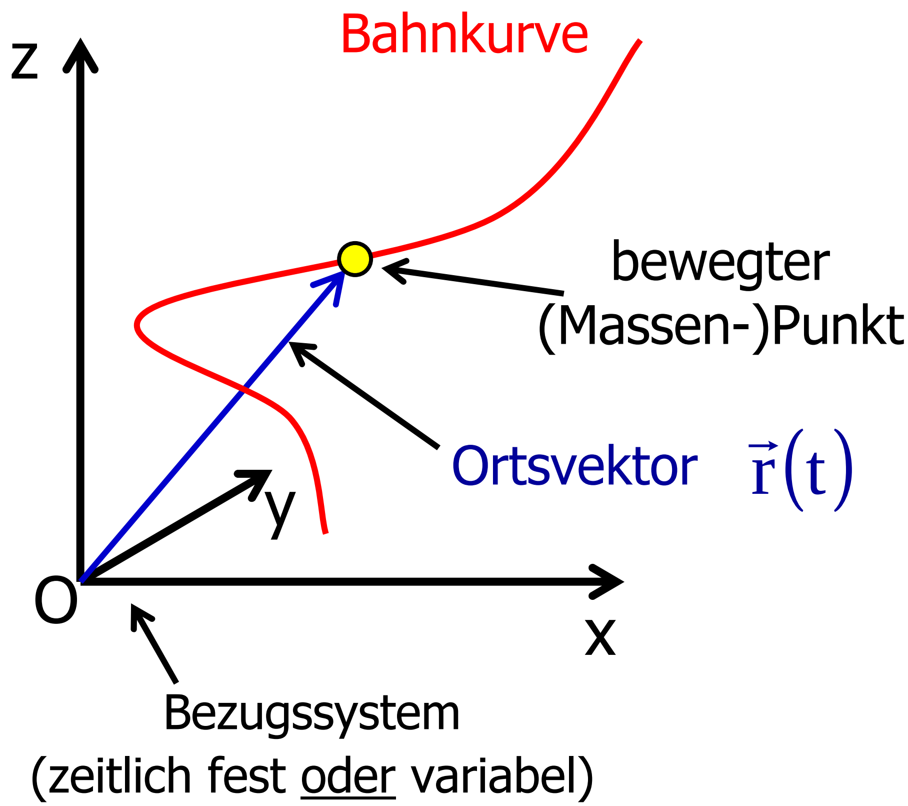
Kap. 2 Mechanik des Massenpunktes

1. Massenpunkt und Bahnkurve
2. Geschwindigkeit und Beschleunigung
3. Gleichförmige beschleunigte Bewegung
4. Allgemeine Bewegung
5. Kräfte
6. Grundgleichungen der Mechanik, Impuls und Drehimpuls
7. Energiesatz der Mechanik
8. Drehimpuls und Drehmoment
9. Kepler’sche Gesetzte und Planetenbewegung

2.1. Massenpunkt und Bahnkurve

Kinematik: Beschreibung von Bewegungsabläufen

Dynamik: Lehre der Ursachen von Bewegungen (Kräfte, Massen)



kartesische Koordinaten

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$

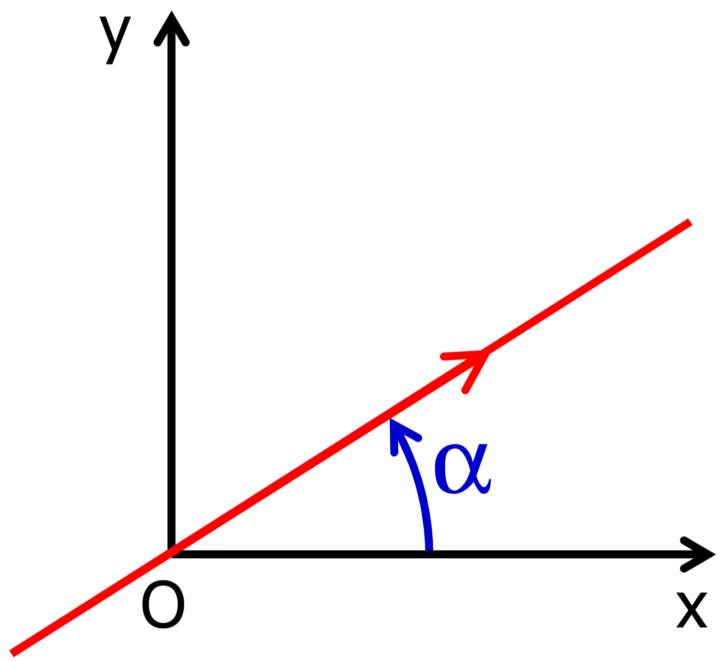
2.1. Massenpunkt und Bahnkurve

Beispiele:

a) Geradlinige, gleichförmige Bewegung in der (x,y)-Ebene

$$\left.\begin{aligned} x &= a \cdot t \\ y &= b \cdot t \end{aligned}\right\} \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{b}{a}$$

$$z = 0$$



oder äquivalent

$$x = v \cdot t \cdot \cos\alpha$$

$$y = v \cdot t \cdot \sin\alpha$$

$$z = 0$$

$$v = \sqrt{a^2 + b^2}$$

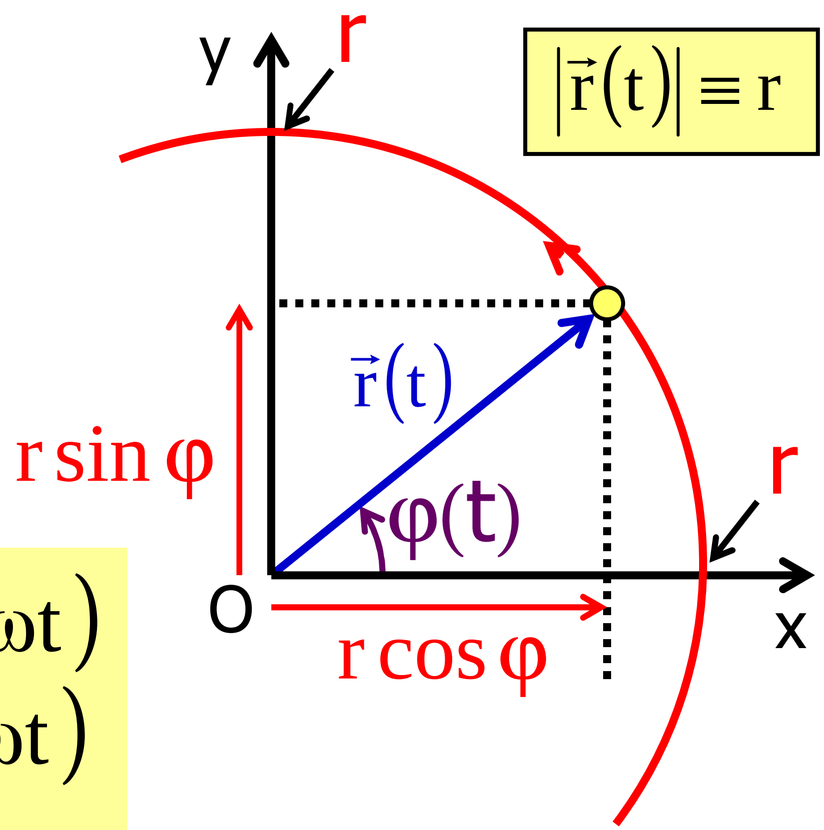
Geschwindigkeit

2.1. Massenpunkt und Bahnkurve

b) Gleichförmige Kreisbewegung in der (x,y)-Ebene

$$\varphi(t) \propto t \quad \Rightarrow \quad \varphi(t) = \omega \cdot t$$

ω = **Winkelgeschwindigkeit**

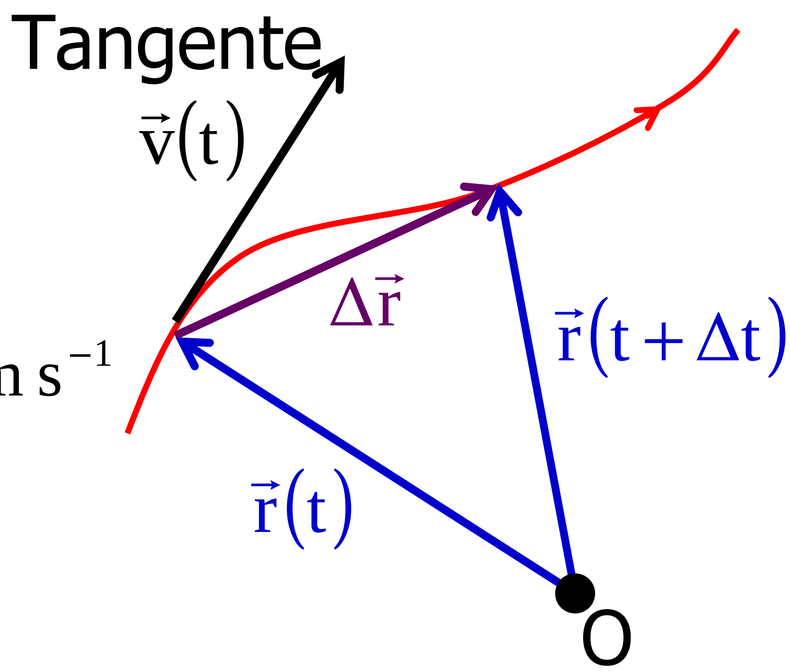


$$x(t) = r \cdot \cos\varphi(t) = r \cdot \cos(\omega t)$$
$$y(t) = r \cdot \sin\varphi(t) = r \cdot \sin(\omega t)$$
$$z(t) = 0$$

2.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung

a) Geschwindigkeit

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$



Def.: Momentangeschwindigkeit

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}}$$

$$[v] = \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Def.: Mittlere Geschwindigkeit:

$$\boxed{\langle\vec{v}\rangle(t, \Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t} \vec{v}(\tau)\,d\tau = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}}$$

2.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung

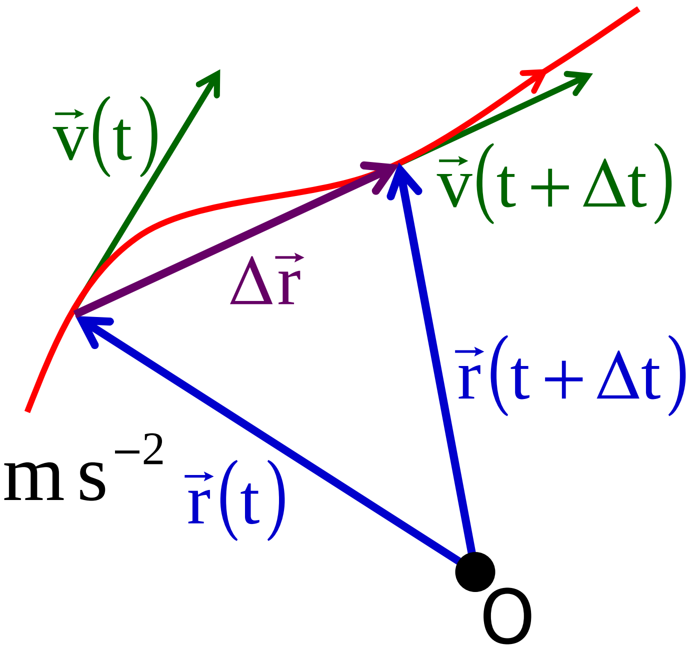
b) Beschleunigung

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$$

Def.: Momentanbeschleunigung

$$\boxed{\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}}}$$

$$[a] = m\,s^{-2}$$



Def.: Mittlere Beschleunigung:

$$\boxed{\langle\vec{a}\rangle(t,\Delta t) = \frac{1}{\Delta t}\int_{t}^{t+\Delta t} \vec{a}(\tau)\,d\tau = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}}$$

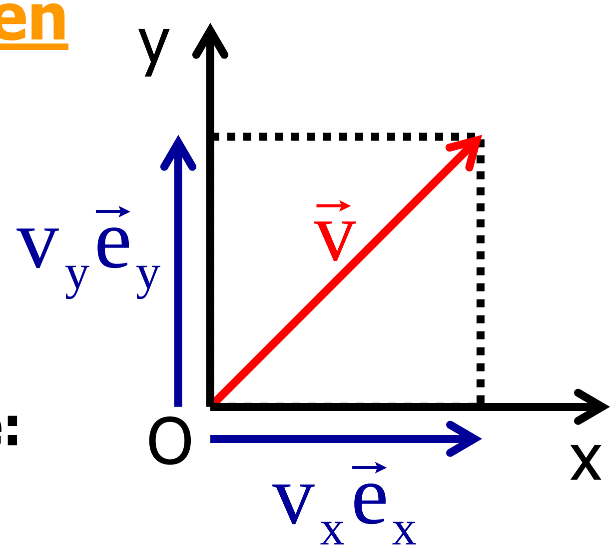
Addition wie bei Geschwindigkeit (wie bei allen Vektoren)

2.2. Geschwindigkeit und Beschleunigung

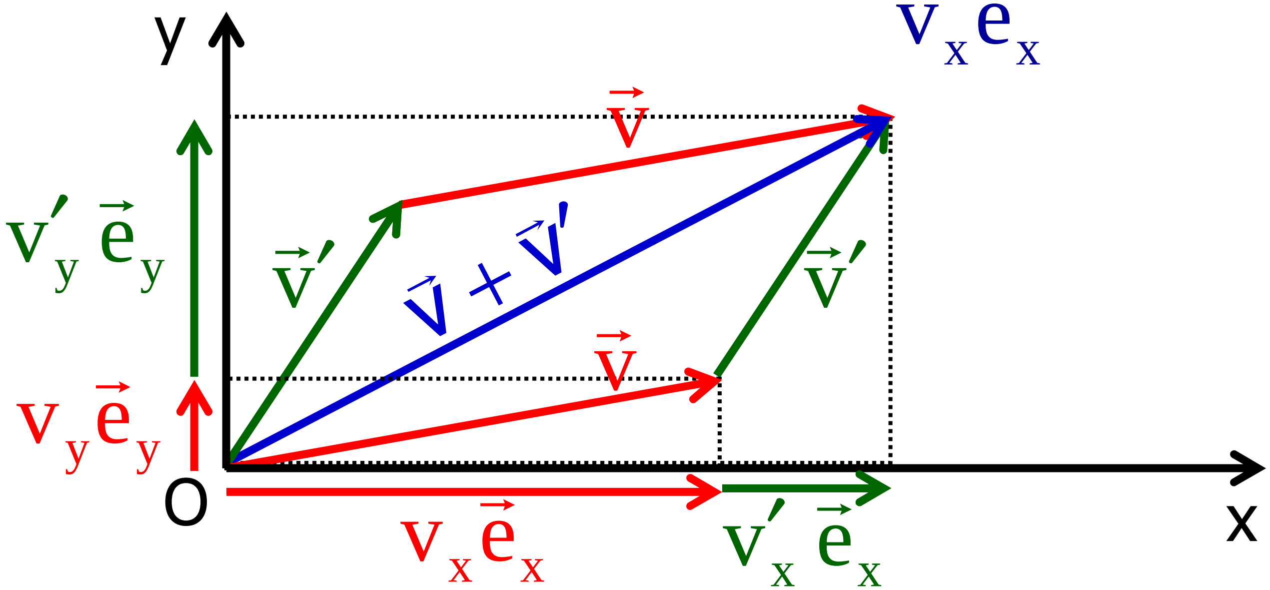
c) Addition von Geschwindigkeiten

Komponentenzerlegung:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = v_x \vec{e}_x + v_y \vec{e}_y + v_z \vec{e}_z$$



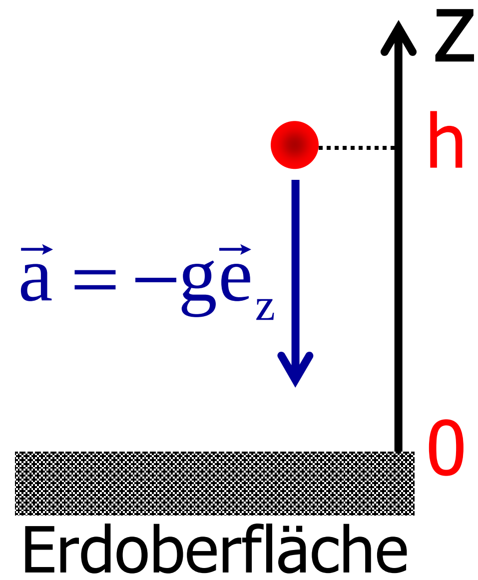
Addition komponentenweise:



2.3. Gleichförmig beschleunigte Bewegungen

a) Freier Fall:

Massenanziehung $\Rightarrow$ Erdbeschleunigung g



$$\frac{dv_z}{dt} = -g = \text{const.}$$

$$\boxed{g = 9{,}81\,\text{ms}^{-2}}$$

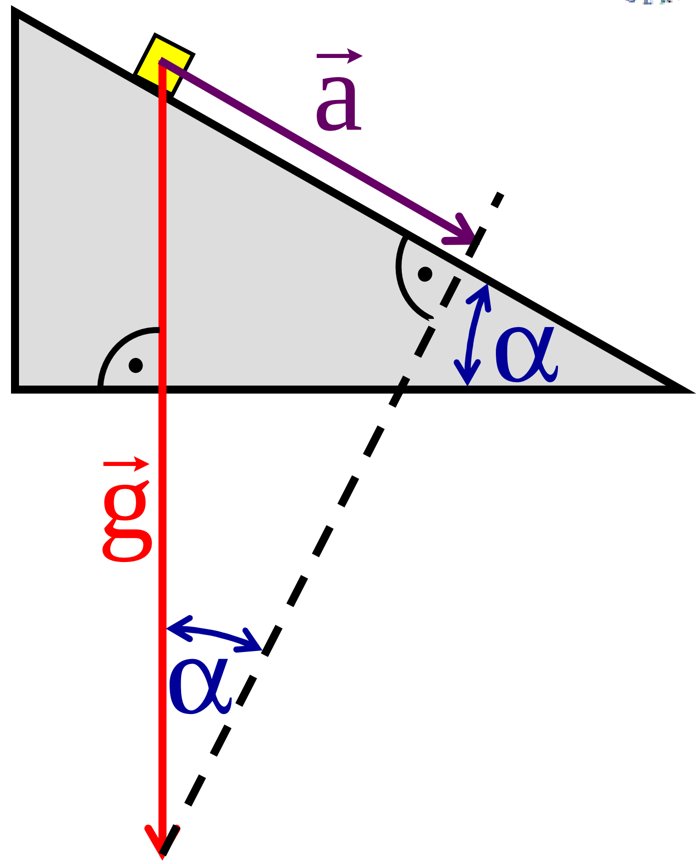
Tafelrechnung $\Rightarrow$ $\boxed{v_z(t) = -gt}$ $\boxed{z(t) = h - \tfrac{1}{2}gt^2}$

Fallzeit T: $z(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad h = \tfrac{1}{2}gT^2$

$\Rightarrow$ $\boxed{g = \frac{2h}{T^2}}$ $\rightarrow$ **Methode zur Messung von g**

2.3. Gleichförmig beschleunigte Bewegungen

b) Schiefe Ebene:



Tangetialbeschleunigung:

$$a = g \sin\alpha = \text{const.}$$

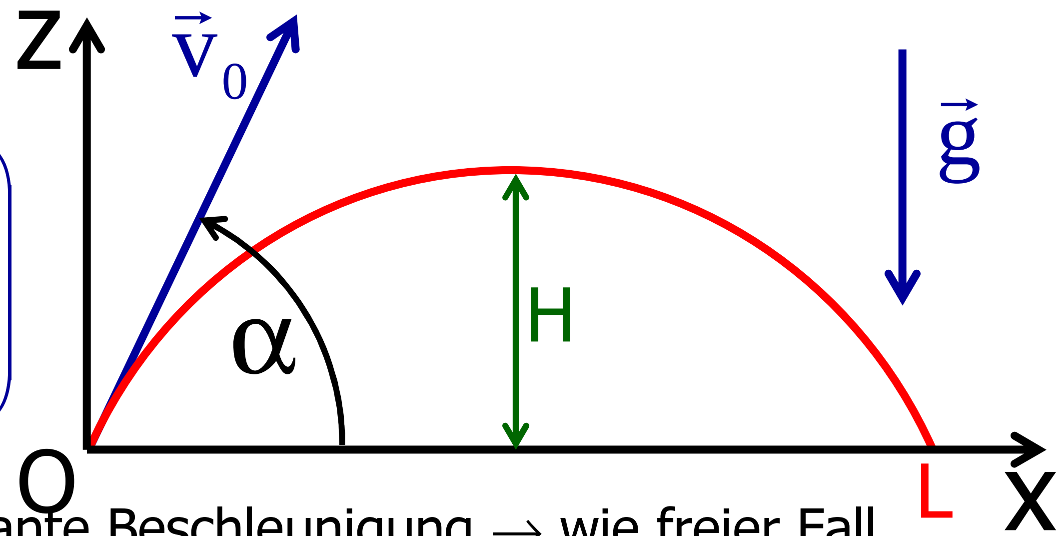
$\Rightarrow$ Lösung wie im freien Fall

Gerutschte Strecke s(t): $$s(t) = \tfrac{1}{2} g t^2 \sin\alpha \quad \propto \sin\alpha$$

Laufzeit: $$t = \sqrt{\frac{2s}{g \sin\alpha}} \quad \propto \frac{1}{\sqrt{\sin\alpha}}$$

2.3. Gleichförmig beschleunigte Bewegungen

c) Schräger Wurf:



$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} v_0 \cos\alpha \\ 0 \\ v_0 \sin\alpha \end{pmatrix}, \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ komponentenweise konstante Beschleunigung $\rightarrow$ wie freier Fall

$$\Rightarrow \quad \vec{r}(t) = \vec{v}_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z$$

- $x(t) = v_{0x}\, t$ unabhängig von v_{0z}
- $x(t) \propto t$, $z(t) \propto t^2$ $\Rightarrow$ z(x) ist Parabel

Tafelrechnung $\Rightarrow$

Wurfweite

$$L = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$$

Wurfhöhe

$$H = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2\alpha$$

$H = \max$ bei $\alpha = 90°$