

Kap. 5 Wechselströme



- 5.1. Generatoren und Motoren
- 5.2. Wechselströme
- 5.3. Wechselstromkreise und Impedanzen
- 5.4. Wechselstromschaltungen, Hoch- und Tiefpassfilter
- 5.5. Transformatoren
- 5.6. Gleichrichter

Quasistationäre Phänomene



Quasistationäre Näherung:

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \cancel{\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

Gesetze der
Magnetostatik gelten
unverändert

Interpretation: $c \rightarrow \infty$, d.h. in der Zeit, die Licht benötigt, um die Strom- und Ladungskonfiguration (\rightarrow den elektrischen Schaltkreis) zu durchqueren, ändern sich Ströme und Ladungsdichten nicht wesentlich.

\Rightarrow Frequenzen nicht zu groß (Kupferleitung: $\omega \ll 10^{19} \text{ s}^{-1}$)

\Rightarrow Schaltelemente bewegen sich in externen E/B-Feldern **nichtrelativistisch**, $v \ll c$

Die Gesetze der Statik gelten modifiziert weiter:

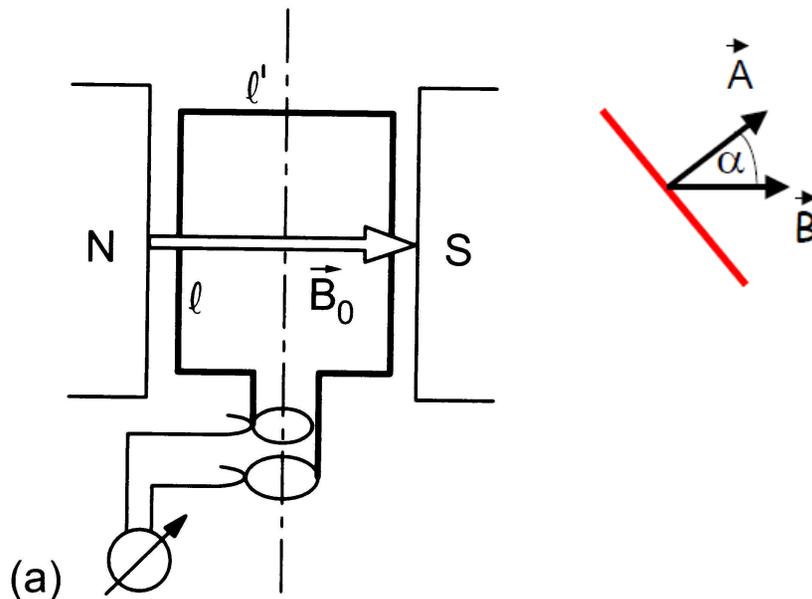
$$\text{div } \vec{j} = \frac{1}{\mu_0} \text{div rot } \vec{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Kirchhoffsche Knotenregel: } \sum_{k \in \text{Knoten}} I_k = 0$$

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \stackrel{2.2.1.}{\Rightarrow} \quad \text{Kirchhoffsche Maschenregel: } \sum_{k \in \text{Masche}} U_k = -\dot{\Phi}_M$$

Die Summe der Spannungen in einer Masche verschwindet, falls der magnetische Fluss durch die Masche konstant ist.

5.1 Generatoren

Prinzip: im B-Feld rotierende Leiterschleife



$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{A} = B \cdot A \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = \omega \cdot t = 2\pi \cdot \frac{t}{T}$$

Φ : magnetischer Fluss

ω : Kreisfrequenz

T: Umlaufperiode

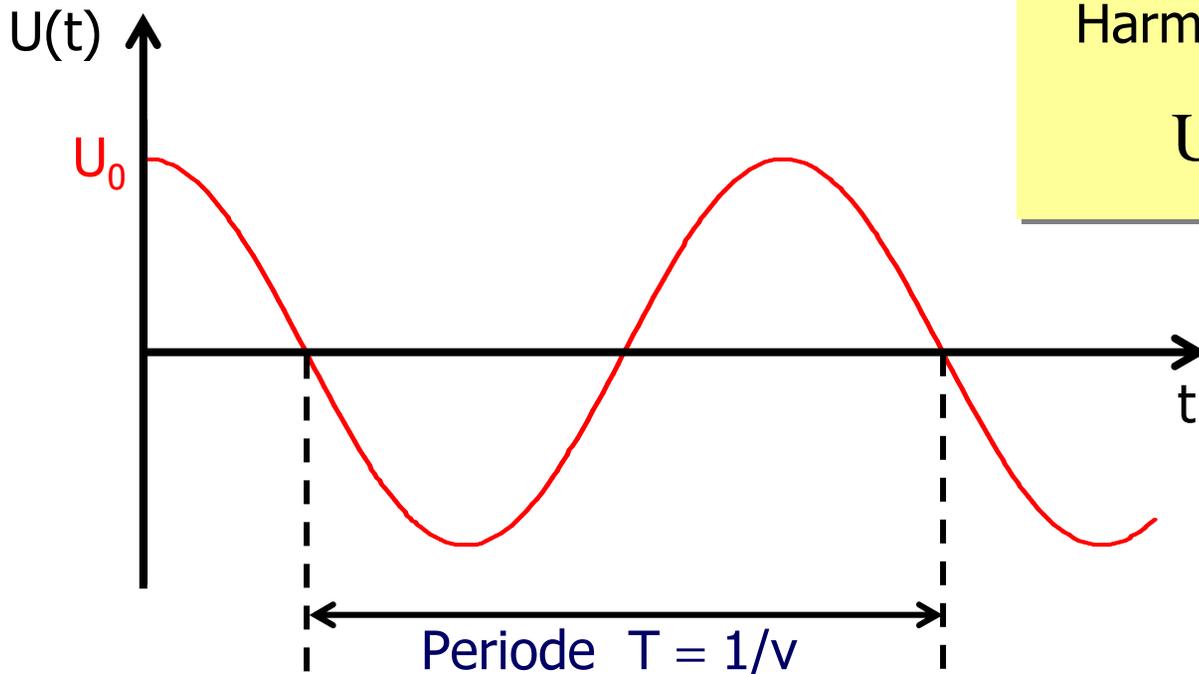
$$U_i = -\dot{\Phi} = B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin \omega t$$

$$U_0 = B \cdot A \cdot \omega$$

5.2. Wechselstrom

Harmonische Wechselspannung

$$U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$



Schaltsymbol:



Europa

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 230\text{V}$$

$$\nu = 50\text{Hz}$$

U.S.A.

$$U_0 = \sqrt{2} \cdot 110\text{V}$$

$$\nu = 60\text{Hz}$$

U_0 : Scheitelwert $U(t)$: Momentanwert

T : Periode $\nu = \frac{1}{T}$: Frequenz

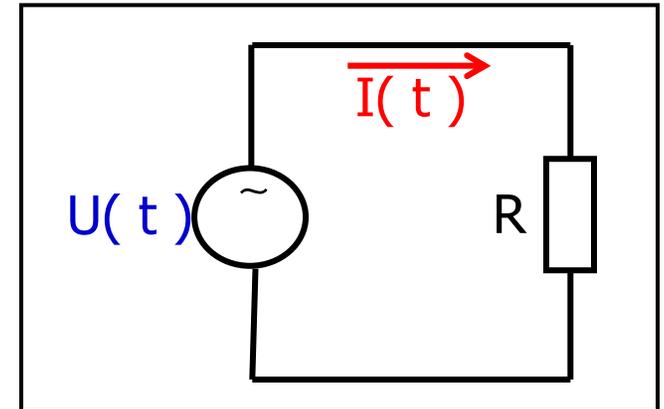
$\omega = \frac{2\pi}{T}$: Kreisfrequenz

Leistung im Ohmschen Verbraucher



$$I(t) = \frac{1}{R} U(t) = \frac{U_0}{R} \cos(\omega t) = I_0 \cos(\omega t)$$
$$\Rightarrow U_0 = R I_0$$

$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{U_0^2}{R} \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t)$$



Mittlere Leistung für beliebige periodische Wechselspannung:

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{U^2(t)}{R} dt = \frac{1}{R} \overline{U^2} \equiv \frac{1}{R} U_{\text{eff}}^2$$

$$\text{Effektivspannung: } U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U^2}}$$

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T R I^2(t) dt = R \overline{I^2} \equiv R I_{\text{eff}}^2$$

$$\text{Effektivstrom: } I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2}}$$

$$\bar{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}}$$

Harmonische Wechselspannung



$$\overline{U^2} = \frac{1}{T} \int_0^T U_0^2 \underbrace{\cos^2(\omega t)}_{\frac{1}{2}(1+\cos(2\omega t))} dt = \frac{U_0^2}{2T} \cdot \left[\underbrace{\int_0^T dt}_T + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t) dt}_0 \right] = \frac{1}{2} U_0^2$$

$$\overline{I^2} = \frac{1}{T} \int_0^T I_0^2 \cos^2(\omega t) dt = \dots \dots = \frac{1}{2} I_0^2$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{U^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} U_0$$

$$\overline{P} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} = \frac{1}{2} U_0 I_0$$

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{I^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0$$

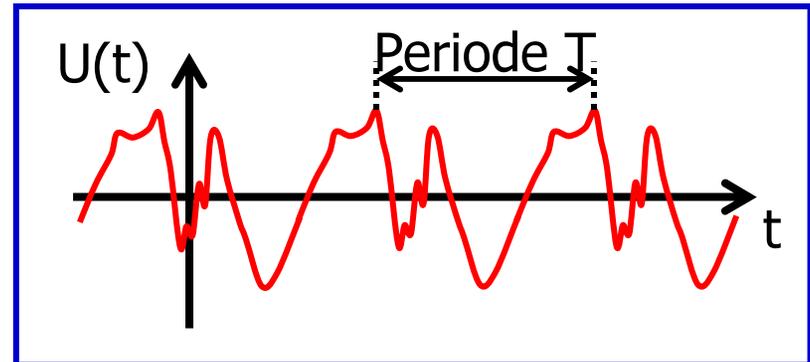
Allgemeine Wechselspannung



Periode T : $U(t) = U(t+T)$

Fundamentalkreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourierzerlegung:



$$U(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{1}{2} a_0 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega t}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin(n\omega t) dt$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{U^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)}$$

U_{eff} ist gleich der quadratischen Summe der Effektivspannungen der Fourierkomponenten

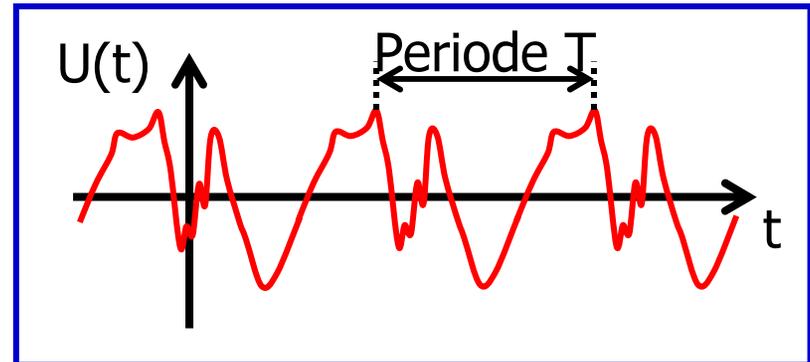
Allgemeine Wechselspannung



Periode T : $U(t) = U(t+T)$

Fundamentalkreisfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourierzerlegung:



$$U(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)) = \frac{1}{2} a_0 + \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - ib_n) e^{in\omega t}$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \cos(n\omega t) dt$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T U(t) \sin(n\omega t) dt$$

Folgerung: Für lineare Netzwerke (\Leftrightarrow Superpositionsprinzip anwendbar) reicht es aus, das Verhalten für harmonische Wechselströme / Wechselspannungen zu untersuchen.

5.3. Komplexe Widerstände

Neues (eleganteres) Konzept: **Komplexe** Spannung/Strom

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t}$$

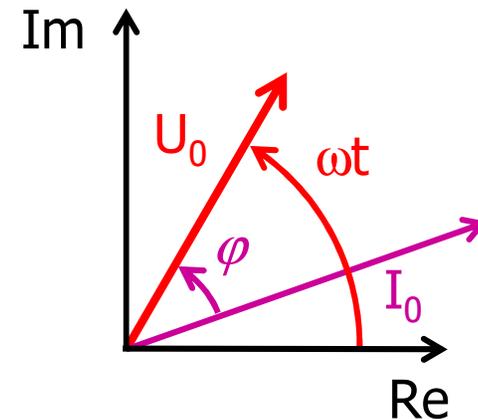
$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

physikalischer
Anteil



$$\text{Re } U(t) = U_0 \cos(\omega t)$$

$$\text{Re } I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$$



Definition: **Komplexer** Wechselstromwiderstand

$$Z = Z(\omega) = \frac{U(t)}{I(t)} = \frac{U_0}{I_0} \cdot e^{i\varphi}$$

Nach Konstruktion \Rightarrow Gesetze der Quasistatik (Kirchhoffsche Regeln, ...) gelten weiter

Ohmscher Widerstand / Induktivität



$$U(t) = U_R(t) = R I(t) \Rightarrow Z = R$$

Z reell und unabhängig von ω

Beispiel: Induktivität

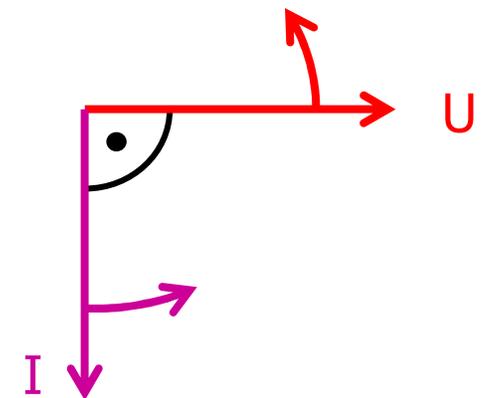
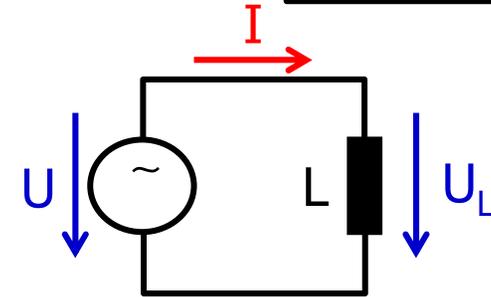
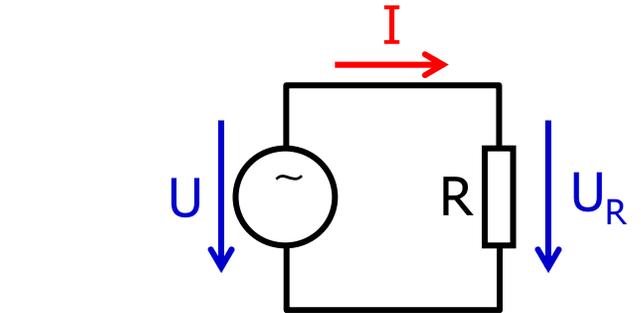
$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_L(t) = -U_{\text{ind}}(t) = L \dot{I}$$

$$I(t) = \frac{U_0}{L} \int e^{i\omega t} dt = \frac{U_0}{i\omega L} e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega L} U(t)$$

$$\Rightarrow Z = i\omega L = \omega L e^{i\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \rightarrow 0, & \omega \rightarrow 0 \\ \rightarrow \infty, & \omega \rightarrow \infty \end{cases}$$

Z imaginär und proportional zu ω

$\varphi = +90^\circ \Rightarrow$ Strom eilt Spannung um 90° nach



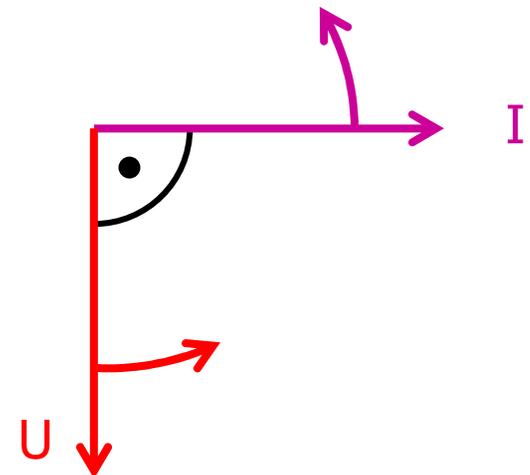
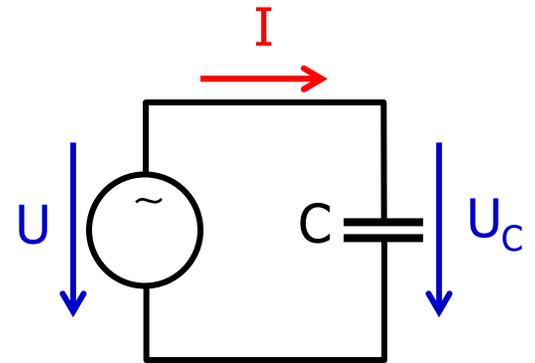
Kapazität



$$U_0 e^{i\omega t} = U(t) = U_C(t) = \frac{Q(t)}{C}$$

$$I(t) = \dot{Q}(t) = C \frac{d}{dt} (U_0 e^{i\omega t}) = i\omega C U_0 e^{i\omega t} = i\omega C U(t)$$

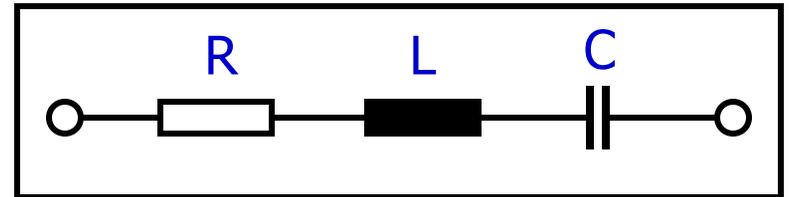
$$\Rightarrow \boxed{Z = \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{\omega C} e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{cases} \rightarrow 0, & \omega \rightarrow \infty \\ \rightarrow \infty, & \omega \rightarrow 0 \end{cases}$$



Z imaginär und umgekehrt proportional zu ω
 $\varphi = -90^\circ \Rightarrow$ Spannung eilt Strom um 90° nach

RLC-Serien-Schaltung

$$Z = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$$



$$\tan \varphi = \frac{\text{Im} Z}{\text{Re} Z} = \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

Konstruktion im Zeigerdiagramm:

Dieses Beispiel: $\text{Re} Z = R > 0$

$$\Rightarrow \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2} \right]$$

