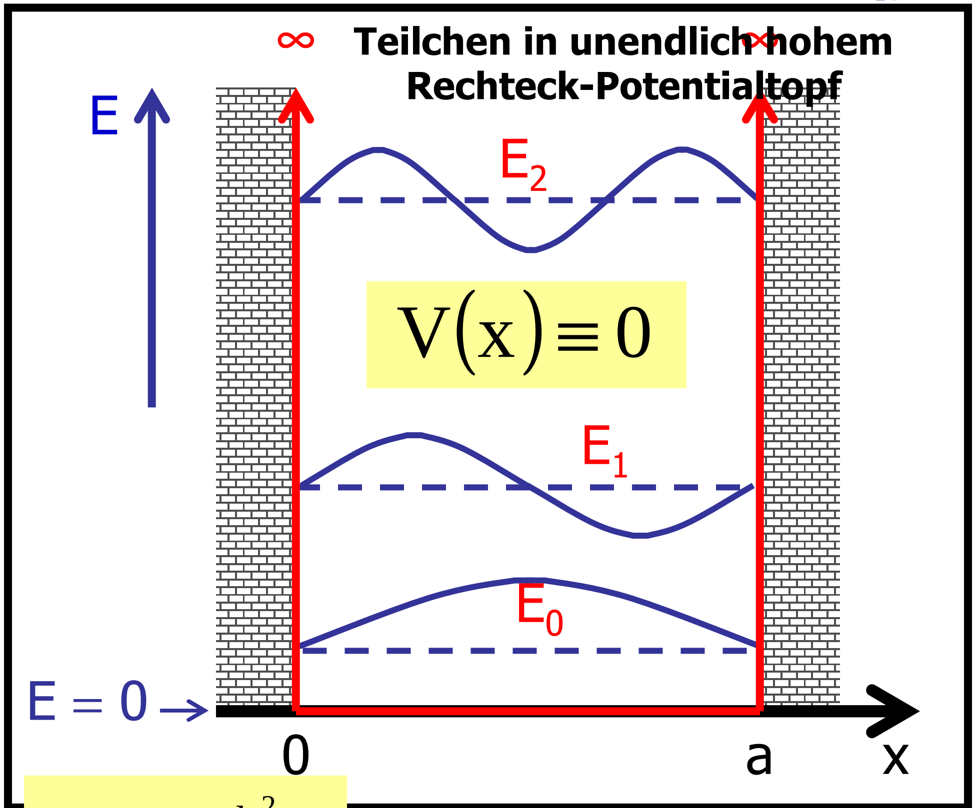
Déjà vu: wie schwingende Saite

$\Rightarrow$ sinusförmige Eigenmoden, quantisierte Frequenzen

$$a = (n+1)\tfrac{\lambda_n}{2} = (n+1)\tfrac{\pi}{k_n}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

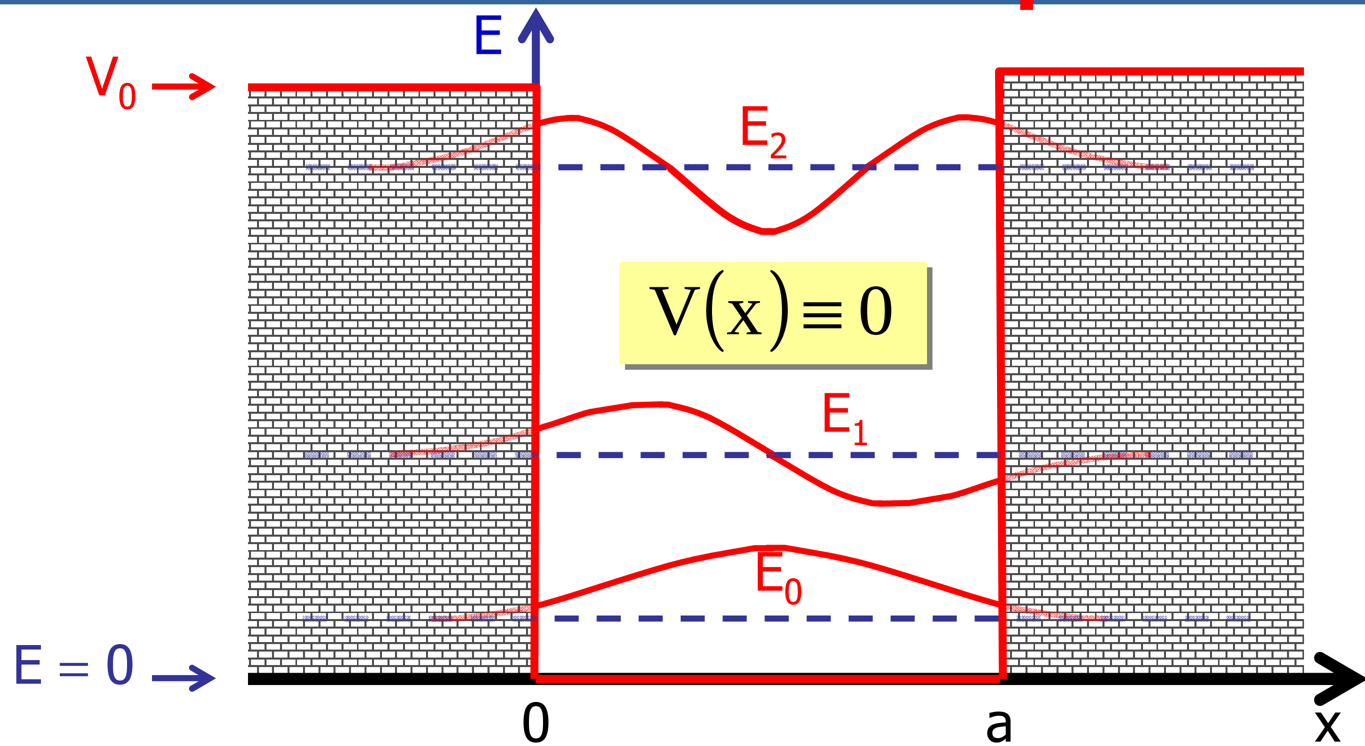
$$\Rightarrow \quad k_n = (n+1)\tfrac{\pi}{a}$$

$$\Rightarrow \quad E_n = \frac{\hbar^2 k_n^2}{2m} = \frac{h^2}{8ma^2}(n+1)^2$$



- Es gibt eine Nullpunktsenergie: $E_0 = \frac{h^2}{8ma^2}$
- E_n wächst quadratisch mit der Quantenzahl n. Anders als Photonen!
- $E\nearrow \;\Rightarrow\;$ #Knoten von $\psi\nearrow \;\Rightarrow\;$ Krümmung von $\psi\nearrow$.
- $a\searrow \;\Rightarrow\;$ E wächst quadratisch.

2.6. Teilchen im unendlich hohen Topf



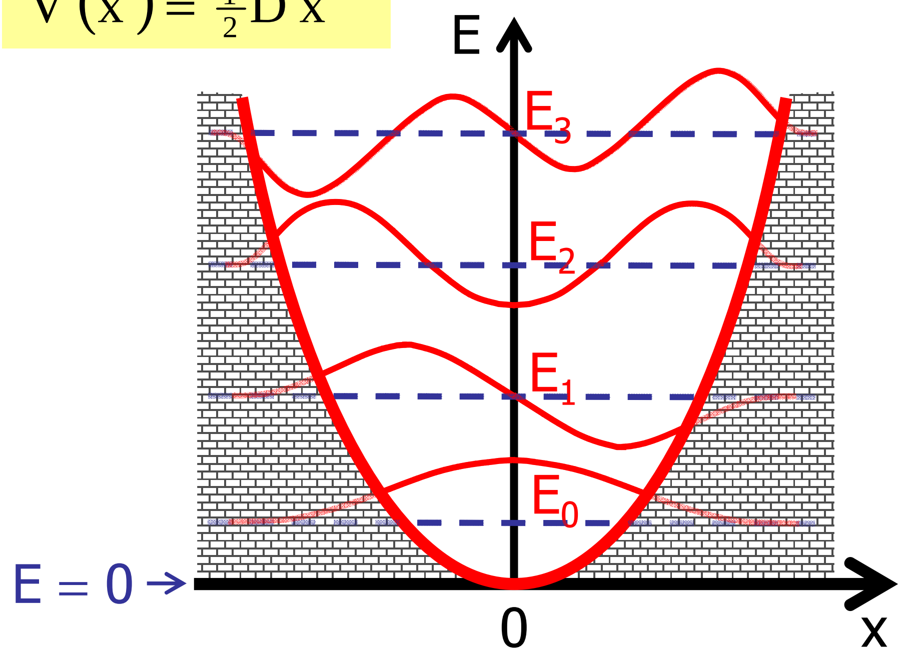
- Teilchen dringt in energetisch verbotenen Bereich V > E ein; dort fällt die Wellenfunktion exponentiell ab.
- Es gibt nur noch endlich viele diskrete Energiezustände mit $E_n < V_0$.
- Oberhalb der Ionisationsenergie V_0 entsteht ein Energiekontinuum freier Zustände.

2.6. Harmonischer Ozillator

Qualitativ: Unendliche Folge von Kastenpot. wachsender Höhen

- Unendl. Folge diskreter Niveaus
- Exp. Dämpfung in verbotenen Bereichen
- Es gibt eine Nullpunktsenergie
- Energiequantenzahl n = #Knoten

$V(x) = \frac{1}{2} D x^2$



Teilchen im harmonischen Potential

Theorie ⇒

$$E_n = \left(n + \tfrac{1}{2}\right)\hbar\omega$$

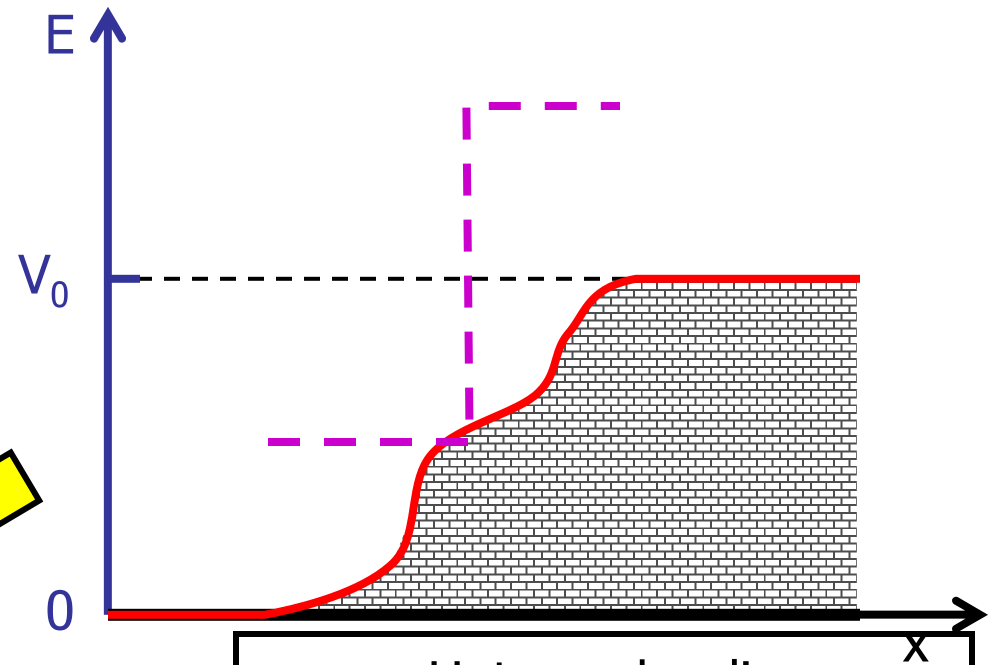
$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

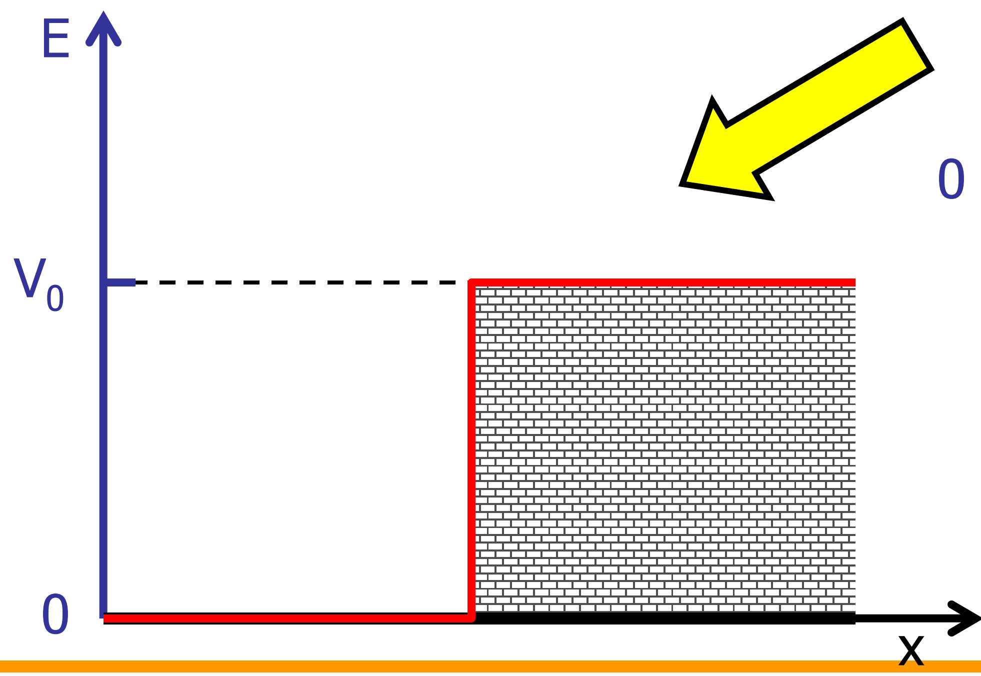
Im harmonischen Oszillator-Potential unterscheiden sich benachbarte Energie-Niveaus um das Energiequantum $\hbar\omega$. Dabei ist ω die klassische Eigenfrequenz des Oszillators.

→ Plancksche Quantenhypothese: Übergänge durch Absorption oder Emission von Energiequanten (z. B. Photonen oder Phononen)

2.7. Tuneleffekt / Potentialstufen

- Rechteckstufe enthält die wesentliche Physik
- Form der Stufe $\Rightarrow$ Details





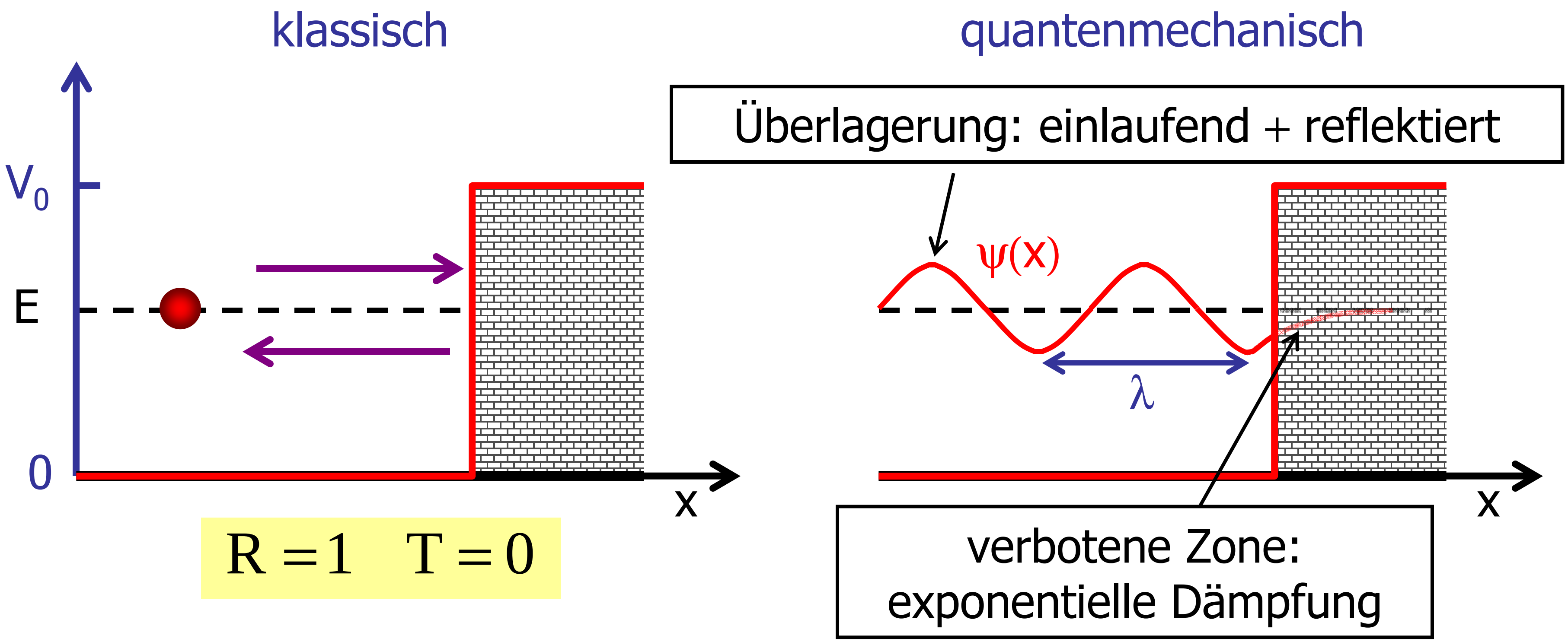
Untersuche die monoenergetischen harmonischen Teilwellen des Wellenpakets

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

2.7. Tunneleffekt / Potentialstufe

a) $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} < V_0$:

$$k = \tfrac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$$



$R = 1 \quad T = 0$ (klassisch)

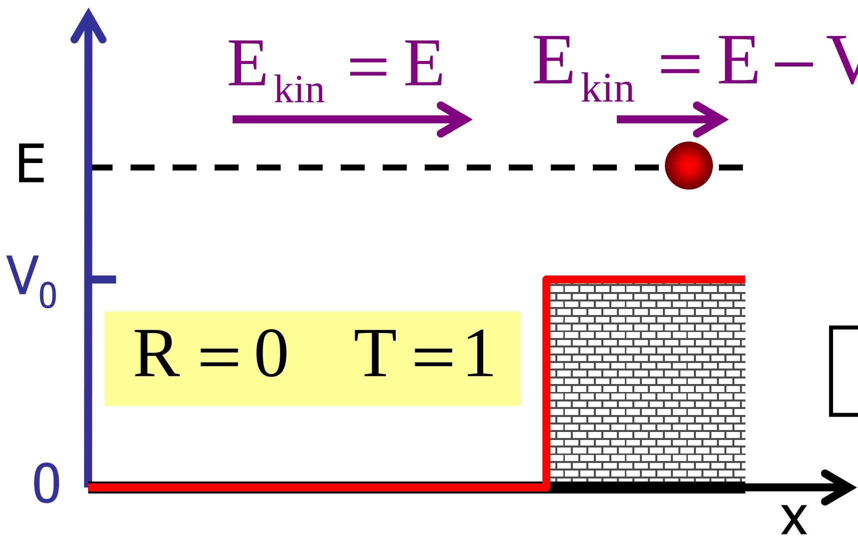
R, T = Reflexions-, Transmissionskoeffizienten für Aufenthaltswahrscheinlichkeiten

$R = 1 \quad T = 0$ (quantenmechanisch)

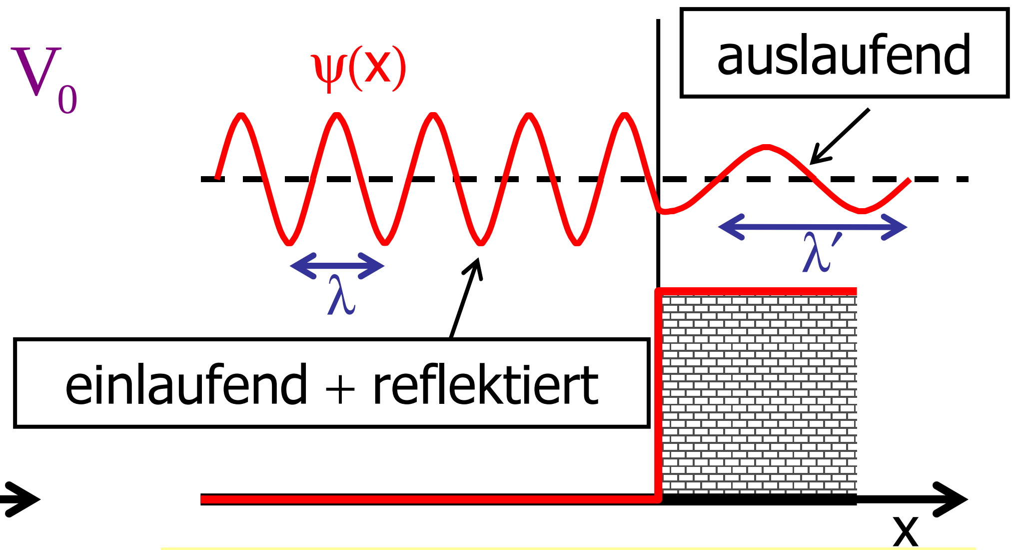
2.7. Tunnelfeffekt / Potentialstufe

b) $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} > V_0$: $k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$ $k' = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}$

klassisch



quantenmechanisch



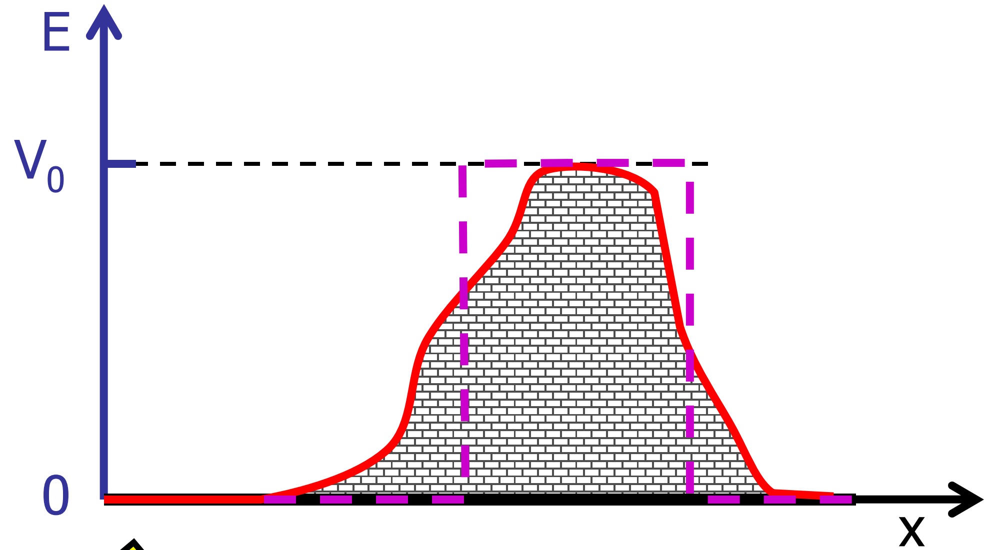
$$R = \left|\frac{k - k'}{k + k'}\right|^2 \qquad T = \frac{4kk'}{(k + k')^2}$$

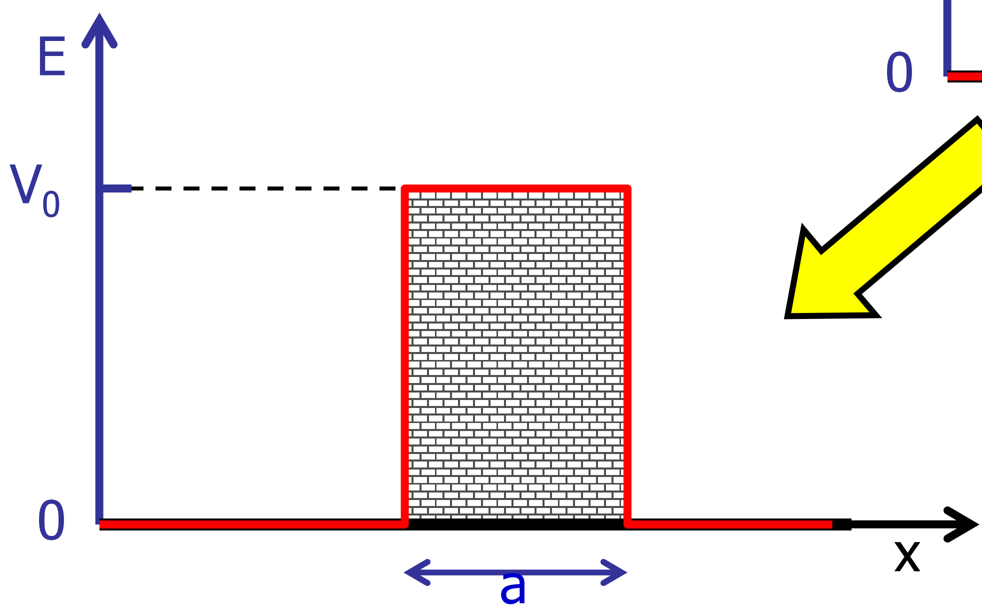
<u>Bemerkung:</u>

- Gilt auch bei negativen Potentialstufen.
- Wellenpaket ↔ Überlagerung aller harmonischen Teilwellen.

2.7. Potentialbarrieren

- Rechteckbarriere enthält die wesentliche Physik
- Barrierenform $\leftrightarrow$ Höhe und Breite





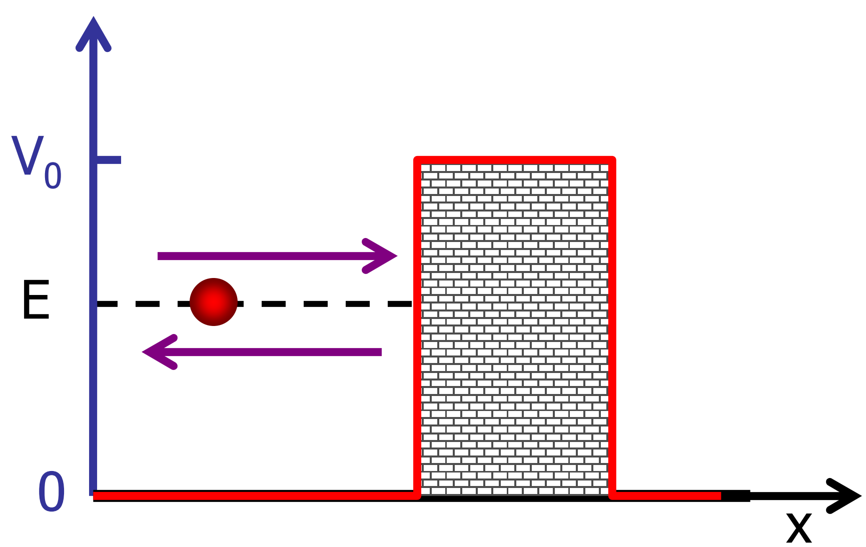
Untersuche die monoenergetischen harmonischen Teilwellen des Wellenpakets

$$\psi(x,t) = \psi(x)e^{-i\omega t}$$

2.7. Potentialbarrieren

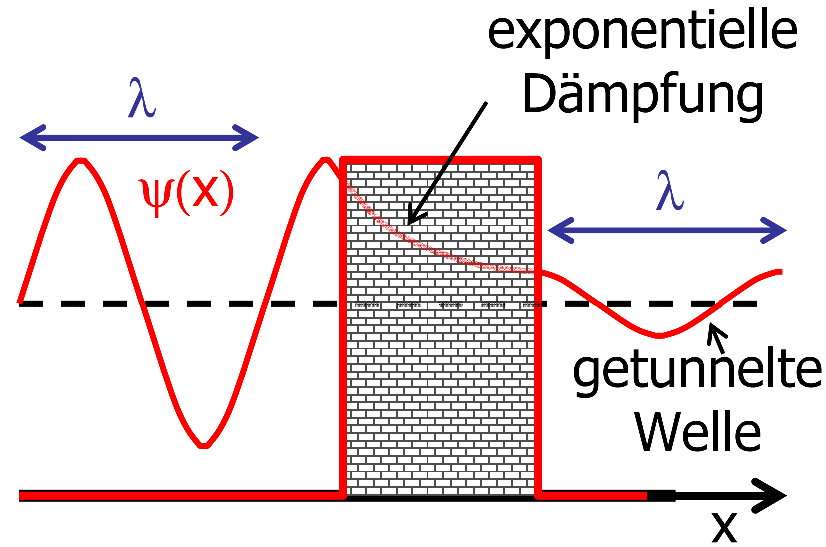
a) $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} < V_0$: $\quad k = \frac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$

klassisch



$$R = 1 \quad T = 0$$

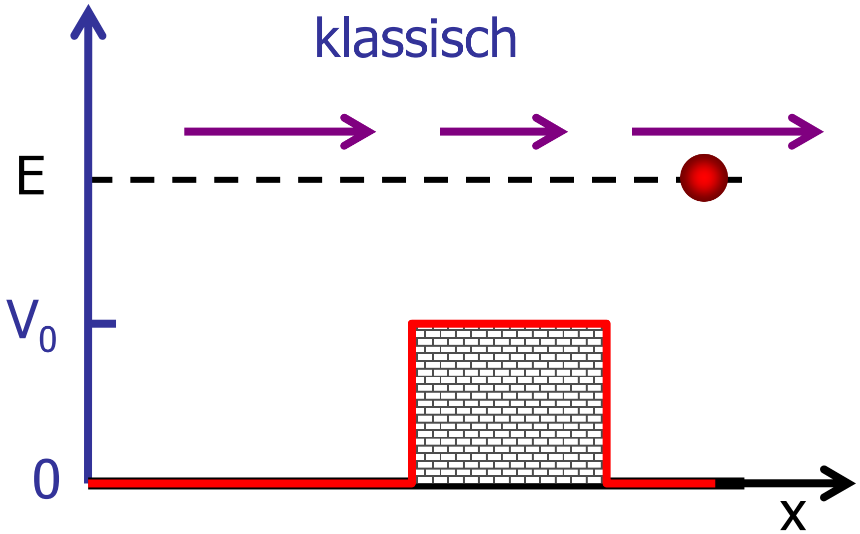
quantenmechanisch



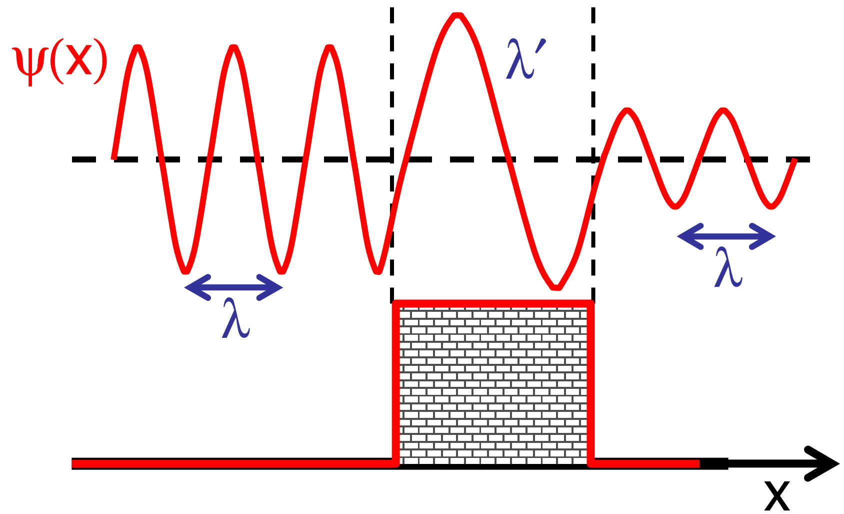
$$R < 1 \quad T > 0$$

2.7. Potentialbarrieren

klassisch



quantenmechanisch

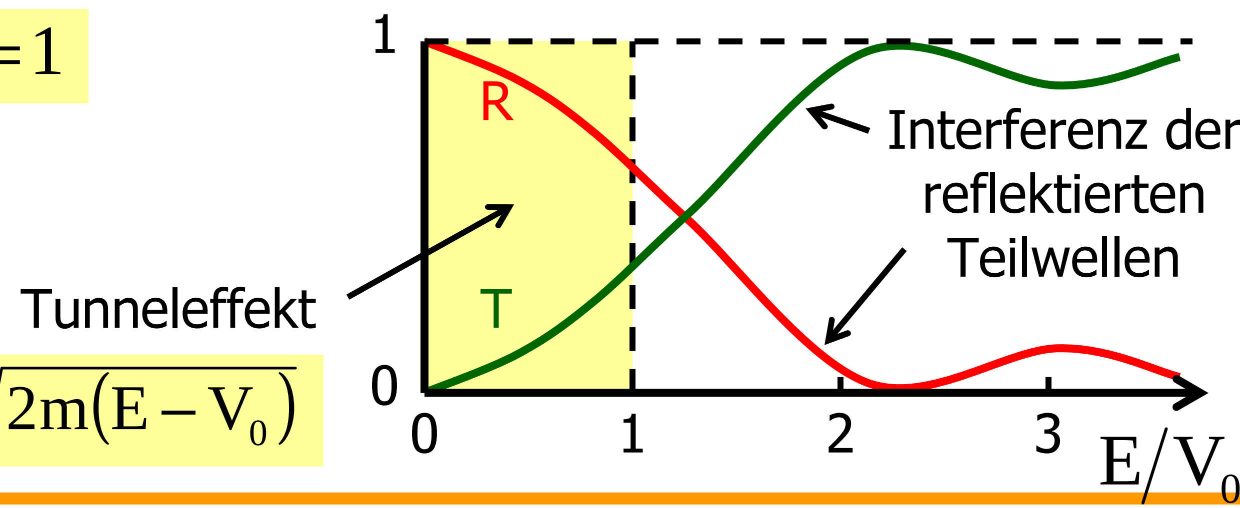


$$R = 0 \quad T = 1$$

b) $E = \dfrac{\hbar^2 k^2}{2m} > V_0$:

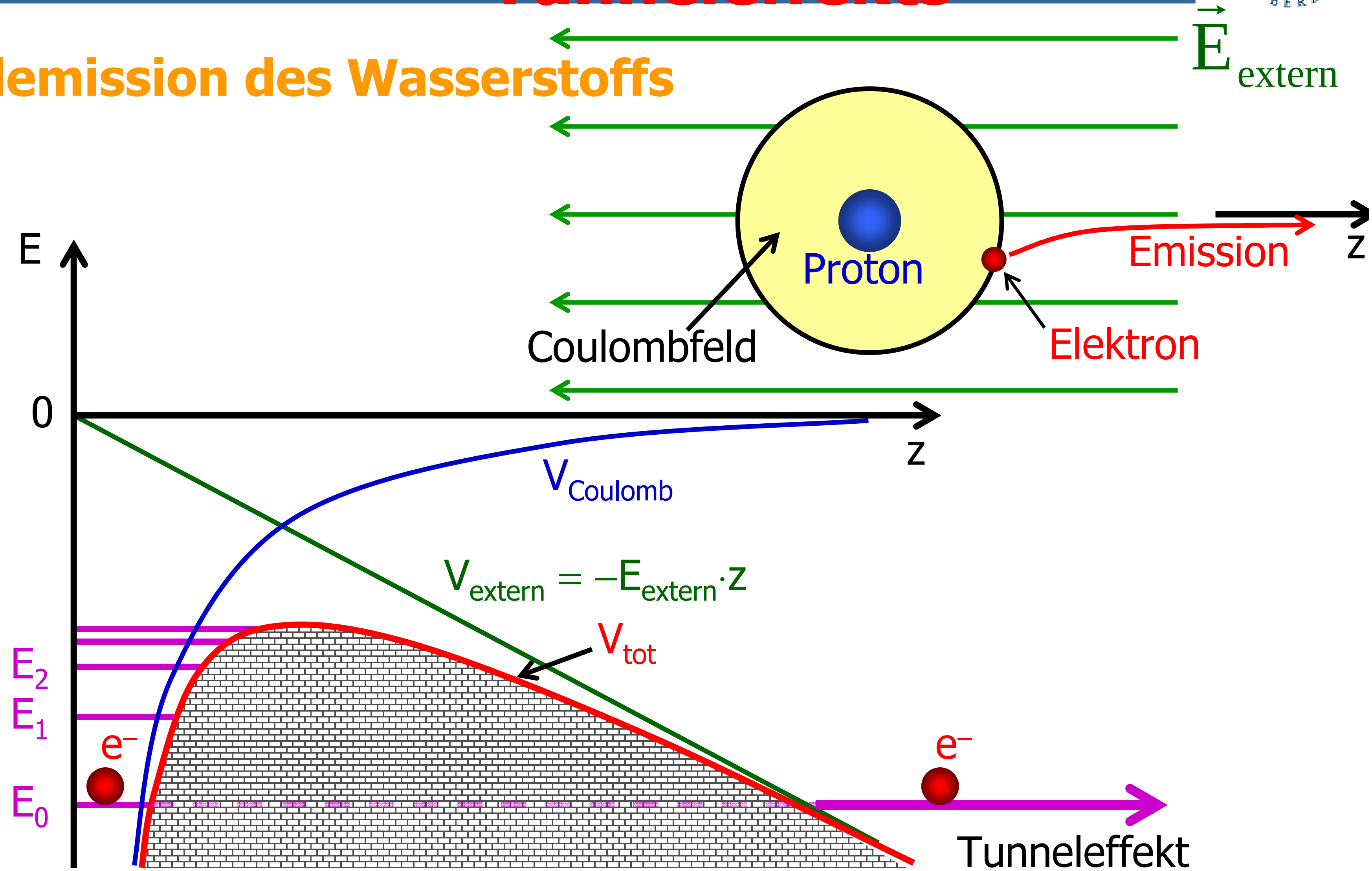
$$k = \tfrac{1}{\hbar}\sqrt{2mE}$$

$$k' = \tfrac{1}{\hbar}\sqrt{2m(E - V_0)}$$



2.7. Exp. Test des Tunneleffekts

Feldemission des Wasserstoffs



2.7. Exp. Test des Tunneleffekts

α-Zerfall von Kernen

α-Teilchen = Helium-Kern (2 Protonen + 2 Neutronen), Ladung = +2e