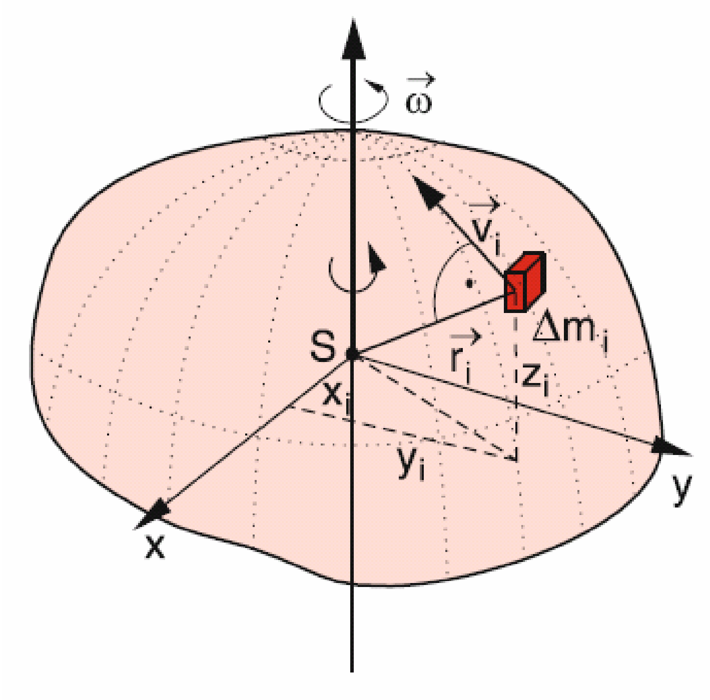
4.7. Rotation des starren Körpers



Rotation des starren Körpers um eine beliebige Achse durch den **Schwerpunkt S**:
Jedes Massenelement Δm trägt Zum Drehimpuls und zur Rotationsenergie bei.

$$L_\omega = \Delta m_i (r_i \times v_i)$$

$$E_{rot} = \frac{1}{2} I_\omega \omega^2$$

4.7. Rotation des Starren Körpers

Trägheitstensor

$$\vec{L} = \int \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})\, dm \equiv \hat{I}\vec{\omega} \xrightarrow[\text{Komponenten}]{\text{in}} \boxed{L_i = \sum_{j=1}^{3} I_{ij}\,\omega_j}$$

mit $\vec{L} = \sum_{i=1}^{3} L_i \vec{e}_i \;, \quad \vec{\omega} = \sum_{j=1}^{3} \omega_j \vec{e}_j$

und

Trägheitstensor

$$\hat{I} = (I_{ij}) \,, \quad I_{ij} = \int \left(r^2 \delta_{ij} - r_i r_j \right) dm$$

- Trägheitstensor $\rightarrow$ Körpereigenschaft, unabhängig von Drehachse
- symmetrisch: $I_{ij} = I_{ji}$
- positiv definit: $\vec{r} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot (\hat{I}\,\vec{r}) > 0$

4.7. Rotation des Starren Körpers

Beispiel:

→ Töpferei

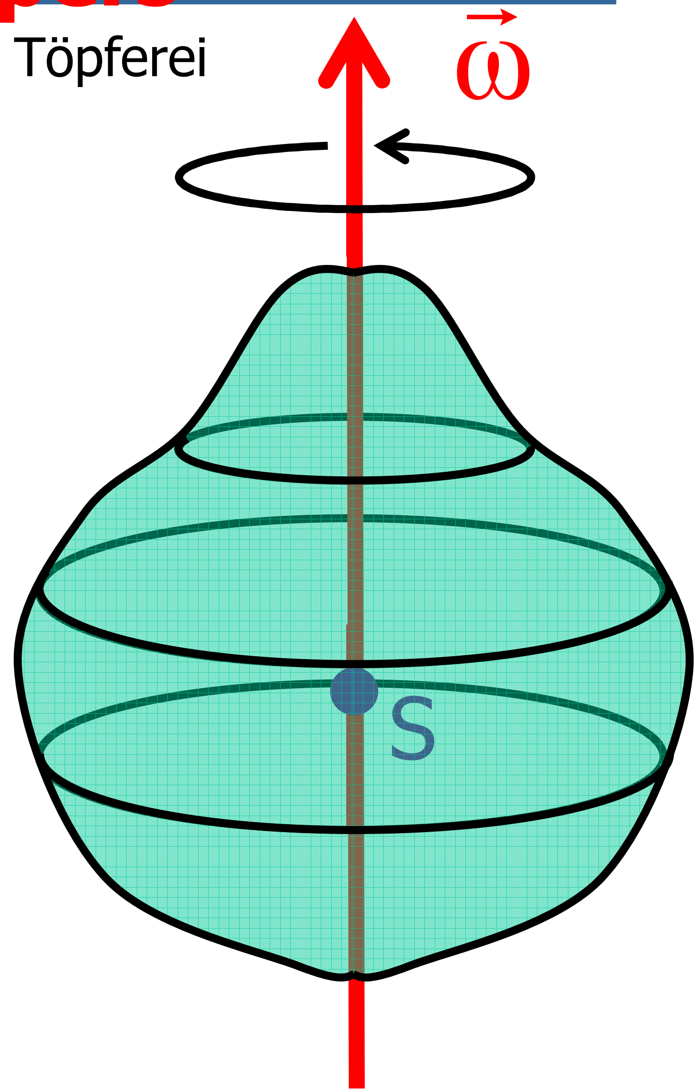
Körper mit Rotationssymmetrie

Schwerpunkt liegt auf Symmetrieachse

Spezialfall: Drehung um Symmetrieachse

$$\Rightarrow \quad \vec{L} \parallel \vec{\omega}\,, \quad L = L_{\omega} = I\omega$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = I\vec{\omega}}$$



4.7. Rotation des starren Körpers

Zusammenhang von I bzgl. Drehachse $\vec{e}_\omega$ mit Tensor $\hat{I}$:

$$\vec{L} = \hat{I}\vec{\omega} \quad , \quad \vec{\omega} = \omega\vec{e}_\omega$$

$$\vec{L}\vec{e}_\omega = L_\omega = I\,\omega \quad , \quad \vec{L}\vec{e}_\omega = \vec{e}_\omega\left(\hat{I}\,\vec{\omega}\right) = \vec{e}_\omega\left(\hat{I}\,\vec{e}_\omega\right)\omega$$

Folgerung: $$\boxed{I = \vec{e}_\omega\left(\hat{I}\,\vec{e}_\omega\right)}$$

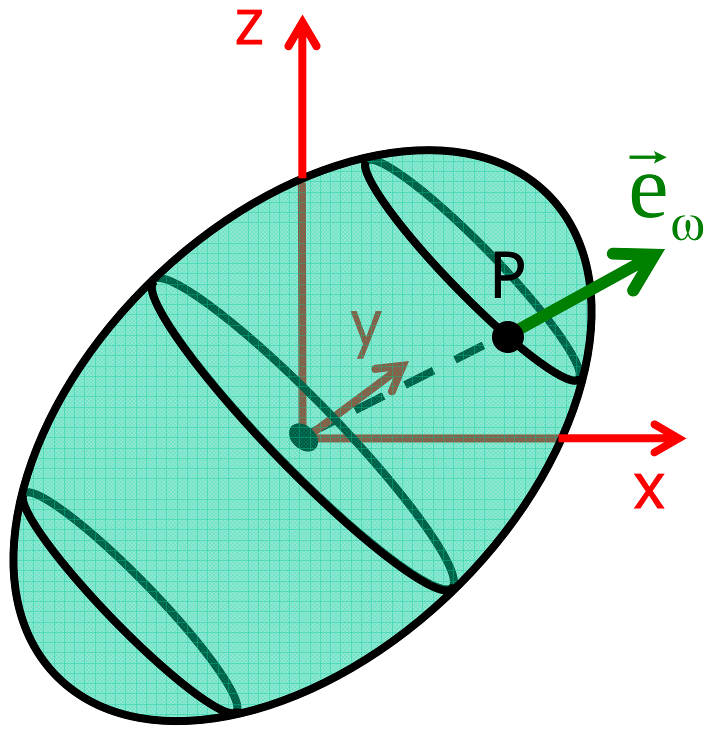
Folgerung: $$\boxed{T_{rot} = \tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\vec{\omega}\left(\hat{I}\,\vec{\omega}\right)}$$

4.7. Rotation des starren Körpers

<u>Definition:</u> Trägheitsellipsoid $\rightarrow$ alle $\vec{r}$ mit $\boxed{\vec{r}\left(\hat{I}\,\vec{r}\right)=1}$

$$I=\vec{e}_\omega\left(\hat{I}\,\vec{e}_\omega\right)\;\Rightarrow\;1=\frac{\vec{e}_\omega}{\sqrt{I}}\left(\hat{I}\,\frac{\vec{e}_\omega}{\sqrt{I}}\right)$$

$$\Rightarrow\quad \vec{r}_P=\frac{\vec{e}_\omega}{\sqrt{I}}\;,\quad\boxed{I=\left|\vec{r}_P\right|^{-2}}$$



Tafelrechnung $\Rightarrow$ $\vec{L}$ steht senkrecht auf Trägheitsellipsoid

$\Rightarrow$ i.a. gilt $\vec{L}\nparallel\vec{\omega}$

4.7. Hauptachsen des Trägheitsellipsoides

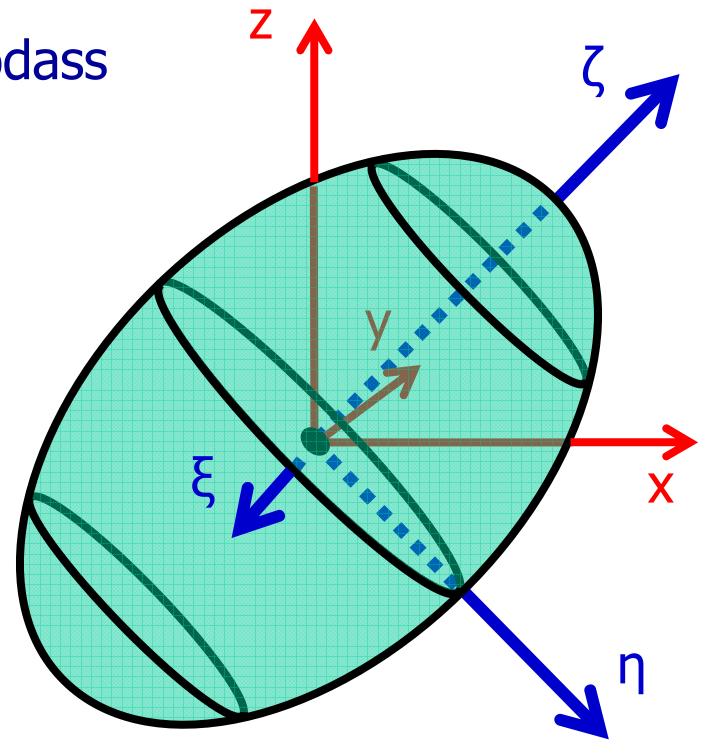
Drehung (x , y , z) → (ζ , η , ξ), sodass

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_\zeta & 0 & 0 \\ 0 & I_\eta & 0 \\ 0 & 0 & I_\xi \end{pmatrix} , \quad I_\zeta \le I_\eta \le I_\xi$$

Hauptträgheitsmomente (HTM)

$$\vec{r}_P = \frac{\vec{e}_\omega}{\sqrt{I}} \quad \Rightarrow$$

ζ → große Halbachse
η → mittlere Halbachse
ξ → kleine Halbachse

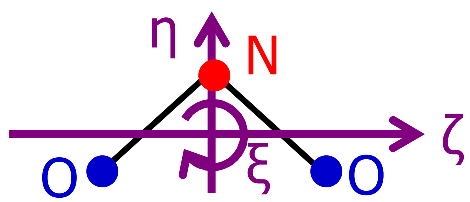


Hauptachsen ξ, η, ζ stehen senkrecht auf Oberfläche

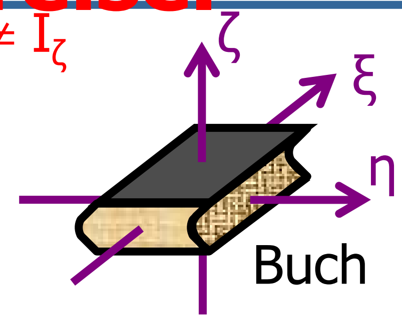
Folgerung: $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$ falls $\vec{\omega} \parallel$ Hauptachse

4.7. Trägheitsellipsoid und Kreisel

Asymmetrische Kreisel: $I_\zeta \neq I_\eta \neq I_\xi \neq I_\zeta$

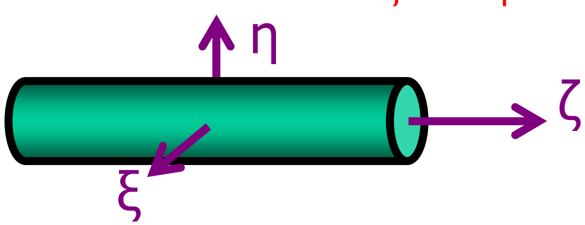


NO_2 - Molekül

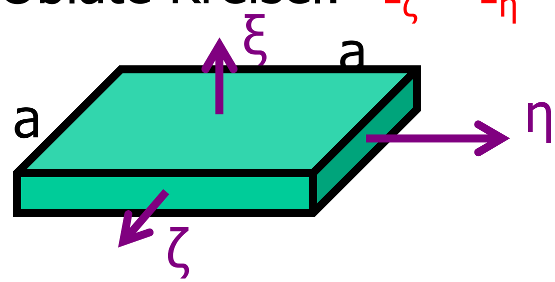


Symmetrische Kreisel: 2 HTMe gleich, z.B. Rotationskörper

Prolate Kreisel: $I_\zeta < I_\eta = I_\xi$

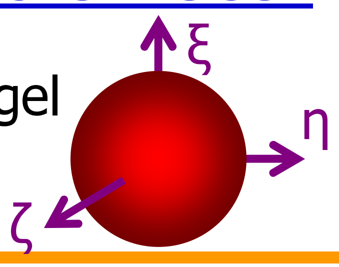


Oblate Kreisel: $I_\zeta = I_\eta < I_\xi$

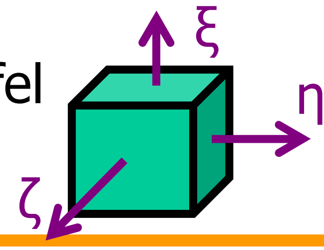


Sphärische Kreisel: $I_\zeta = I_\eta = I_\xi$ Trägheitsellipsoid $\rightarrow$ Kugel

Kugel



Würfel



4.7. Freie Achsen

Freie Achsen = Mögliche Drehachsen

ohne äußere Drehmomente ← $\vec{\omega} = \text{const.}$

Wegen $\vec{\omega} \nparallel \vec{L} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{M}^{(\text{ext})} \neq \vec{0}$

folgt:

$$\boxed{\text{Freie Achse} \Leftrightarrow \vec{\omega} \parallel \vec{L} \Leftrightarrow \text{Hauptachse}}$$

(samt Entartung bei Symmetrie)

Stabilität freier Achsen:

große Halbachse $\zeta \rightarrow$ stabil gegen kleine Störung
mittlere Halbachse $\eta \rightarrow$ instabil
kleine Halbachse $\xi \rightarrow$ stabil