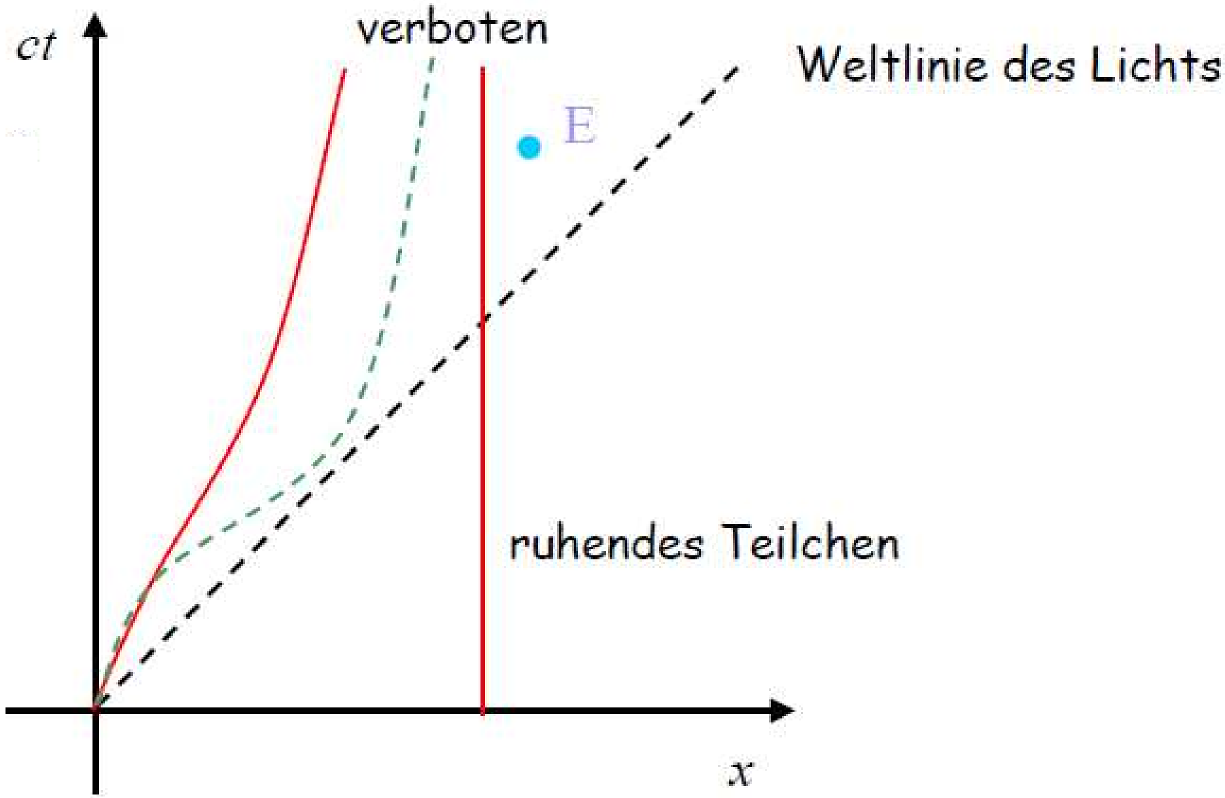
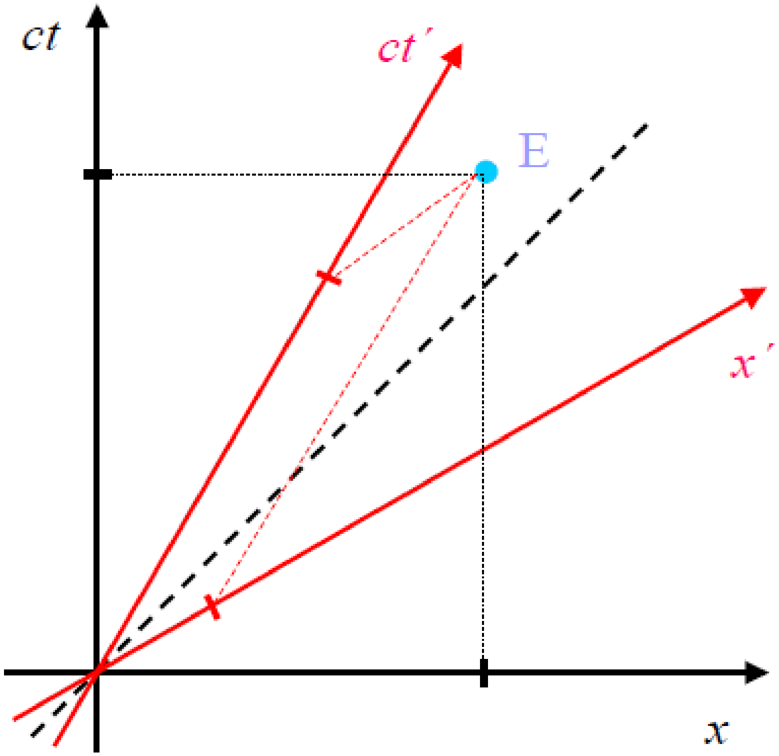
6.4. Raum/Zeit Diagramme



Messung der Zeit in Einheiten von c-1: [ct]=m (0. Raumdimension)

Weltlinie eines materiellen Objekts bzw. Teilchens: **(ct,x,y,z)**

Raum-Zeit Diagramme



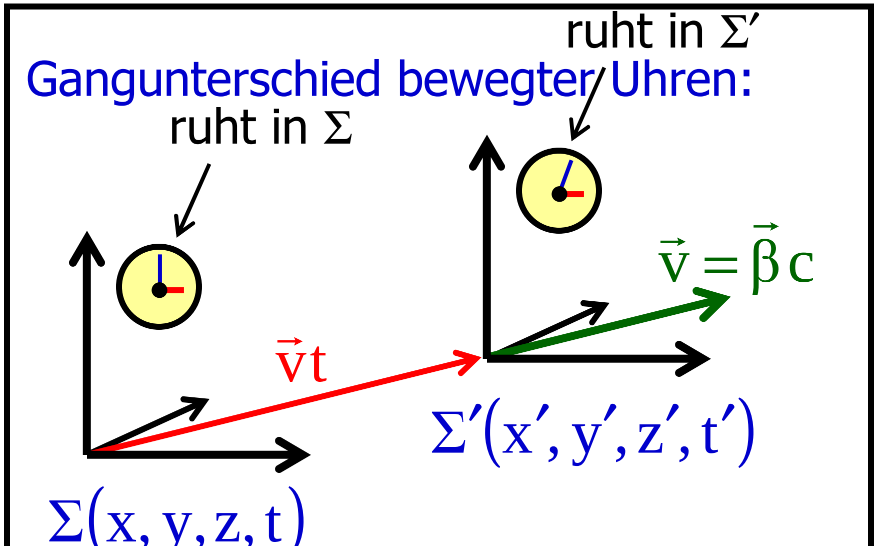
$$0 = x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow ct = \frac{x}{\beta}$$

$$0 = t' = \frac{t - \frac{\beta x}{c}}{\sqrt{1-\beta^2}} \Rightarrow ct = \beta x$$

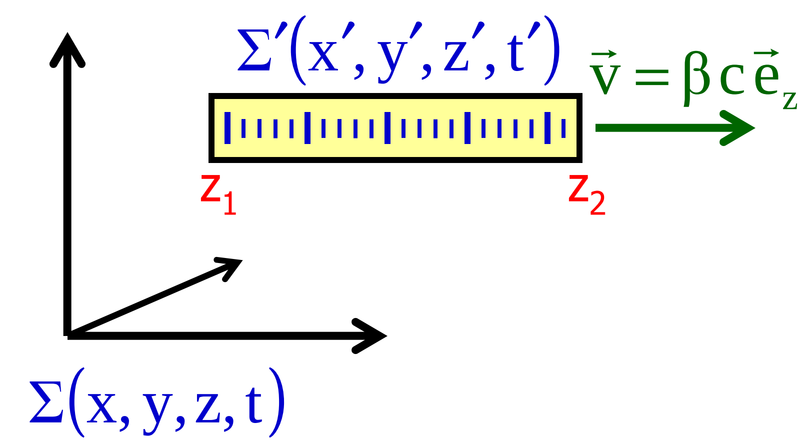
Zeit- und Ortsachse von Σ´ in Σ

Längenkontraktion und Zeitdilatation

Gangunterschied bewegter Uhren:



Längenänderung bewegter Maßstäbe:



Zeitdilatation: $$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Bewegte Uhren laufen langsamer !

$$L = z_2(t) - z_1(t)$$
$$L' = z_2'(t') - z_1'(t')$$

Längenkontraktion: $$L = \tfrac{1}{\gamma} L'$$

Bewegte Maßstäbe sind kürzer !

Kosmische Höhenstrahlung

Wechselwirkung kosmischer Strahlen (Protonen…) in der Atmosphäre

$$\left.\begin{array}{l} \langle E_\mu \rangle \approx 5\,\mathrm{GeV} \\ m_\mu c^2 \approx 0{,}1\,\mathrm{GeV} \end{array}\right\} \quad \langle \gamma \rangle = \frac{\langle E_\mu \rangle}{m_\mu c^2} \approx 50\,, \quad \langle \beta \rangle \approx 1$$

Problem:

$$\beta c \tau = 3 \cdot 10^8 \,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot 2{,}2\ \mu\mathrm{s} = 660\ \mathrm{m} << 40\ \mathrm{km}$$

Einsteins Triumpf aus Sicht des Myons:

Längenkontraktion

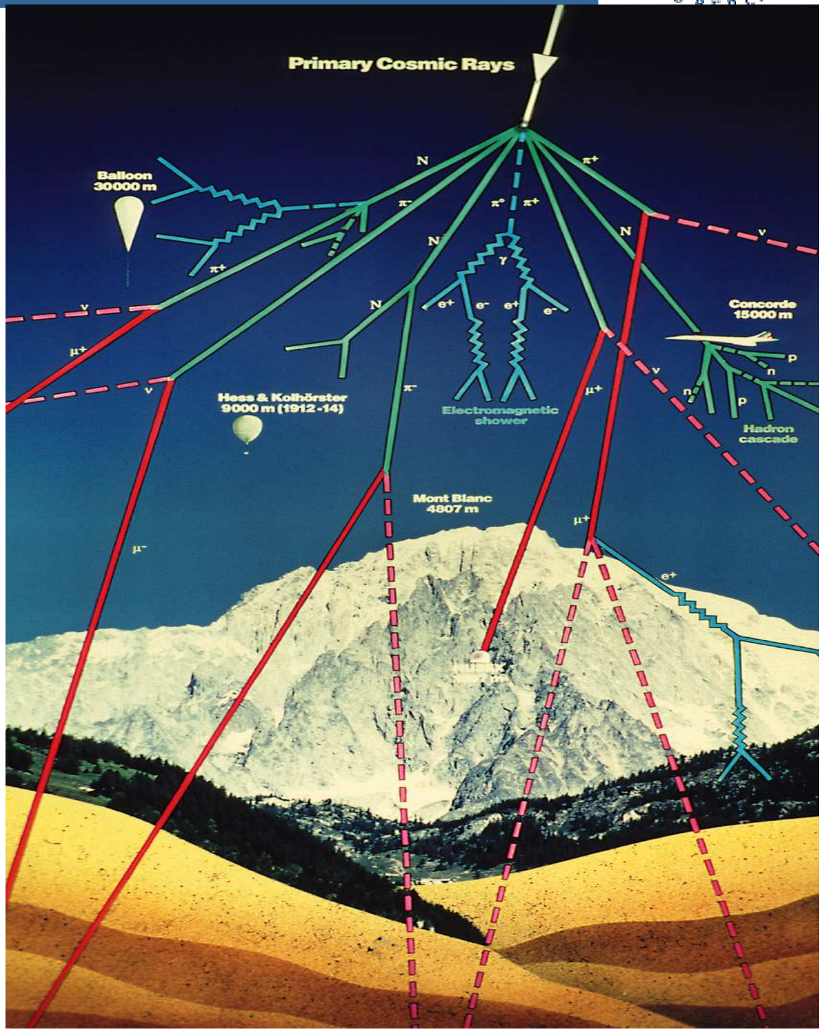
$$h_\mu \hat{=} \frac{1}{\gamma} \cdot h = \frac{1}{50} \cdot 40\,\mathrm{km} = 800\,\mathrm{m} \approx \beta c \tau$$

… und aus Sicht des Beobachters:

Zeitdilatation

$$\Delta t_{\mathrm{Erde}} \hat{=} \gamma \tau = 50 \cdot 2{,}2\,\mu\mathrm{s} = 110\,\mu\mathrm{s}$$

$$\Delta t_{\mathrm{Erde}} \cdot \beta c = 110\,\mu\mathrm{s} \cdot 3 \cdot 10^8 \,\tfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 33\,\mathrm{km} \approx h$$



6.5. Äquivalenz von Masse und Energie

Bewegungsgleichung: $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \rightarrow \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = \frac{d}{dt}(\gamma\vec{\beta}mc)$

relativistischer Impuls: $\boxed{\vec{p} = \gamma\vec{\beta}mc} \rightarrow$

Ruhemasse: m
Relativistische Masse: γm

Kinetische Energie: $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\beta^2 mc^2 \quad \rightarrow \quad T = (\gamma - 1)mc^2$

Relativistische Energie: $E = T + mc^2 = \gamma mc^2$ Ruheenergie: $\boxed{E_0 = mc^2}$

$\Rightarrow$ Energie-Impuls-Beziehung: $\boxed{E = \gamma mc^2 = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}}$

Nützliche Merkformel mit „c = 1“: $\boxed{E^2 = m^2 + \vec{p}^2}$

Nützliche Beziehungen: $\boxed{\gamma = \frac{E}{mc^2}}$ $\boxed{\vec{\beta} = \frac{\vec{p}c}{E}}$ $\boxed{\gamma\vec{\beta} = \frac{\vec{p}}{mc}}$

Vierervektoren

$$E = \gamma m c^2 = \sqrt{m^2 c^4 + \vec{p}^{\,2} c^2} \quad \Rightarrow \quad \left(\tfrac{E}{c}\right)^2 - \vec{p}^{\,2} = (m c)^2$$

Analogie: $(c t)^2 - \vec{r}^{\,2} = (c \tau)^2$

Lorentz-invariant

Eigenzeit

<u>Folgerung:</u> $(c t, \vec{r})$ und $(\tfrac{E}{c}, \vec{p})$ sind <u>Vierervektoren</u> (vgl. Theorie-VL), d.h. sie transformieren identisch unter Lorentztransformationen.

<u>Lorentz-Transformation</u>

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{\beta}\gamma\left(c t - \tfrac{\gamma}{1+\gamma}\vec{\beta}\,\vec{r}\right)$$
$$c t' = \gamma\left(c t - \vec{\beta}\,\vec{r}\right)$$

<u>Lorentz-Transformation</u>

$$\vec{p}\,' = \vec{p} - \vec{\beta}\gamma\left(\tfrac{E}{c} - \tfrac{\gamma}{1+\gamma}\vec{\beta}\,\vec{p}\right)$$
$$\tfrac{E'}{c} = \gamma\left(\tfrac{E}{c} - \vec{\beta}\,\vec{p}\right)$$

<u>Spezialfall:</u> $\vec{\beta} = \beta\,\vec{e}_z$

$$z' = \gamma(z - \beta c t)$$
$$x' = x\,, \quad y' = y$$
$$c t' = \gamma(c t - \beta z)$$

$$p_z' = \gamma\left(p_z - \beta\tfrac{E}{c}\right)$$
$$p_x' = p_x\,, \quad p_y' = p_y$$
$$\tfrac{E'}{c} = \gamma\left(\tfrac{E}{c} - \beta p_z\right)$$