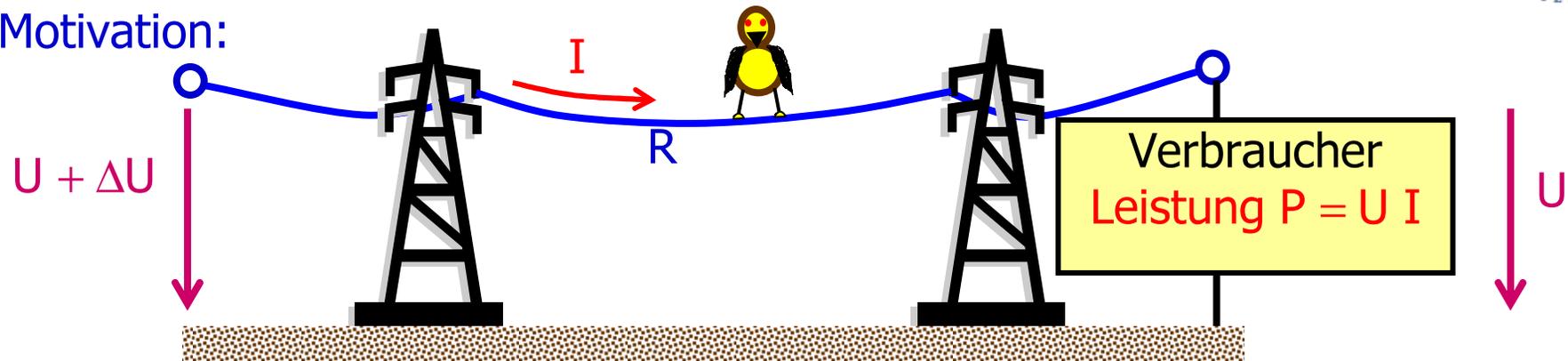


5.5. Transformatoren

Motivation:

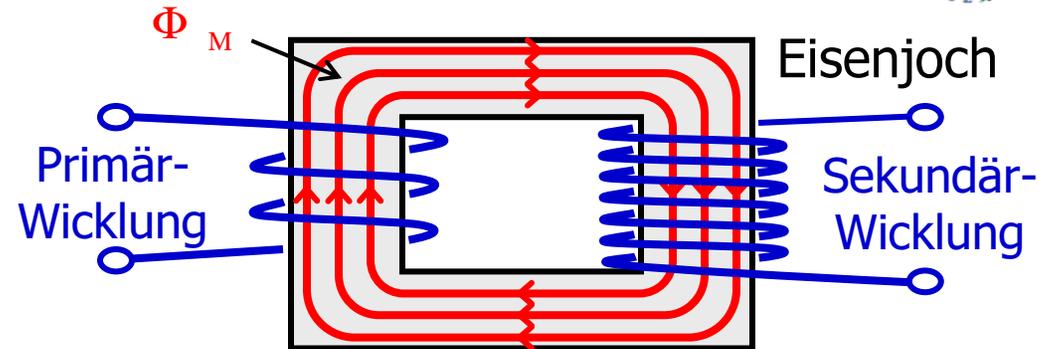
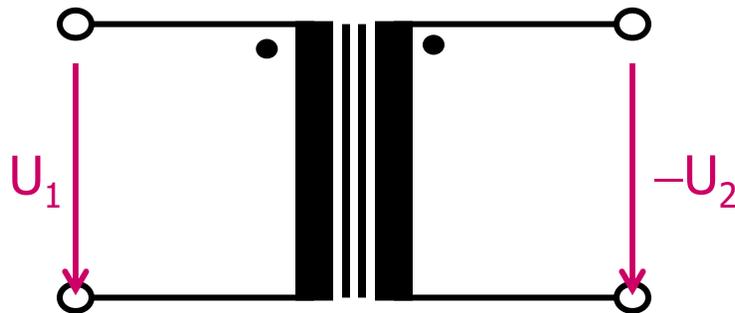
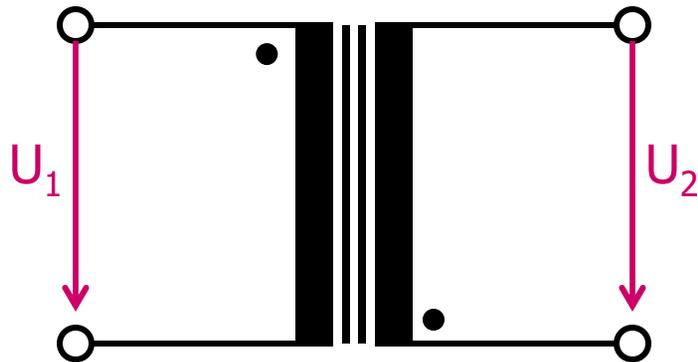


Relativer Leistungsverlust in der Leitung:

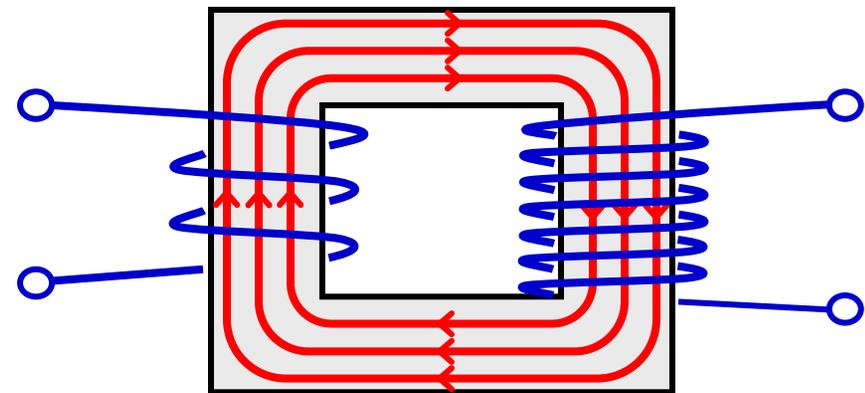
$$\frac{\Delta P}{P} = \frac{I^2 R}{IU} = \frac{IR}{U} = P \frac{R}{U^2} \propto \frac{1}{U^2}$$

- **Umwandlung** der Eingangsspannung auf **Hochspannung**
- Übertragung über Hochspannungsleitung
- **Umwandlung** der Ausgangsspg. auf Verbraucherspannung (z.B. 230 V)

Schaltbild von Trafos



Gleicher Wicklungssinn von Primär- und Sekundärwicklung bezüglich Richtung des magnetischen Flusses



Entgegengesetzter Wicklungssinn von Primär- und Sekundärwicklung bezüglich Richtung des magnetischen Flusses

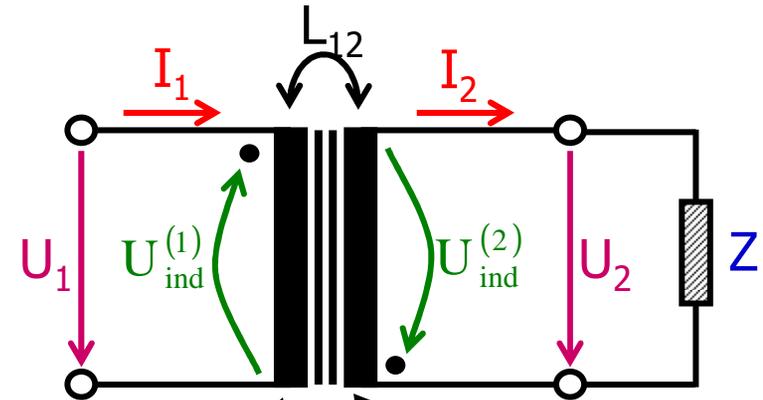
Kopplungstärke von Trafos

$$k = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_1 L_2}} \in [0, 1]$$

Bemerkung: Idealer Transformator

- ⇔ keine Streufeld- etc. Verluste
- ⇔ gesamter magnetischer Fluss durchsetzt beide Spulen

⇔ $k = 1$



Induktionsgesetz \Rightarrow $U_{\text{ind}}^{(1)} = -L_1 \dot{I}_1 - L_{12} \dot{I}_2$ $U_{\text{ind}}^{(2)} = -L_2 \dot{I}_2 - L_{12} \dot{I}_1$

Maschenregel \Rightarrow $U_1 = -U_{\text{ind}}^{(1)}$ $U_2 = U_{\text{ind}}^{(2)} = Z I_2$

Wechselstrom \Rightarrow $\dot{I}_1 = i\omega I_1$ $\dot{I}_2 = i\omega I_2$

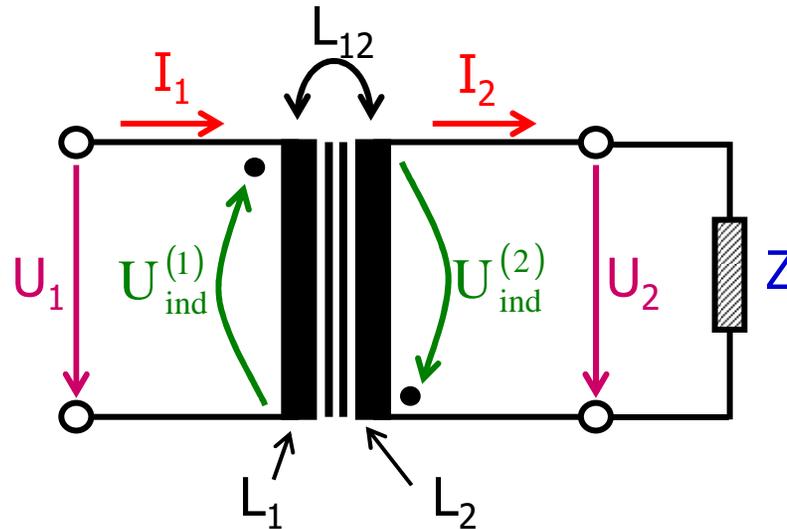
Tafelrechnung \Rightarrow
$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega \left(1 - k^2\right) \frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

Phasendrehung im Trafo

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1 - k^2) \frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$



Phasendrehung:

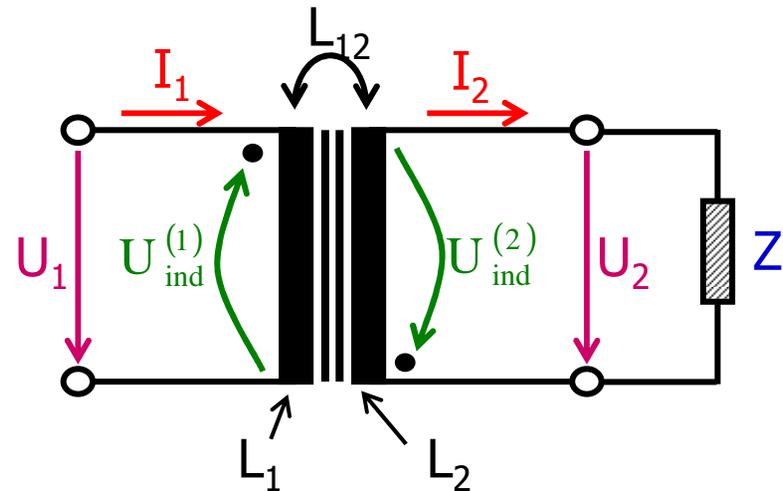
$$\frac{U_2}{U_1} = \left| \frac{U_2}{U_1} \right| \cdot e^{i\varphi} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z) \right)$$

Idealer Trafo (k=1)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

$$\varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z)\right)$$



Spezialfall:

Spulen gleichen Volumens
Windungszahlen N_1, N_2

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spulen gleichen Volumens} \\ \text{Windungszahlen } N_1, N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_{1,2} = \mu\mu_0 V N_{1,2}^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \stackrel{\text{Spezialfall 1}}{=} -\frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -\frac{\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}} \stackrel{\text{Spezialfall 1}}{=} -\frac{\frac{N_1}{N_2}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

$$\varphi = \pi$$

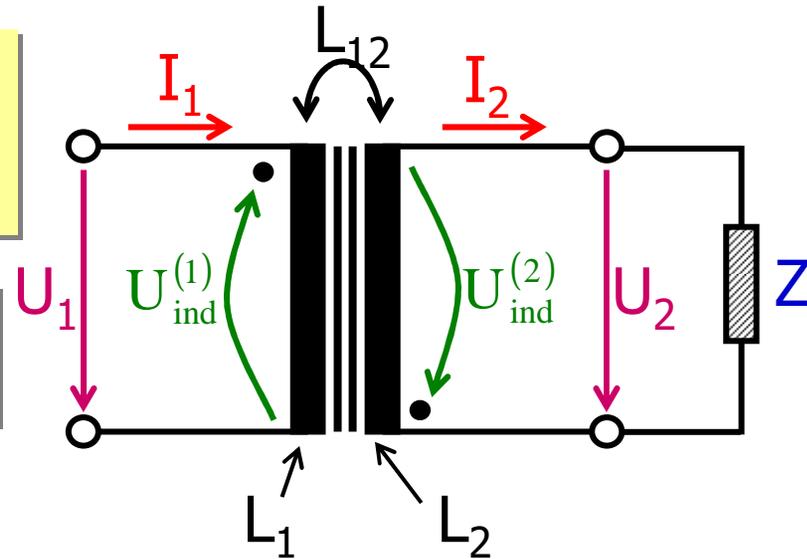
Unbelasteter Trafo ($|Z| \rightarrow \infty$)



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1+i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1+\frac{Z}{i\omega L_2}}$$

$$\varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z)\right)$$



Spezialfall:

Spulen gleichen Volumens
Windungszahlen N_1, N_2

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spulen gleichen Volumens} \\ \text{Windungszahlen } N_1, N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_{1,2} = \mu\mu_0 V N_{1,2}^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} = -k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \stackrel{\text{Spezialfall 1}}{=} -k\frac{N_2}{N_1}$$

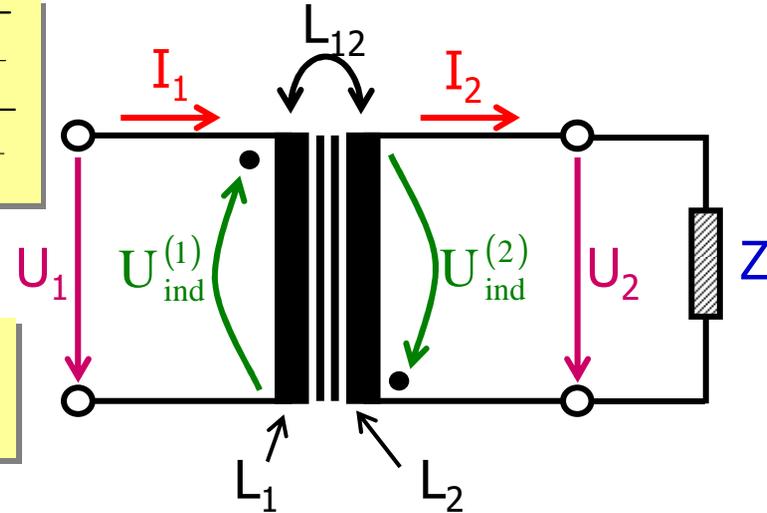
$$\varphi = \pi$$

$$\frac{I_2}{I_1} \rightarrow 0$$

Kurzgeschlossener Trafo ($Z \rightarrow 0$)

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$



$$\varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z)\right)$$

Spezialfall:

Spulen gleichen Volumens
Windungszahlen N_1, N_2

$$\left. \begin{array}{l} \text{Spulen gleichen Volumens} \\ \text{Windungszahlen } N_1, N_2 \end{array} \right\} \Rightarrow L_{1,2} = \mu\mu_0 V N_{1,2}^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\frac{U_2}{U_1} \rightarrow 0$$

$$\frac{I_2}{I_1} = -k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \stackrel{\text{Spezialfall}}{=} -k\frac{N_1}{N_2}$$

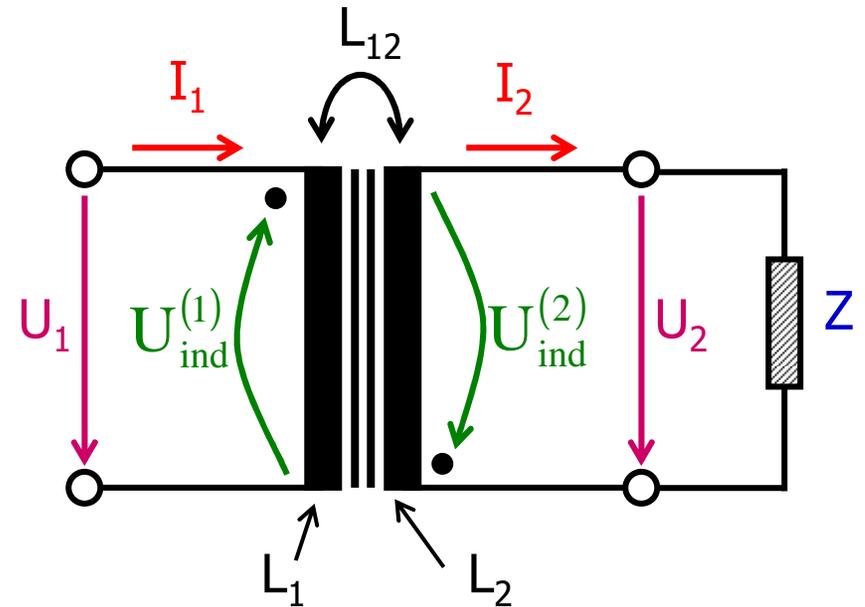
Trafo mit Ohmscher Last $Z = R$



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

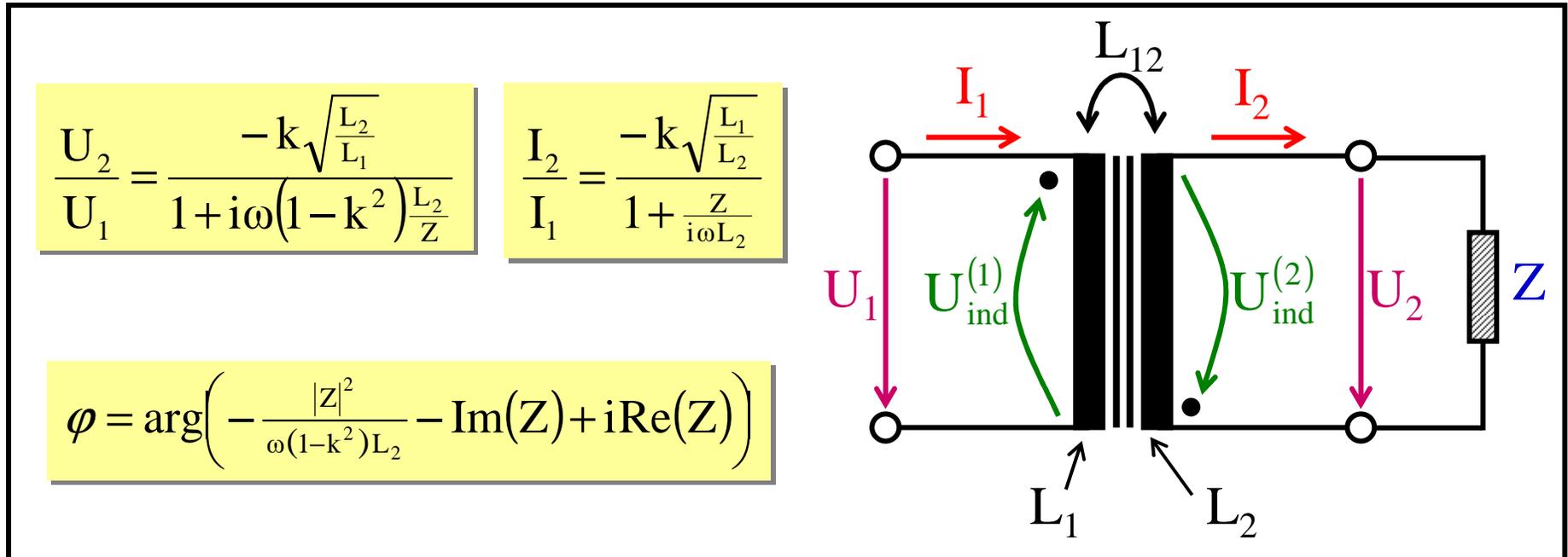
$$\varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z)\right)$$



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{R}}$$

$$\varphi = \pi - \arctan\left(\frac{\omega L_2(1-k^2)}{R}\right)$$

Trafo mit induktiver Last $Z = i\omega L$



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + (1-k^2)\frac{L_2}{L}}$$

$$\varphi = \pi$$

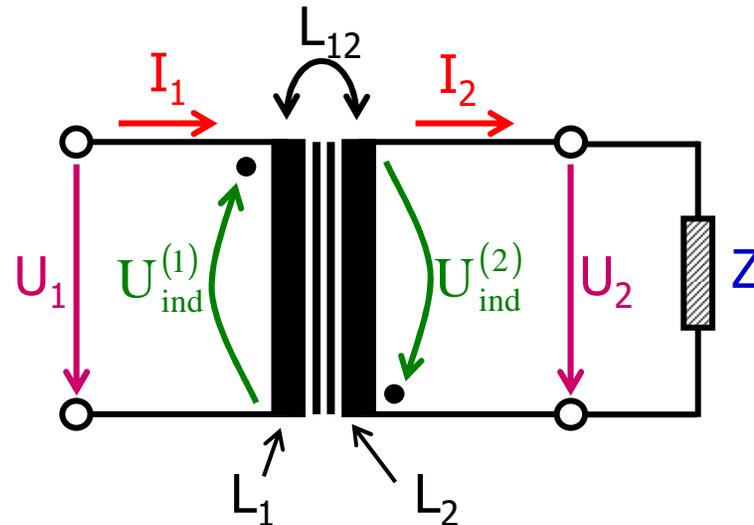
$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{L}{L_2}}$$

Trafor mit kapazitiver Last $Z = (i\omega C)^{-1}$

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 + i\omega(1-k^2)\frac{L_2}{Z}}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 + \frac{Z}{i\omega L_2}}$$

$$\varphi = \arg\left(-\frac{|Z|^2}{\omega(1-k^2)L_2} - \text{Im}(Z) + i\text{Re}(Z)\right)$$



$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_2}{L_1}}}{1 - (1-k^2)\omega^2 CL_2}$$

$$\varphi = \begin{cases} 0, & \text{falls } (1-k^2)\omega^2 CL_2 > 1 \\ \pi, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{-k\sqrt{\frac{L_1}{L_2}}}{1 - \frac{1}{\omega^2 CL_2}}$$

$|U_2 / U_1|$ größer als im unbelasteten Fall falls $(1 - k^2) \omega^2 C L_2 < 2$

Resonanzfrequenz:

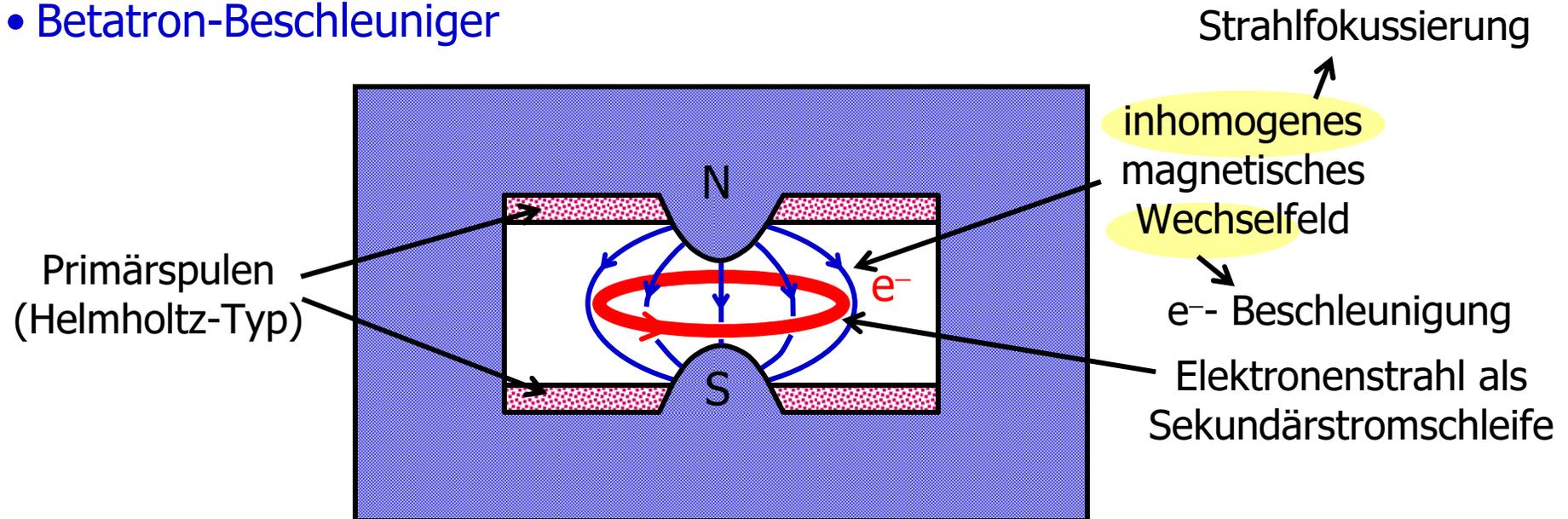
$$\omega_R = \frac{1}{\sqrt{(1-k^2)CL_2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{Phasensprung } \varphi = 0 \leftrightarrow \varphi = \pi \\ \left| \frac{U_2}{U_1} \right| = \infty \end{cases}$$

Anwendungen

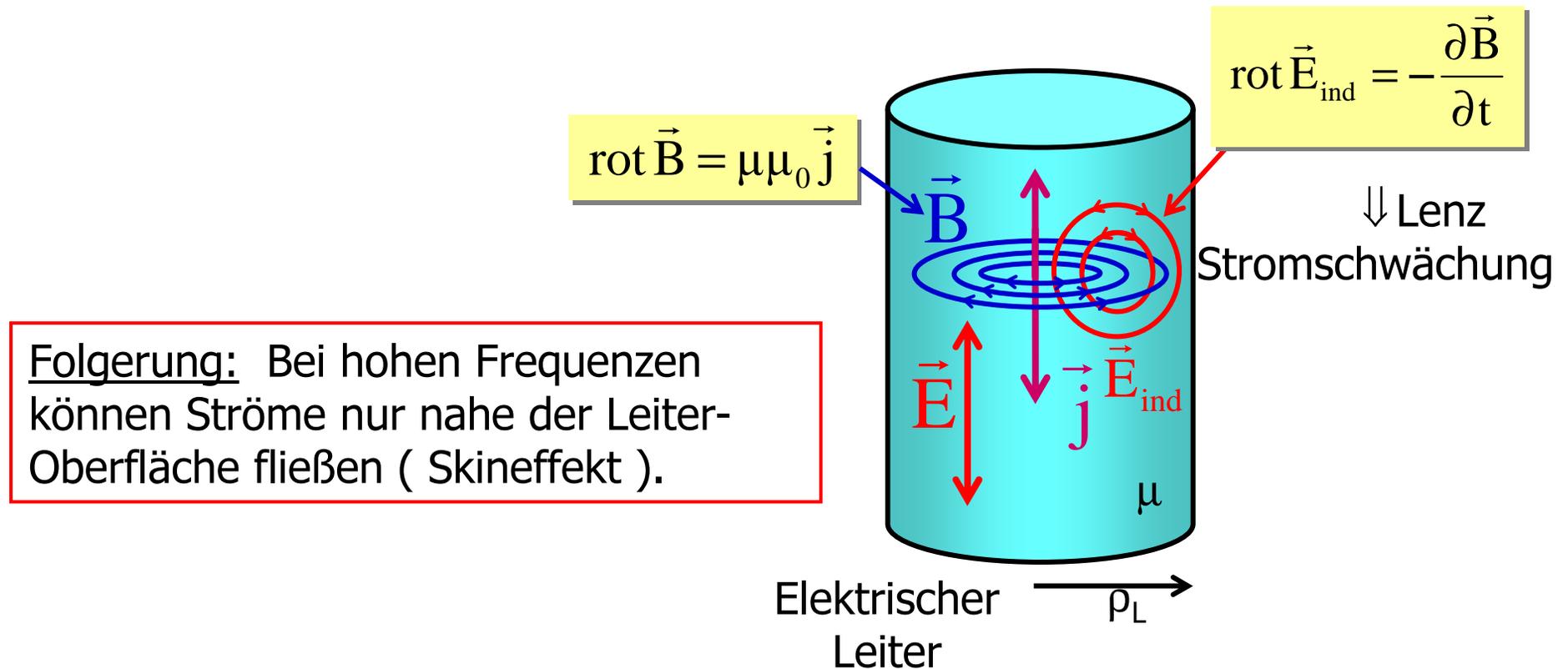
- Transformation auf Hochspannung
- Hochstromanwendung: $N_1 \gg 1, N_2 = 1$
 $\Rightarrow I_2 \gg I_1 \Rightarrow P = R I_2^2$ groß
 → Aluminium-Schmelzen → Edelstahl-Gewinnung
- Punktschweißen
- Aufheizen von Werkstücken durch Wirbelströme
- Betatron-Beschleuniger

z.B. Rinne mit
Metallschmelze



5.6. Skineffekt

Elektrischer Leiter \rightarrow ohmscher Widerstand und Induktivität: $Z = R + i\omega L$
 \Rightarrow induktive Effekte dominieren für $\omega > R / L$ (typisch $\nu \gtrsim \mathcal{O}(\text{MHz})$)

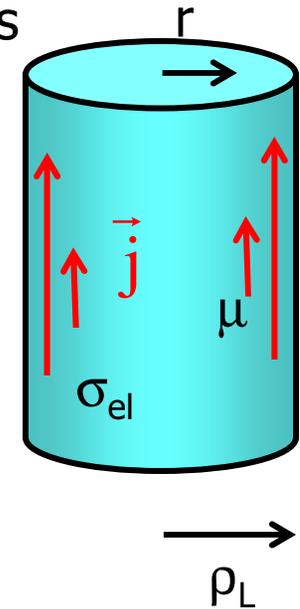
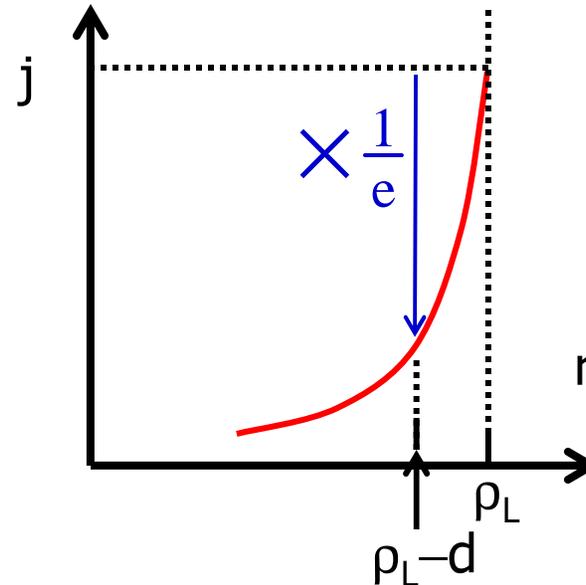


Skineffekt

Quantitative Untersuchung schwierig \Rightarrow Eindringtiefe des Stroms

$$d = \sqrt{\frac{2}{\mu\mu_0\sigma_{el}\omega}}$$

$$j \propto \exp\left(\frac{r-\rho_L}{d}\right)$$

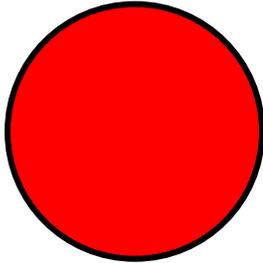


Beispiel: Kupferleiter

ν [Hz]	d [mm]
50	94
10^3	2
10^6	0,07

Skineffekt

$\omega \rightarrow 0$

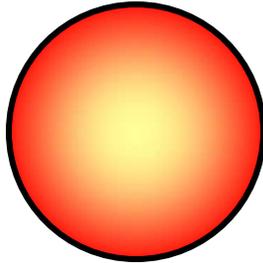


$R \propto \frac{1}{\pi \rho_L^2}$

$\propto 1 / \text{Volumen}$

$d = \sqrt{\frac{2}{\mu \mu_0 \sigma_{el} \omega}}$

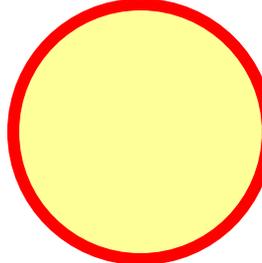
Übergangsbereich



$R \propto \frac{1}{2\pi \rho_L d} \propto \sqrt{\omega}$

\propto (effektives)
durchströmtes
Volumen

$\omega \rightarrow \infty$



$R \propto \frac{1}{2\pi \rho_L}$

$\propto 1 / \text{Oberfläche}$

- HF-Spannungen sind relativ ungefährlich
- Eisendrähte (großes μ) sind schlechte HF-Leiter
- Gute HF-Leitung bei großer Oberfläche (\rightarrow Hohlrohre, Litzen, ...)