Kap. 4 Dynamik ausgedehnter Körper

1. Der starre Körper
2. Massenschwerpunkt
3. Bewegung des starren Körpers
4. Trägheitsmoment und Rotationsenergie
5. Rotation und Translation
6. Intertialsysteme und Trägheitskräfte
7. Rotation des Starren Körpers
8. Der Kreisel

4.1. Der Starre Körper

Def.: Starrer Körper

System von Massenpunkten fester Relativkoordinaten

Homogene Körper

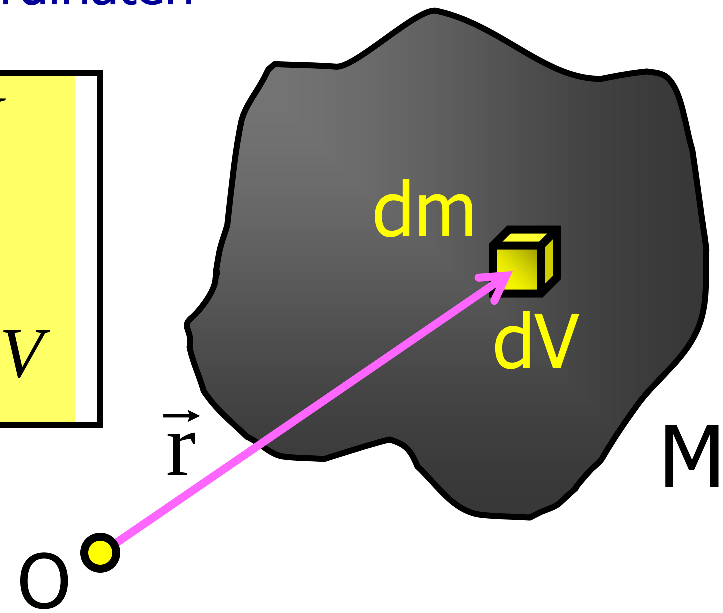
$$\Updownarrow$$

$$\rho(\vec{r}) = \text{const.}$$

$$dm = \rho(\vec{r})\,dV$$

$$\rho(\vec{r}) = \textit{Dichte}$$

$$M = \int \rho(\vec{r})\,dV$$



Komponenten der Bewegung:

1. Translation: Massenpunkte laufen auf kongruenten Bahnen

2. Rotation: Massenpunkte laufen auf konzentrischen Kreisen

4.2. Massenmittelpunkt

Def.: Massenmittelpunkt (MMP)

$$\vec{R} = \frac{\int \rho(\vec{r})\,\vec{r}\,dV}{\int \rho(\vec{r})\,dV} = \frac{\int \vec{r}\,dm}{M}$$

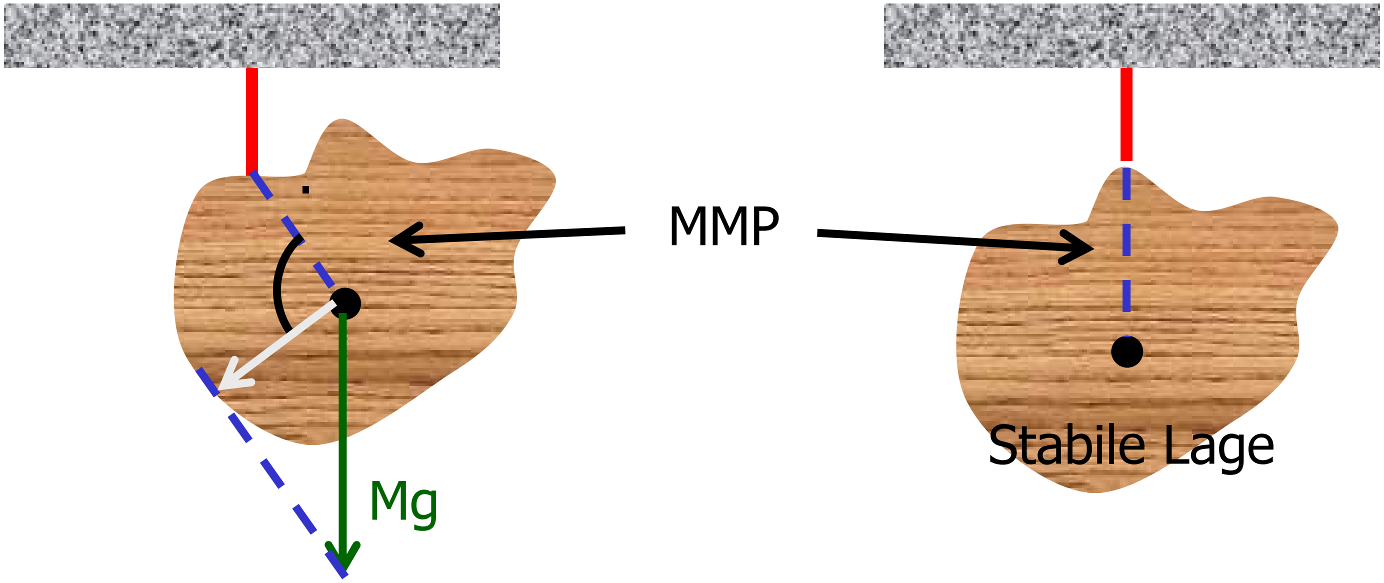
Folgerung: Gesamtimpuls $\vec{P} \equiv \int d\vec{p} = \int \dot{\vec{r}}\,dm = \frac{d}{dt}\int \vec{r}\,dm = M\dot{\vec{R}}$

Bewegungsgl.: $\dot{\vec{P}} = M\ddot{\vec{R}} = \sum \vec{F}_{ext}$

Translationsbewegung: Der MMP bewegt sich wie ein Massenpunkt der Masse M unter dem Einfluss der externen Kräfte. Dieser Teil ist also gewöhnliche Punktmechanik.

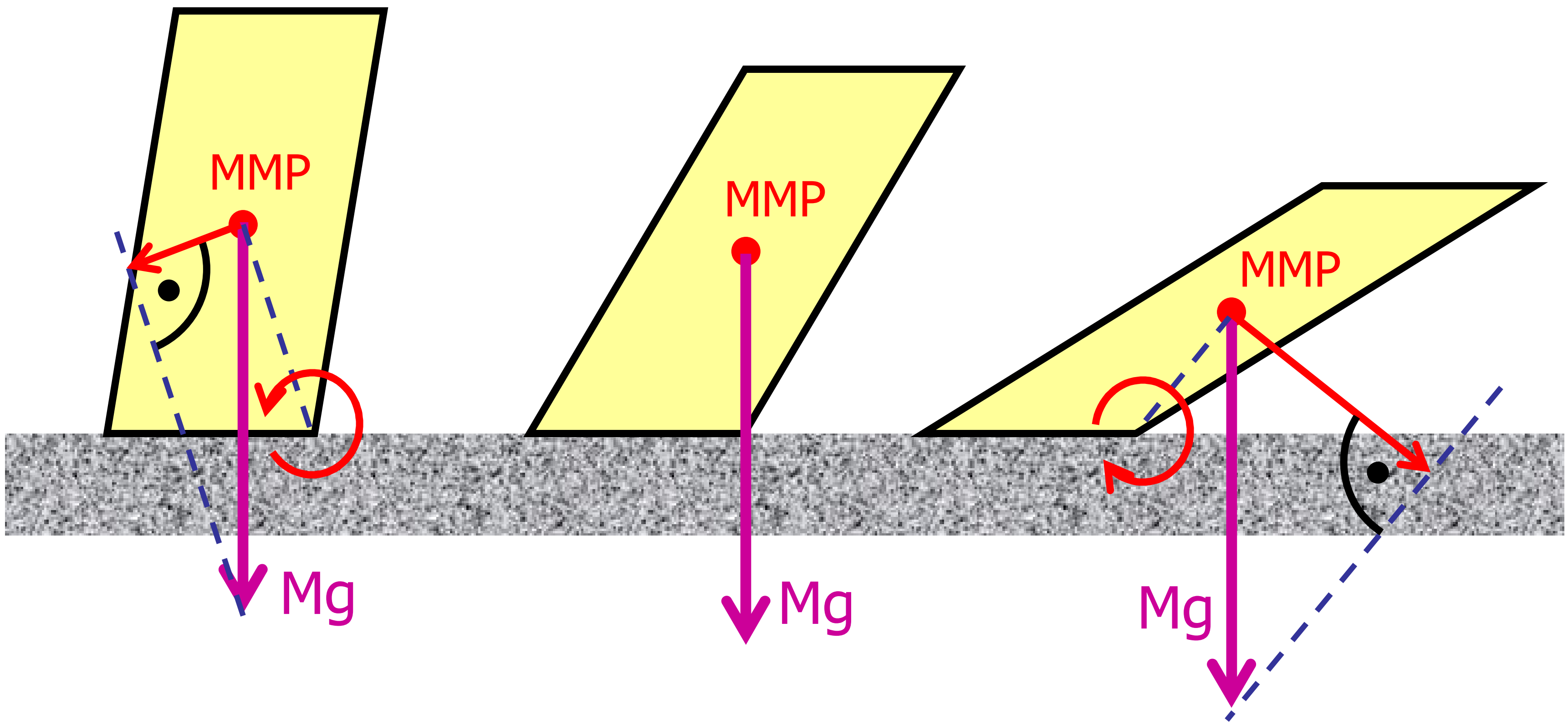
Dieses Kapitel: Rotationsbewegung um den ruhenden MMP

4.2. Massenmittelpunkt: Bestimmung



Experiment:

4.2. Massenmittelpunkt: Stabilität



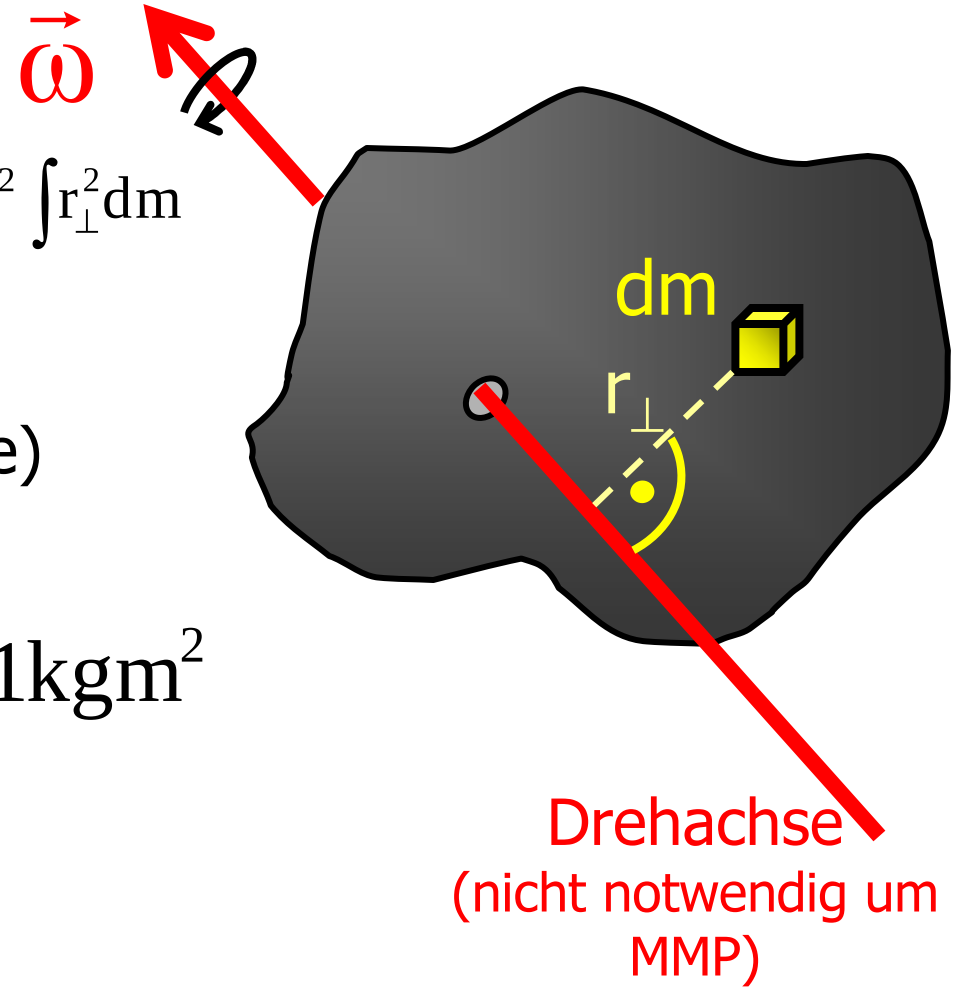
stabil

labil

instabil

4.3. Rotationsenergie

$$T_{rot} = \int \tfrac{1}{2} v^2 dm = \tfrac{1}{2} \int (\omega \cdot r_\perp)^2 dm = \tfrac{1}{2} \omega^2 \int r_\perp^2 dm$$



Def.: Trägheitsmoment
(bezüglich der Drehachse)

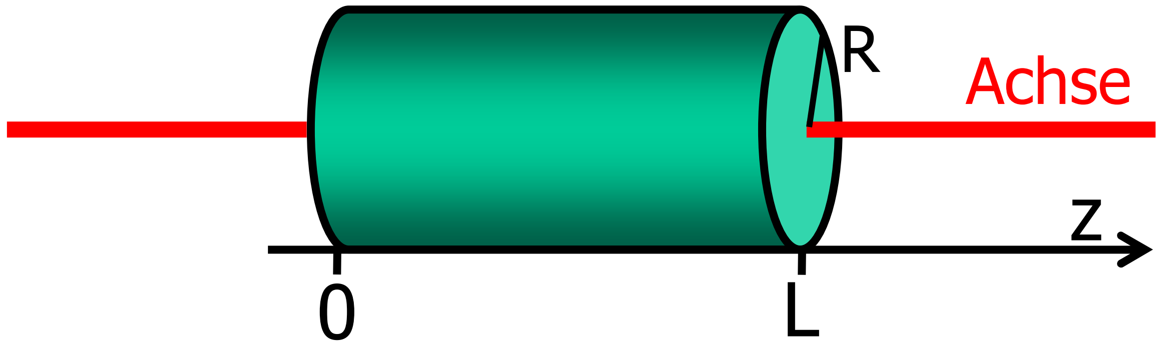
$$\boxed{J = \int r_\perp^2 dm} \qquad [J] = 1\,\mathrm{kgm}^2$$

Folgerung: $\boxed{T_{rot} = \tfrac{1}{2} J \omega^2}$

4.3. Trägheitsmoment

Beispiel: Vollzylinder ($\rightarrow$ Tafelrechnung)

$$\boxed{J_{VZ} = \tfrac{1}{2} M R^2}$$



Vergleich:

Vollzylinder: $J_{VZ} = \tfrac{1}{2} M R^2$

Hohlzylinder: $J_{HZ} = M R^2$

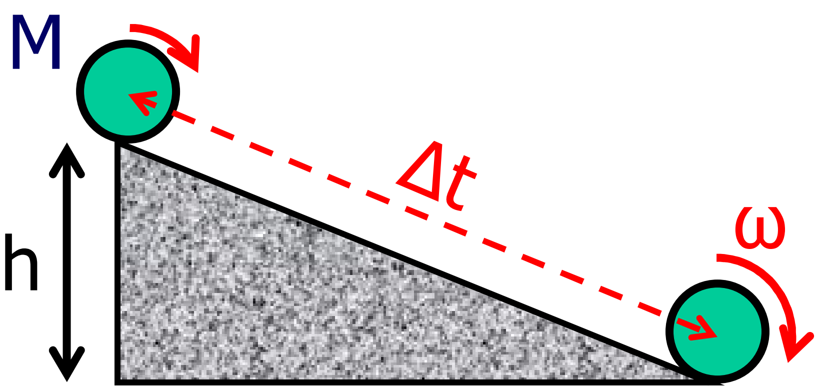
Vollkugel: $J_{VK} = \tfrac{2}{5} M R^2$

Hohlkugel: $J_{HK} = \tfrac{2}{3} M R^2$

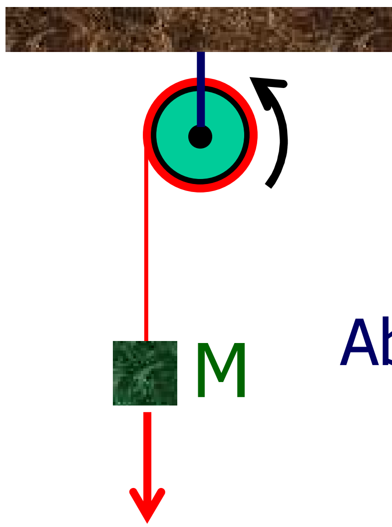
$$\boxed{\begin{array}{ccccccc} J_{VK} & < & J_{VZ} & < & J_{HK} & < & J_{HZ} \\ 0{,}4 & : & 0{,}5 & : & 0{,}667 & : & 1 \end{array}}$$

4.3. Trägheitsmoment

Beispiel: „Rollende“ Zylinder



Zylinder auf schiefer Ebene

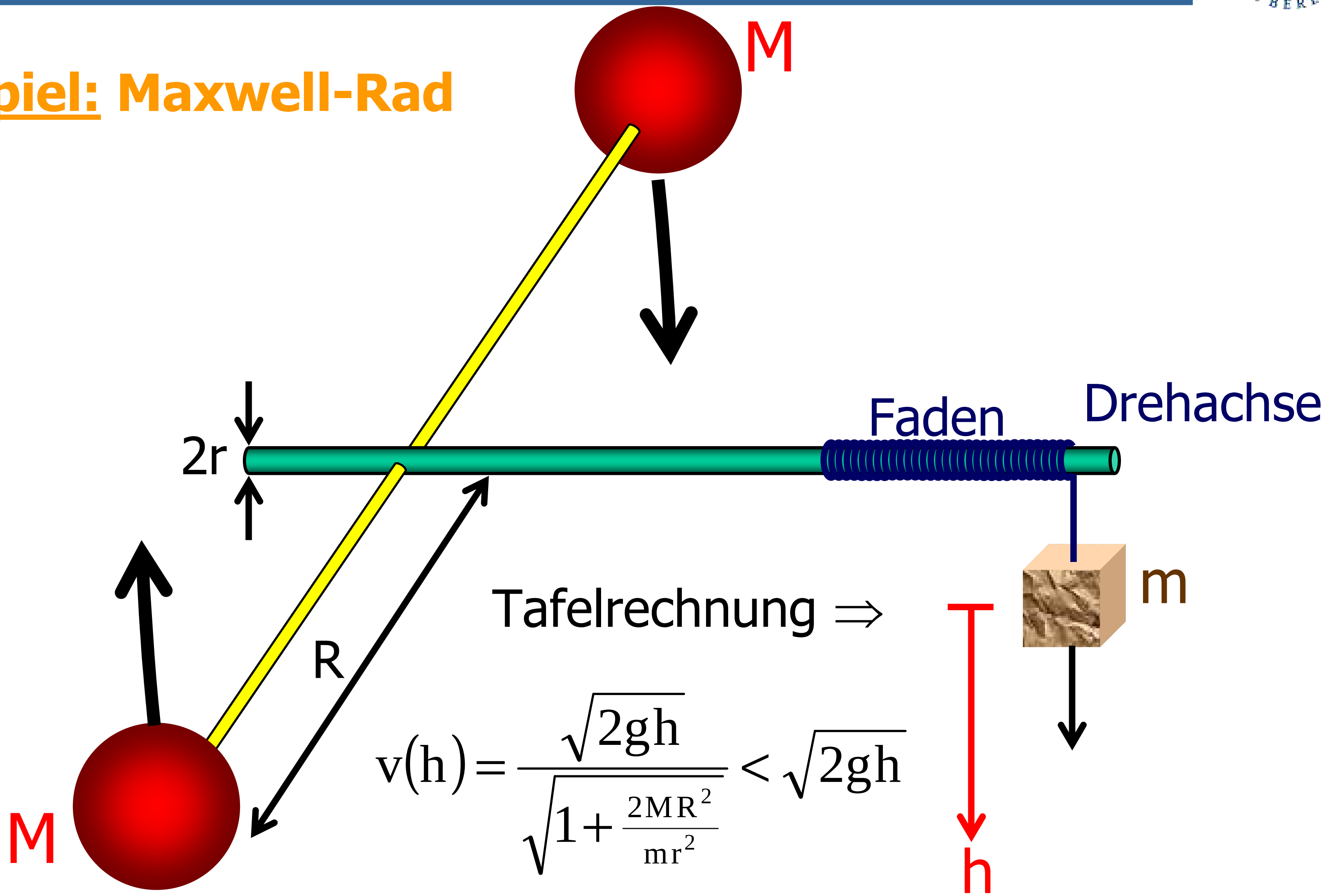


Abrollender Faden

Energiebilanz (→ Tafelrechnung) $\Rightarrow$ $$\boxed{\frac{\Delta t_{HZ}}{\Delta t_{VZ}} = \frac{2}{\sqrt{3}}}$$

4.3. Trägheitsmoment

Beispiel: Maxwell-Rad



Tafelrechnung $\Rightarrow$

$$v(h) = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1+\frac{2MR^2}{mr^2}}} < \sqrt{2gh}$$

4.4. Steinerscher Satz

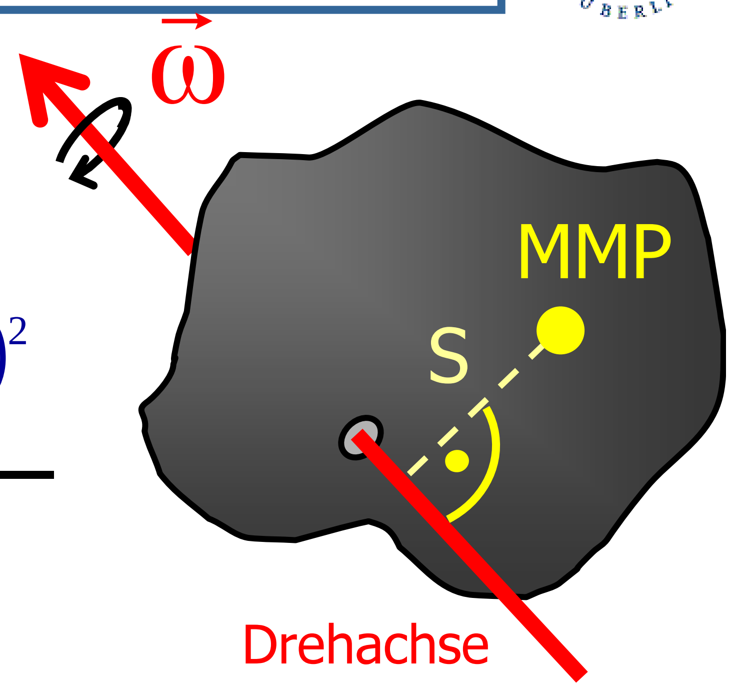
Totale kinetische Energie:

Rotation um MMP: $T_{rot}^{MMP} = \frac{1}{2} J_S \omega^2$

Translation von MMP: $T_{trans}^{MMP} = \frac{1}{2} M (S\omega)^2$
(Kreisbewegung um Achse)

Rotation um Drehachse: $T_{rot} = \frac{1}{2} J \omega^2$

$\Rightarrow$ **Steinerscher Satz: $J = J_S + M S^2$**



Es reicht, Drehachsen zu betrachten, die durch den MMP gehen. Die Übersetzung auf parallelverschobene Achsen ist trivial.

4.5. Drehmoment und Drehimpuls

Translation $\rightarrow$ **Rotation**

Masse $\quad m \quad \rightarrow$ **Trägheitsmoment** $\quad J = \int r_\perp^2 \, dm$

(bzgl. Drehachse)

Geschwindigkeit $\vec{v} \quad \rightarrow$ **Winkelgeschwindigkeit**

$$\vec{\omega} \quad , \quad \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Kinetische Energie $\rightarrow$ **Rotationsenergie**

$$T = \tfrac{1}{2} m v^2 \qquad\qquad T_{rot} = \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

4.5. Drehmoment und Drehimpuls

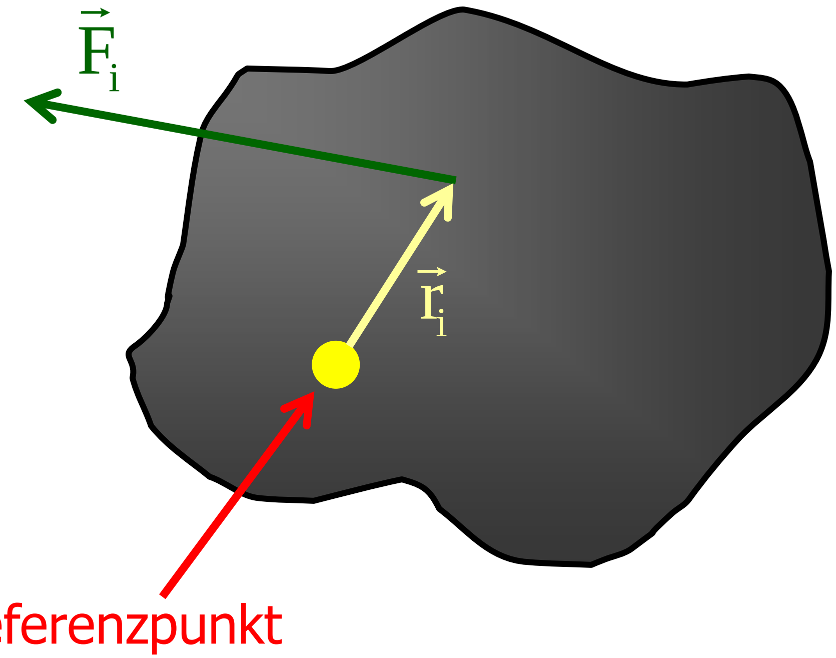
Translation	$\rightarrow$	Rotation
Impuls	$\rightarrow$	**Drehimpuls**
$\vec{p}$		$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\,dm = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$
$p = mv$		$L_\omega = J\omega = J\dot{\varphi} \quad (L_\omega \equiv \vec{L} \cdot \vec{e}_\omega)$
Kraft $\vec{F}$	$\rightarrow$	**Drehmoment** $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$

Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{p}} = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} \quad \rightarrow \quad \dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{M}_i^{(ext)}$$

4.5. Bewegungsgleichung

$$\dot{\vec{L}} = \sum_i \vec{M}_i^{(\mathrm{ext})}$$



Folgerung: Drehimpulserhaltung

Wirken keine äußeren Drehmomente auf einen Körper (bzgl. eines Referenzpunktes), bleibt der Drehimpuls (bzgl. des Referenzpunktes) konstant.