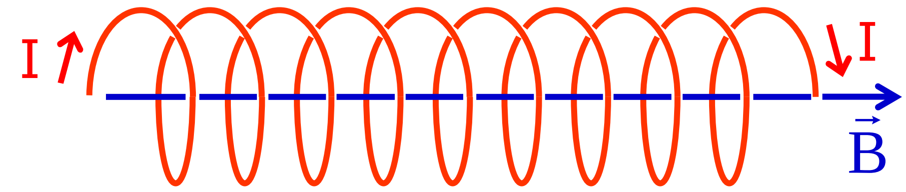
4.3. Selbstinduktion (Iduktivität)

Betrachte beliebige Leiterschleife

Beispiel: Spule

Biot-Savart-Gesetz $\Rightarrow$

Spule: Länge l, Querschnitt A



N Wicklungen $\Rightarrow$ Wicklungsdichte $n = N / l$

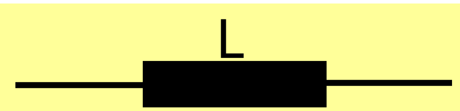
$$\vec{B} \propto I \quad \Rightarrow \quad \Phi_M = \int \vec{B}\, d\vec{A} \propto I \quad \Rightarrow \quad U_{ind} = -\dot{\Phi}_M \propto -\dot{I}$$

Definition:

$$L = -\frac{U_{ind}}{\dot{I}}$$

Selbstinduktionskoeffizient bzw. Induktivität

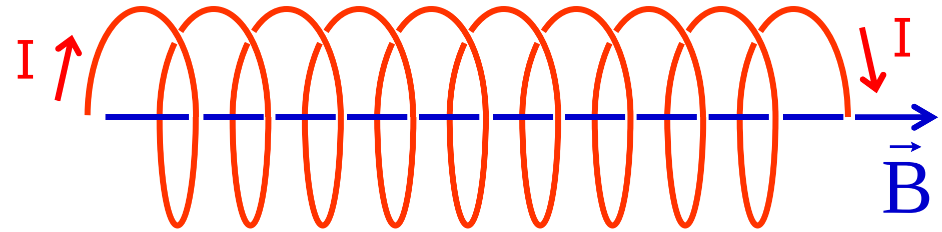
- L ist ein reiner Parameter der (festen) Schleifengeometrie
- Maßeinheit: $[L] = V\ s\ A^{-1} = H =$ Henry
- Schaltsymbol



Induktivität der Zylinderspule

Magnetostatik $\Rightarrow$ $B = \mu_0 n I$

$$\Phi_M = \underbrace{N A}_{\text{Gesamt-Fläche}} B = n \underbrace{V}_{\text{Spulen-Volumen}} B$$

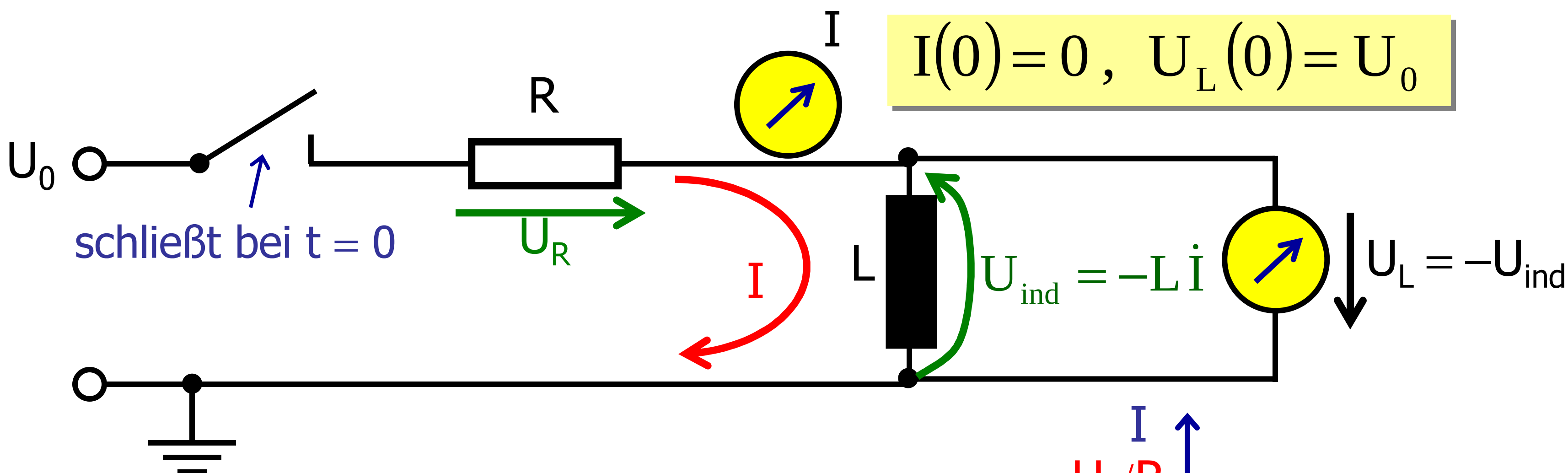


$$\left.\begin{aligned} U_{ind} &= -\dot{\Phi}_M = -n V \dot{B} = -\mu_0 n^2 V \dot{I} \\ U_{ind} &= -L \dot{I} \end{aligned}\right\} \quad \boxed{L = \mu_0 n^2 V \propto n^2}$$

- Das Magnetfeld steigt proportional zur Wicklungsdichte
- Die Induktivität steigt mit dem Quadrat der Wicklungsdichte

Einschaltvorgang einer Induktivität

$$I(0) = 0\,,\quad U_L(0) = U_0$$



Maschen sind B-Feld-frei

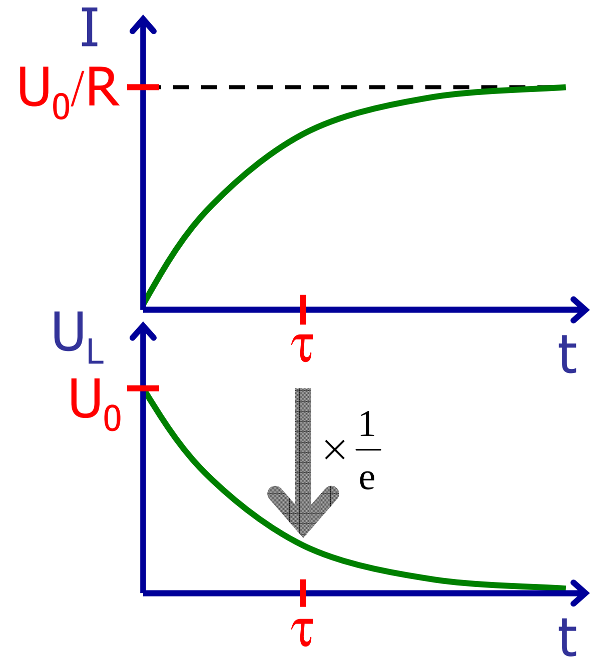
(B-Feld ist eingesperrt in Induktivität)

$$\Rightarrow\ U_0 = U_R + U_L = U_R - U_{ind} = R\,I(t) + L\,\dot{I}(t)$$

Lösung:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\quad,\qquad \tau = \frac{L}{R}$$

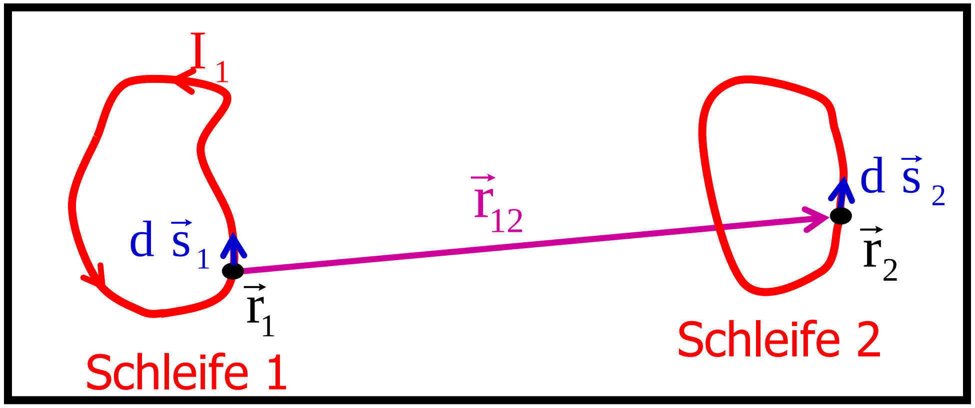
$$U_L(t) = L\,\dot{I} = U_0\,e^{-t/\tau}$$



Gegenseitige Induktion

Biot-Savart-Gesetz $\Rightarrow$

$$\vec{A}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}\,1} \frac{d\vec{s}_1}{r_{12}}$$



$\Rightarrow$ Fluss durch Schleife 2:

$$\Phi_M = \int_{\text{Schleife}\,2} \vec{B}\,d\vec{a} = \int_{\text{Schleife}\,2} \mathrm{rot}\,\vec{A}\,d\vec{a} = \oint_{\text{Schleife}\,2} \vec{A}(\vec{r}_2)\,d\vec{s}_2 = \underbrace{\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}\,1} \oint_{\text{Schleife}\,2} \frac{d\vec{s}_1\,d\vec{s}_2}{r_{12}}} \cdot I_1$$

$$\Phi_M = L_{12}\, I_1$$

$$U_{2,\mathrm{ind}} = \oint_{\text{Schleife}\,2} \vec{E}\,d\vec{s}_2 = -\dot{\Phi}_M = -L_{12}\,\dot{I}_1$$

Gegeninduktivität

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\text{Schleife}\,1} \oint_{\text{Schleife}\,2} \frac{d\vec{s}_1\,d\vec{s}_2}{r_{12}}$$

nur abhängig von Schleifengeometrie

Bemerkung:

$$0 \le L_{12}^2 \le L_1 L_2$$

Energie des Magnetfeldes

$$W_M = \int_0^t \underbrace{U_L(\tilde t)}_{L\,\dot I(\tilde t)} I(\tilde t)\,d\tilde t = \frac{L}{2}\int_0^t \frac{d}{d\tilde t} I^2(\tilde t)\,d\tilde t = \frac{L}{2}\left(I^2(t) - \underbrace{I^2(0)}_{0}\right) = \tfrac{1}{2} L I^2$$

Vergleich: Kapazität $\leftrightarrow$ Induktivität

Magnetische Energie in Induktivität

$$W_M = \tfrac{1}{2} L I^2$$

Elektrische Energie in Kapazität C

$$W_{el} = \tfrac{1}{2} C U^2$$

Energiedichte des Magnetfeldes in einer Spule (mit Kern):

$$\boxed{w_M =} \frac{W_M}{V} = \frac{1}{2}\frac{L}{V} I^2 \overset{L=\mu\mu_0 n^2 V}{=} \frac{1}{2}\mu\mu_0 n^2 I^2 \overset{B=\mu\mu_0 H=\mu\mu_0 n I}{=} \boxed{\tfrac{1}{2}\vec B \vec H}$$

Vergleich: magnetische Energiedichte $\leftrightarrow$ elektrische Energiedichte

$$w_M = \tfrac{1}{2}\vec B \vec H \qquad w_{el} = \tfrac{1}{2}\vec E \vec D$$