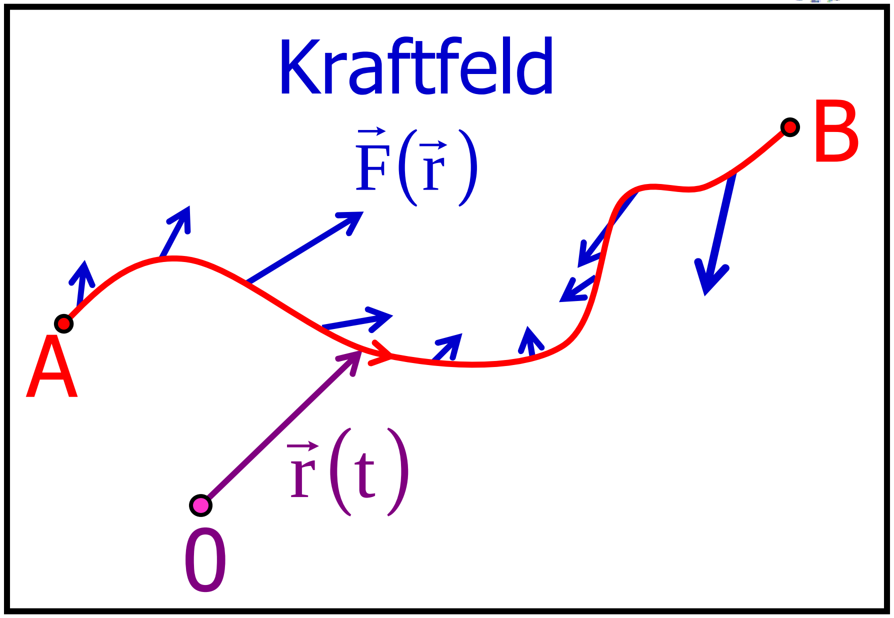
2.7. Energiesatz

Def.: Bei Verschiebung verrichtete **Arbeit** =

$$\boxed{dW = -\vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Vom Kraftfeld verrichtete Arbeit:

$$\boxed{-dW = \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$



$$[W] = 1\,\mathrm{Nm} = 1\,\mathrm{kg\,m^2\,s^{-2}} = 1\,\mathrm{J}\ \ (\text{Joule})$$

Def.: Bei Verschiebung aufgebrachte **Leistung**

$$\boxed{P = \frac{dW}{dt} = -\vec{F}\cdot\vec{v}}$$

$$[P] = 1\,\mathrm{Js^{-1}} = 1\,\mathrm{W}\ \ (\text{Watt})$$

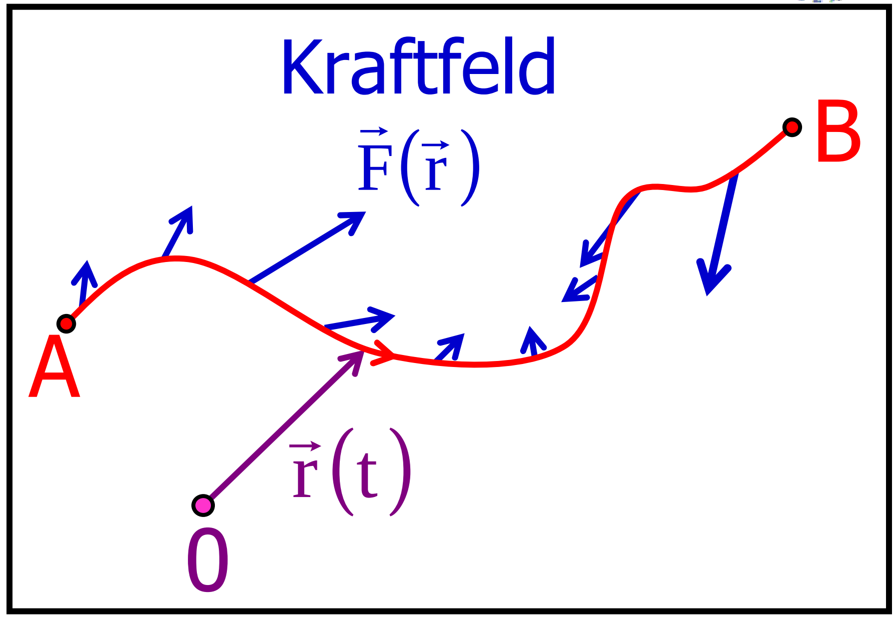
2.7. Energiesatz

Arbeit ⇒ Bewegung

z.B. freie Bewegung im Kraftfeld:

$$-\Delta W = \int_A^B \vec{F}(\vec{r})\,d\vec{r} = \tfrac{1}{2} m \vec{v}^{\,2} \Big|_A^B$$

(Beweis: → Tafelrechnung)



→ Definition der **kinetische Energie** T eines Massepunktes

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} m v^2}$$

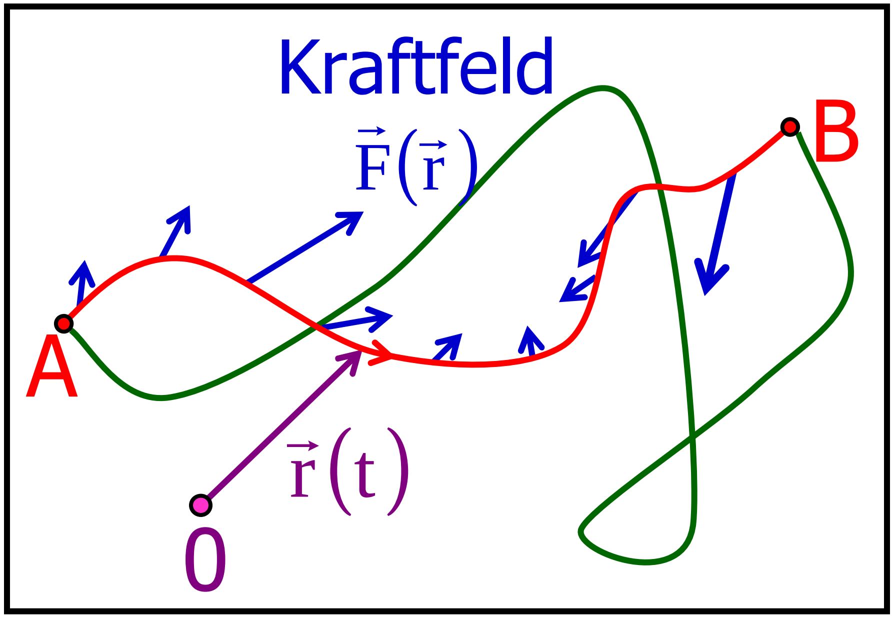
$$[T] = 1\,J$$

(manchmal alternative Benennung $T \equiv E_{kin}$)

2.7. Energiesatz

Def.: Kraftfeld konservativ ⇔ es gibt Stammfunktion V:

$$\boxed{\vec{F} = -\,\mathrm{grad}\; V \equiv -\vec{\nabla}\, V}$$



V heißt **Potential** des Feldes

Es gilt:

- ∃ Potential V ⇔ $\Delta W_{A\rightarrow B}$ ist wegunabhängig ⇔ $\boxed{\oint \vec{F}\, d\vec{r} = 0}$
- ∃ Potential V ⇒ $\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F} = \vec{0}}$

("⇐" gilt nur für hinreichend glatte Felder in einfach zusammenhängenden Gebieten)

2.7. Energiesatz

Def.: **Potentielle Energie** eines Massenpunktes (bzgl. $\vec{r}_0$) im konservativen Kraftfeld:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V \Leftarrow \boxed{V(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}\,')\, d\vec{r}\,'}$$

skalares Feld

Def.: **Äquipotentialflächen** = Flächen mit V = const.

$$\vec{\nabla} V = \frac{\partial V}{\partial \vec{r}} \quad \Rightarrow \quad \delta V = \delta \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V \quad \text{für} \quad \delta \vec{r} \to \vec{0}$$

Folgerung: $\delta \vec{r}$ in Äquipotentialfläche $\Rightarrow$ V = const.

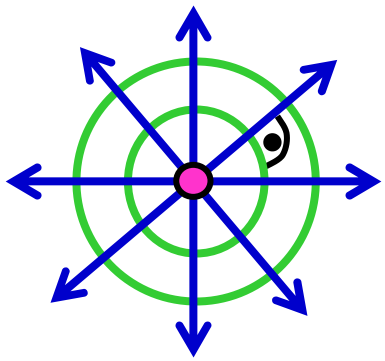
$$\Rightarrow \quad \delta V = 0 \Rightarrow \boxed{-\vec{F} = \vec{\nabla} V \perp \delta \vec{r}}$$

- Feldlinien stehen senkrecht auf Äquipotentialflächen
- Bewegung in Äquipotentialflächen $\Rightarrow$ $\Delta W = 0$
- Verschiedene Äquipotentialflächen sind diskunkt

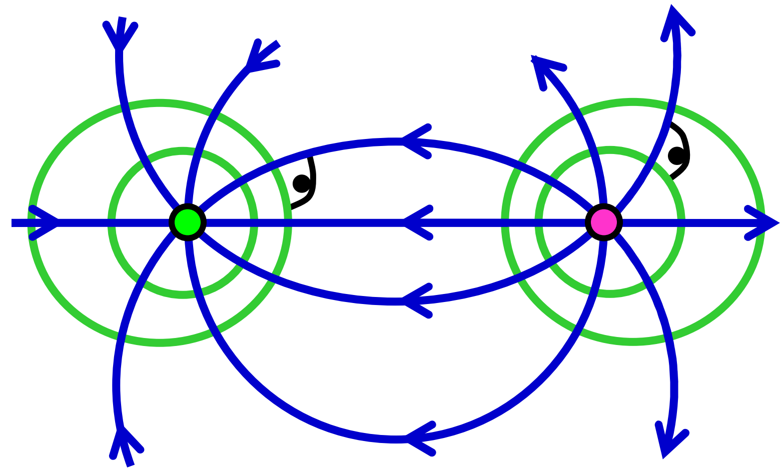
2.7. Energiesatz

Beispiele:

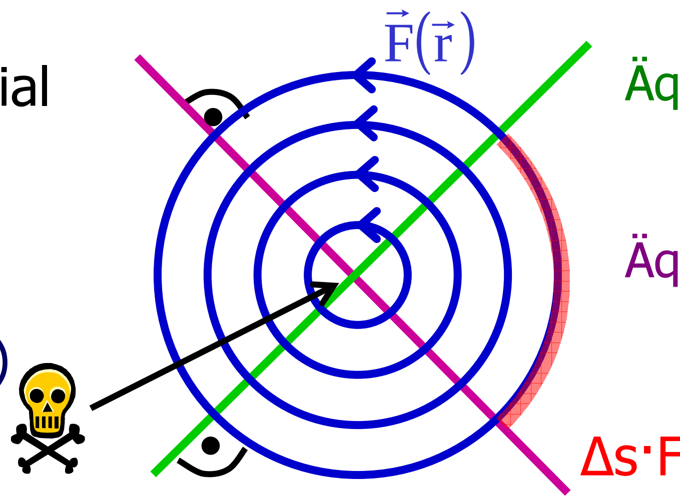
Radialfeld



Dipolfeld



Wirbelfeld hat kein Potential



Äquipotentialfläche 2

$V_2 = V_1 - \Delta s \cdot F$

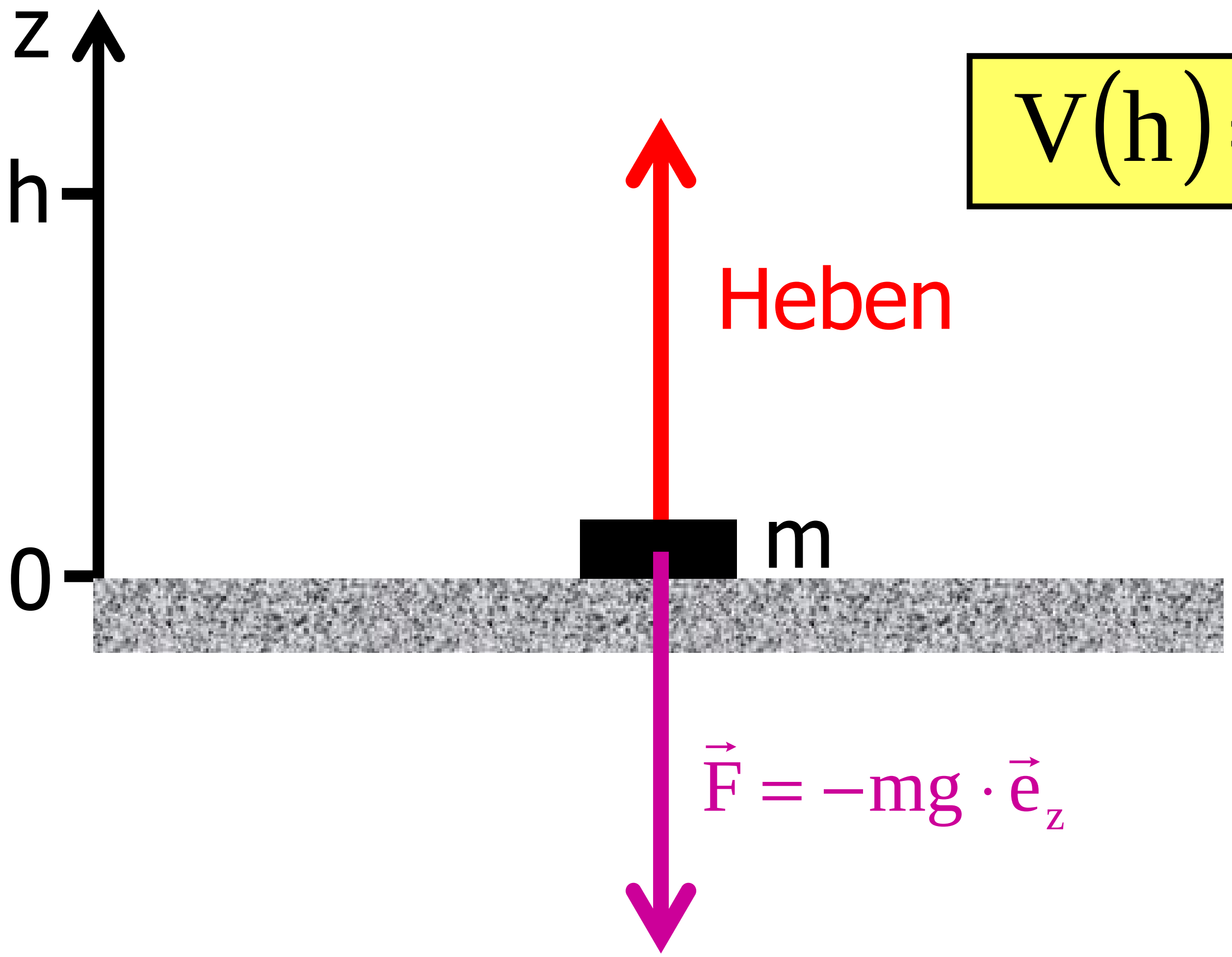
Äquipotentialfläche 1

Potential V_1

Beweis: 2 Äquipotentialflächen ($V_1 \neq V_2$) berühren sich nicht !

2.7. Energiesatz: Beispiele

a) Heben von Lasten: $\rightarrow$ Potentielle Energie



$$\vec{F} = -mg \cdot \vec{e}_z$$

$$\boxed{V(h) = mgh}$$

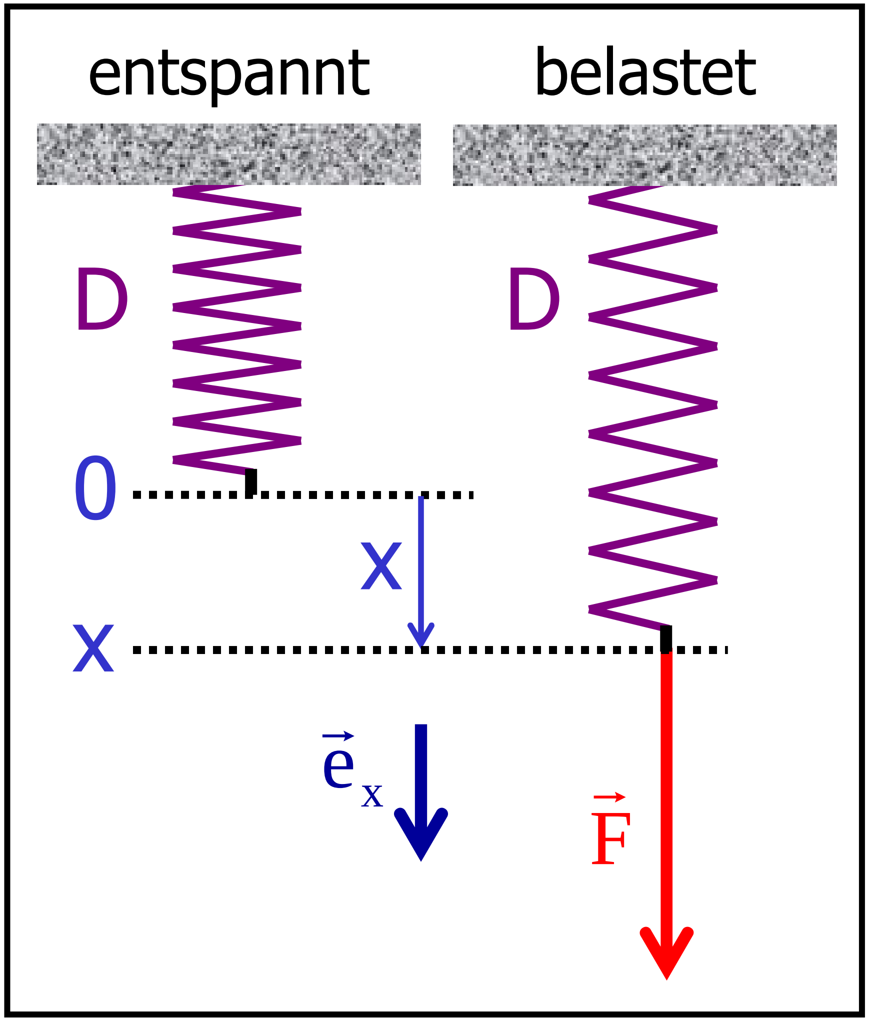
2.7. Energiesatz: Beispiele

b) Potentielle Energie der Feder:

Hookesches Gesetz

$$F = D \cdot (x - x_0)$$

D = Federkonstante



Tafelrechnung $\Rightarrow$

$$V(x) = \tfrac{1}{2} D x^2$$

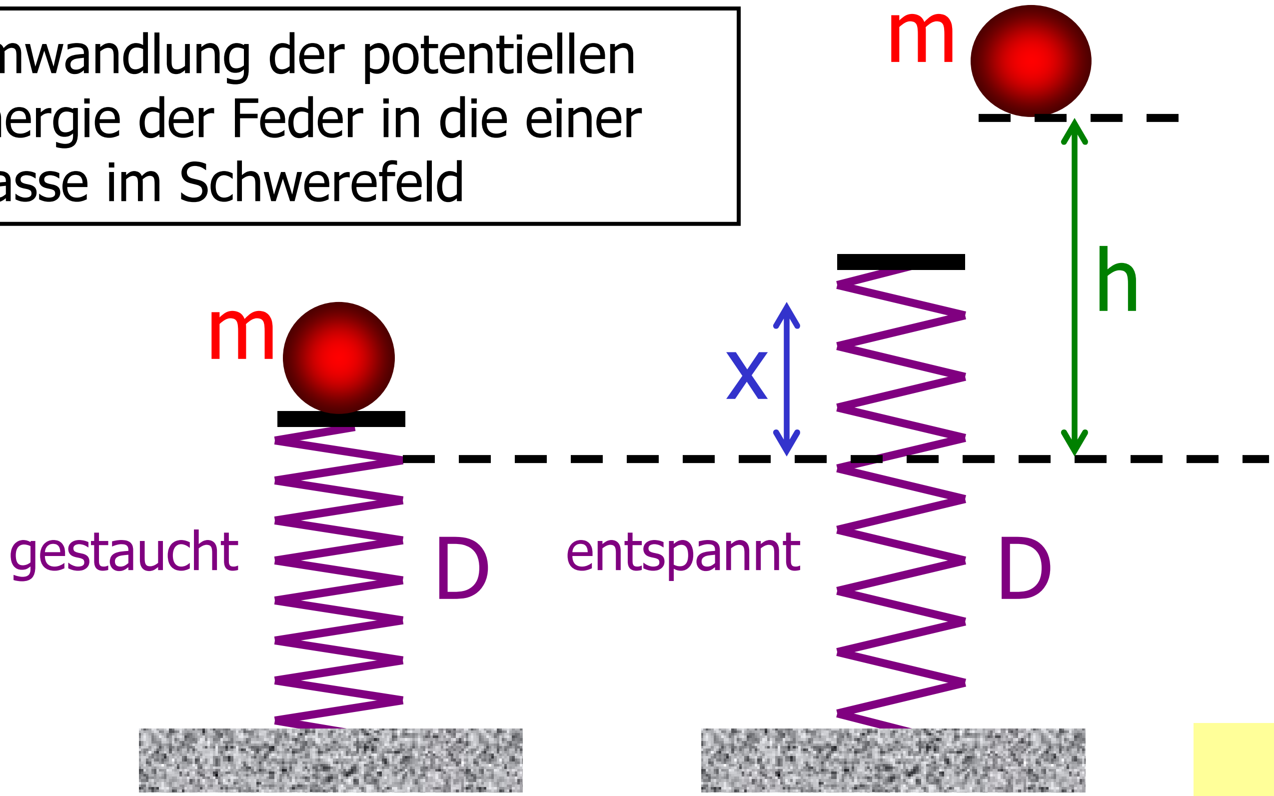
2.7. Energiesatz: Beispiele

Experiment:

Umwandlung der potentiellen Energie der Feder in die einer Masse im Schwerefeld

Maximalhöhe

(Umkehrpunkt)



$$V = \tfrac{1}{2} D x^2 \quad = \quad mgh \quad \Rightarrow \quad h = \frac{D}{2mg} \cdot x^2 \propto x^2$$

2.7. Energiesatz: Beispiele

Fadenpendel

$$m(L\ddot{\varphi}) = F = -mg\sin\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{L}\sin\varphi = 0$$

ω^2

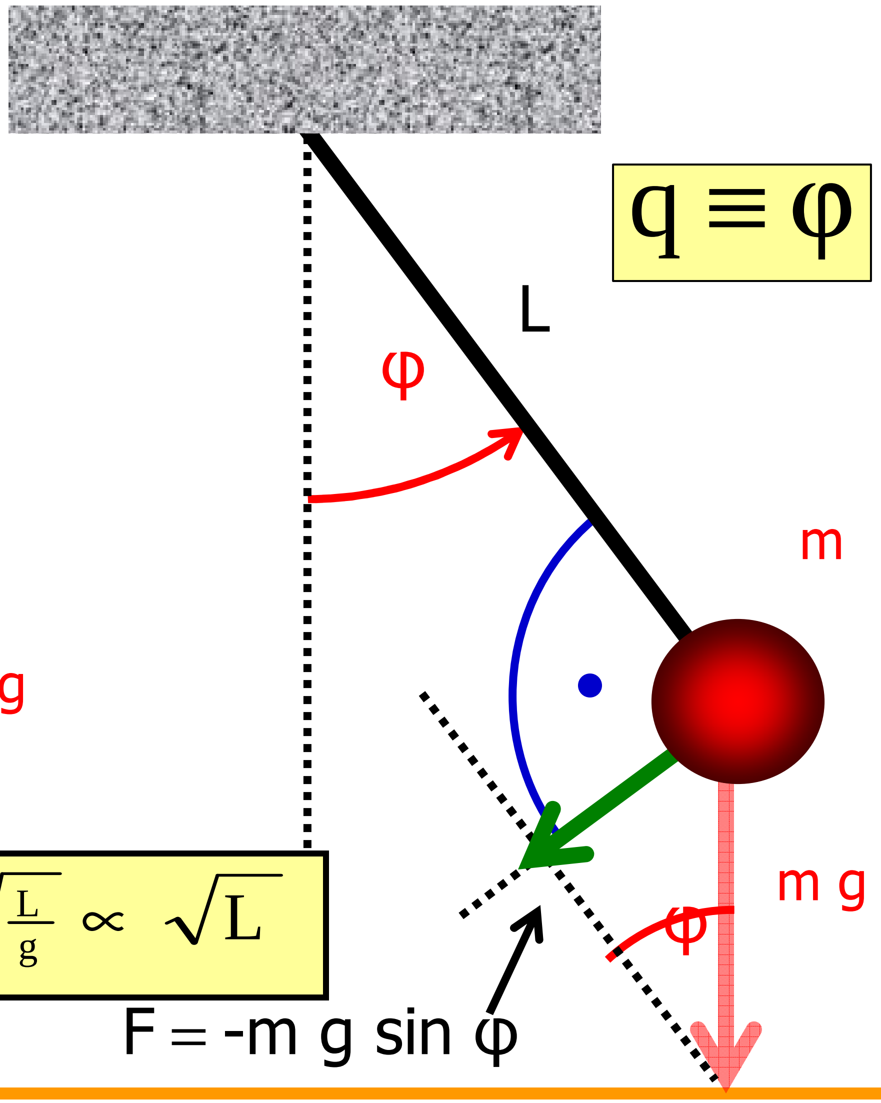
$\Rightarrow$ anharmonische Schwingung!

$|\varphi| \ll 1 \;\Rightarrow$ harmonische Näherung

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \propto \sqrt{L}}$$



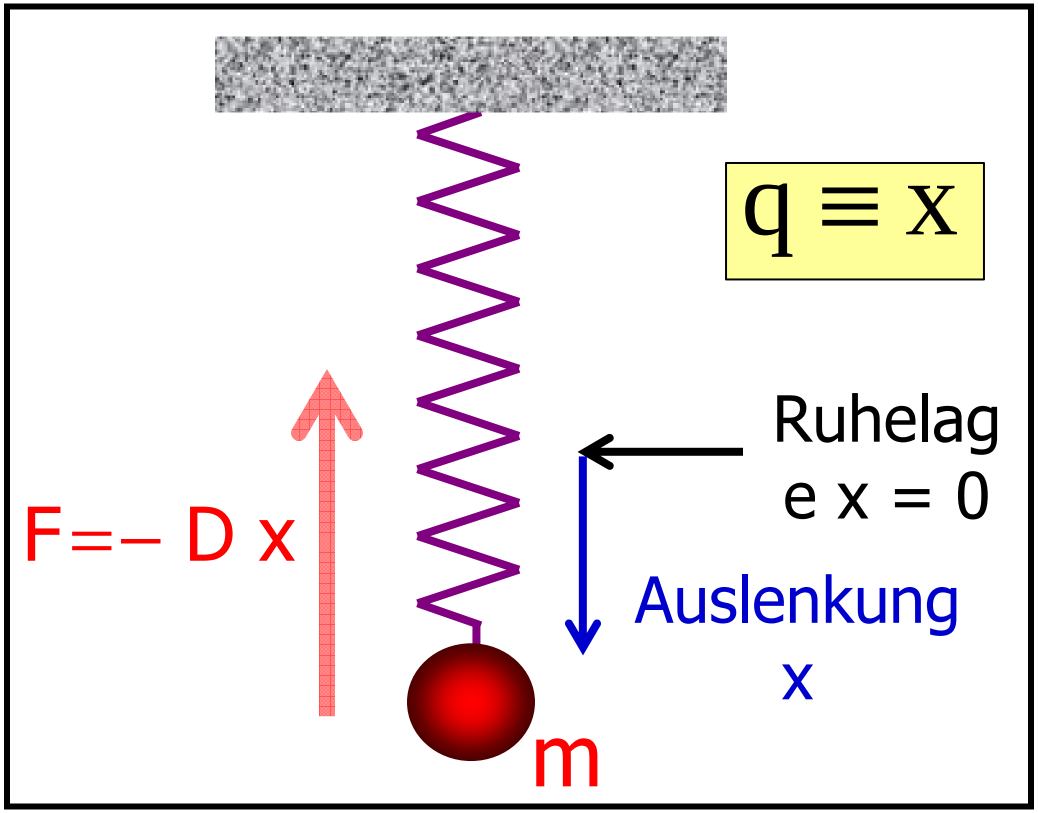
2.7. Energiesatz: Beispiele

Federpendel

$$m\ddot{x} = F = -Dx$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} + \underbrace{\frac{D}{m}}_{\omega^2} x = 0$$



$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \propto \sqrt{m}$$