

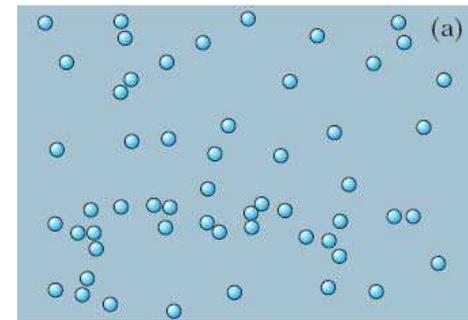
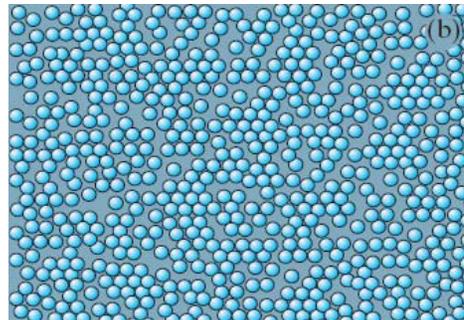
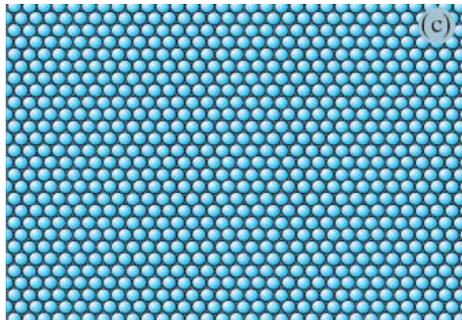
Kap. 5 Reale feste und flüssige Körper



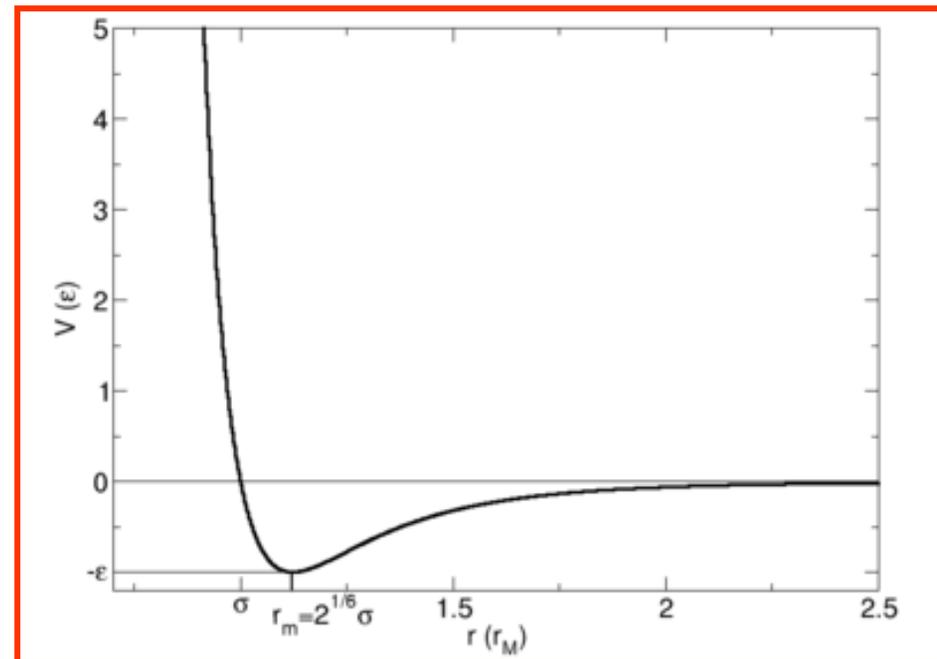
1. Atomares Modell
2. Deformierbare feste Körper
3. Hydrostatik
4. Phänomene an Grenzflächen
5. Reibung zwischen festen Körpern

5.1. Atomares Modell

- **Agregatzustände** fest, flüssig, gasförmig:



- **Potentielle Energie** zwischen zwei Atomen
- Elastische Eigenschaften und Kräfte zwischen Körpern können auf Kräfte zwischen den Atomen oder Molekülen zurückgeführt werden



5.2. Deformierbare Medien

Wesentliche Einschränkung: betrachte nur isotrope, homogene Körper
 Allgemeine Theorie: Landau, Lifschitz („Elastizitätstheorie“)

Elastizitätsmodul, Hookesches Gesetz

Def.: Zugspannung

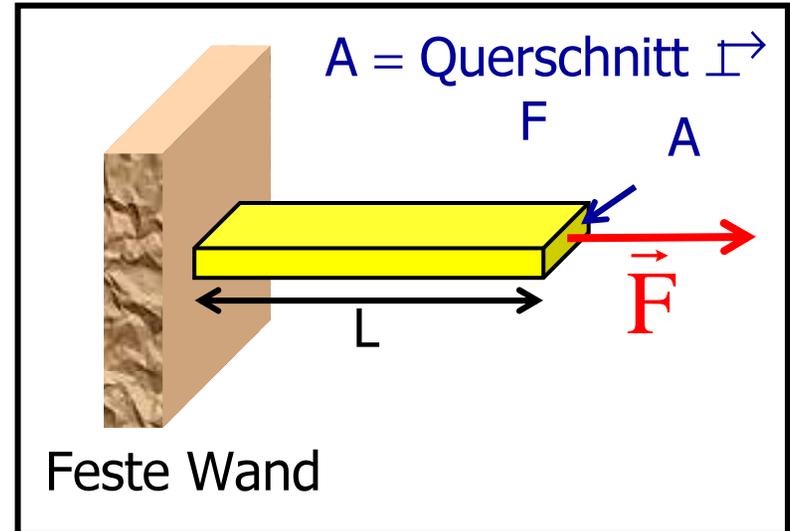
$$\sigma = \frac{F}{A}$$

Relative Dehnung

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Hookesches Gesetz:

$$\sigma = E \varepsilon$$



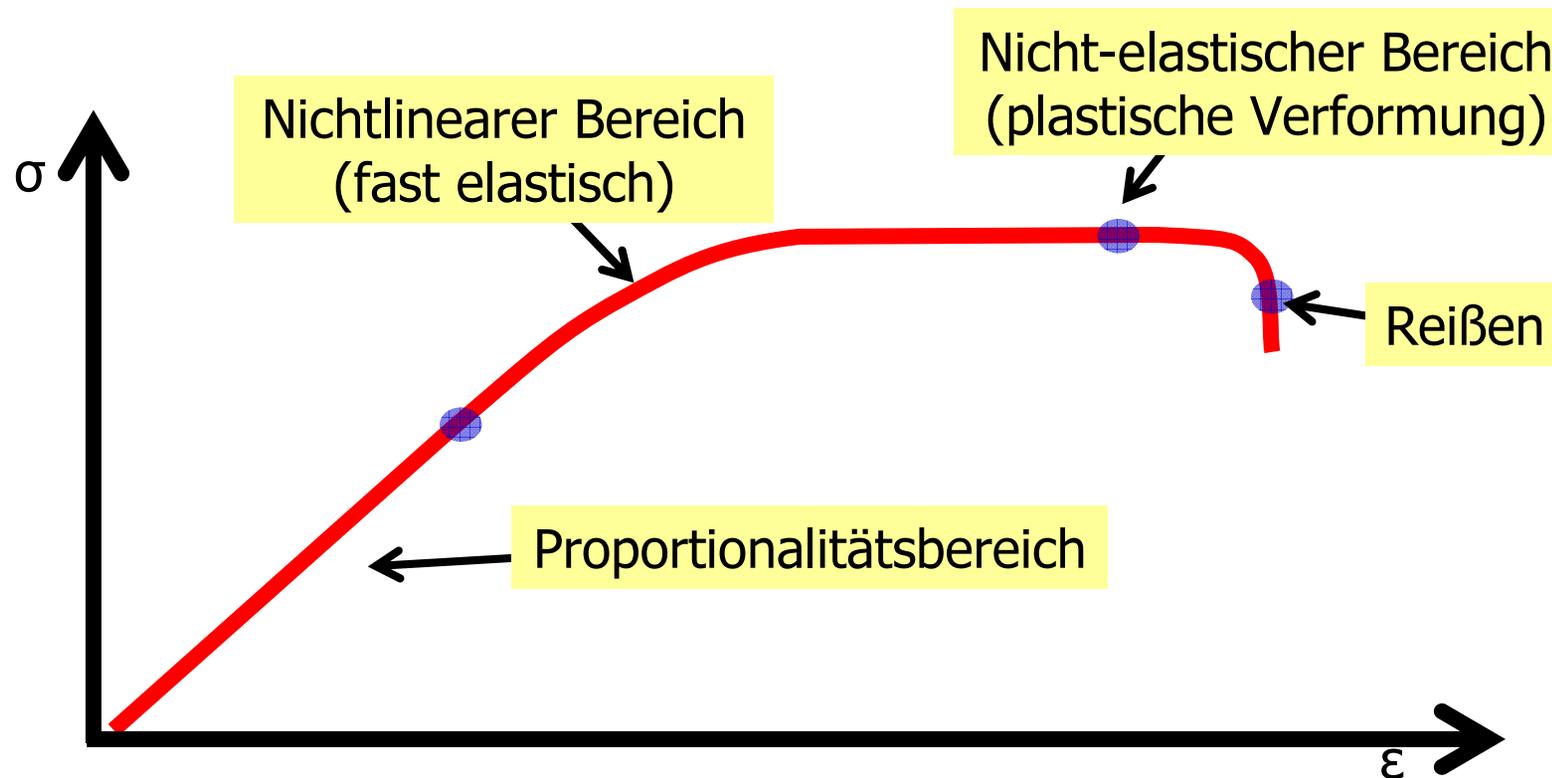
$E =$ Elastizitätsmodul, Materialeigenschaft, $[E] = 1 \text{ N m}^{-2}$

$E = E(\varepsilon, \text{Temperatur, Druck, ...})$ unabhängig von Geometrie (A und L)

5.2. Deformierbare Medien

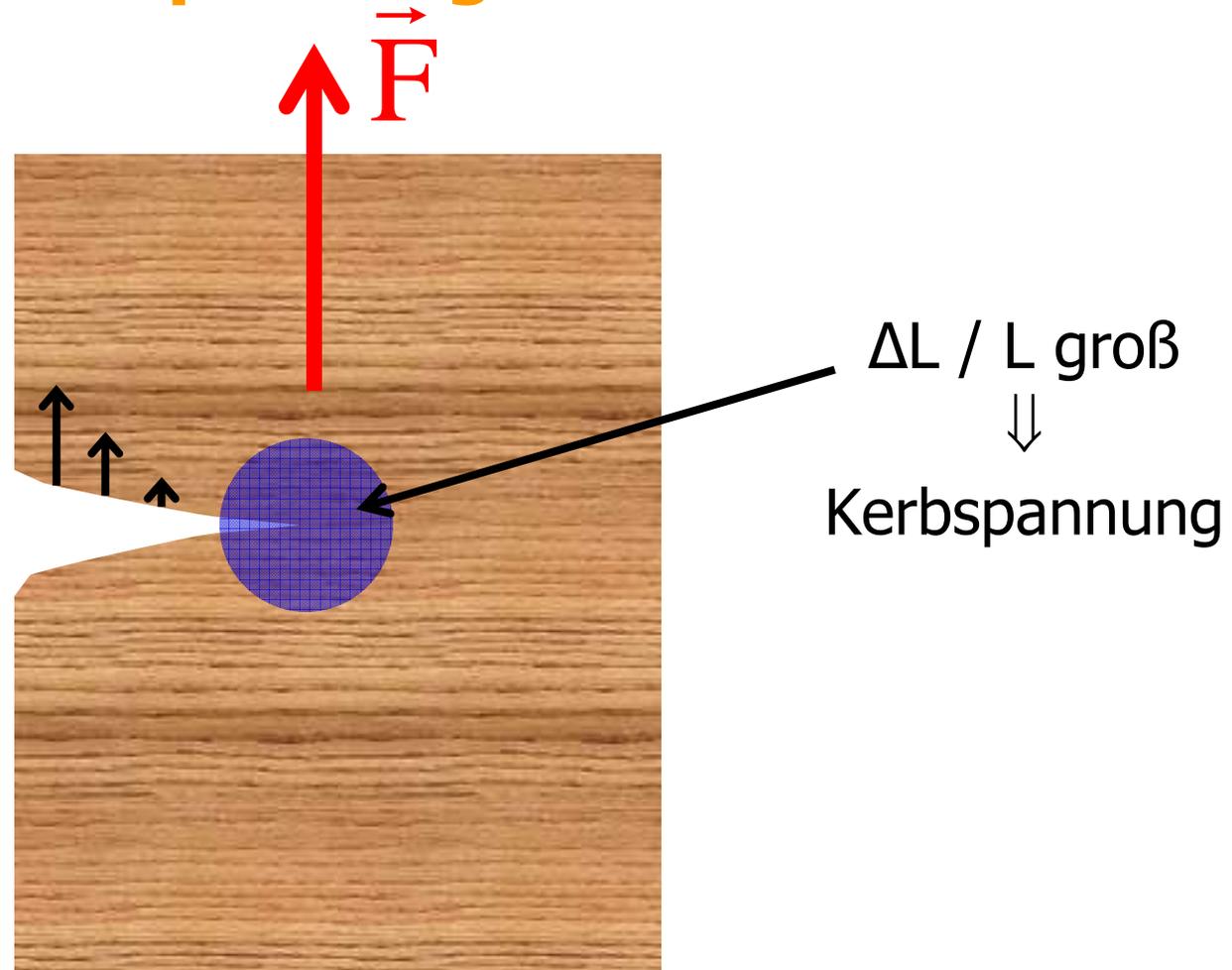
Hookesches Gesetz: $\sigma = E \varepsilon$ gültig im elastischen Bereich

$\varepsilon \rightarrow 0$ Taylor-
Entwicklung $\Rightarrow E(\varepsilon) \approx \text{const.}$ \rightarrow Proportionalbereich

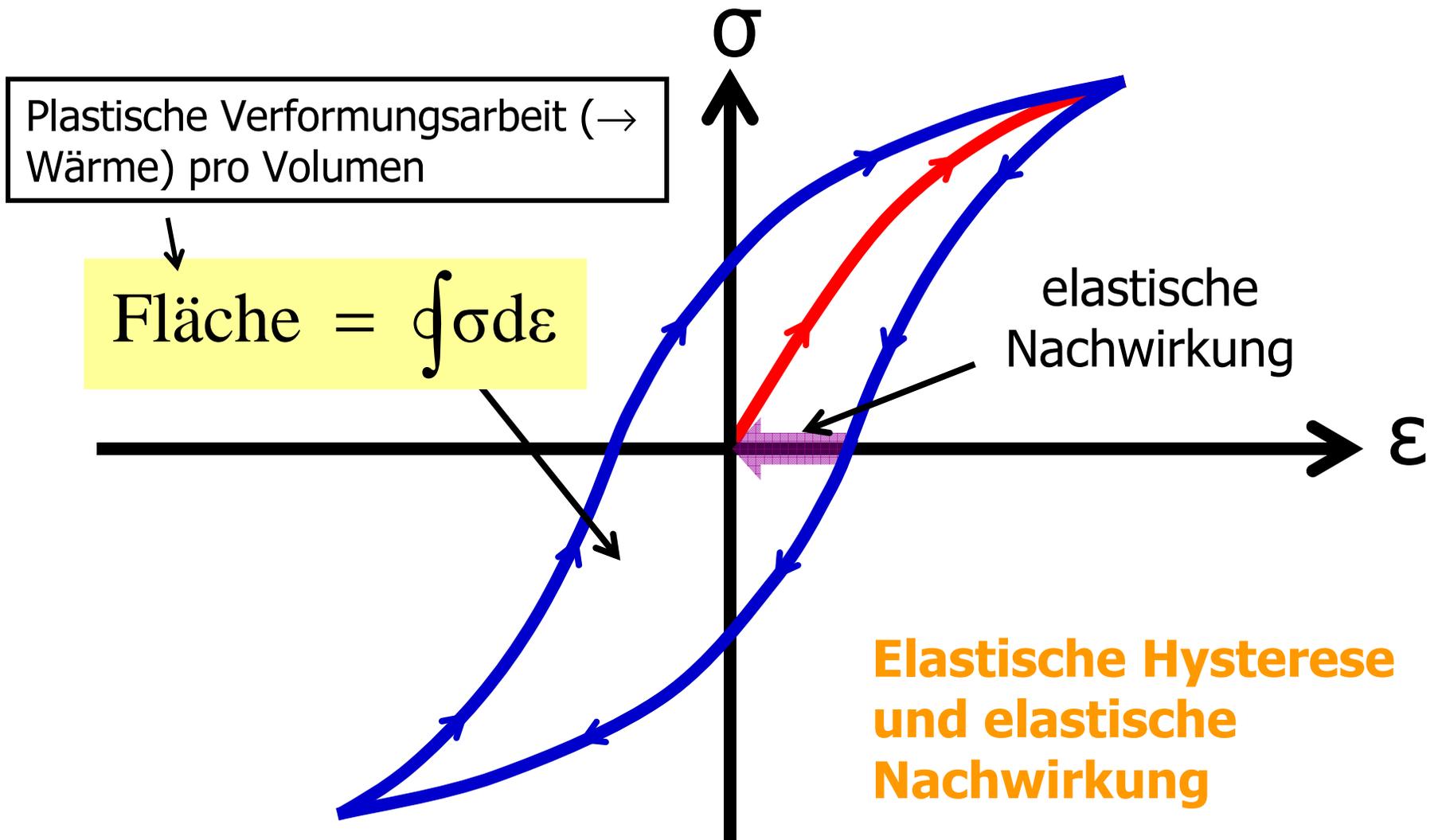


5.2. Deformierbare Medien

Beispiel: Kerbspannung



5.2. Deformierbare Medien

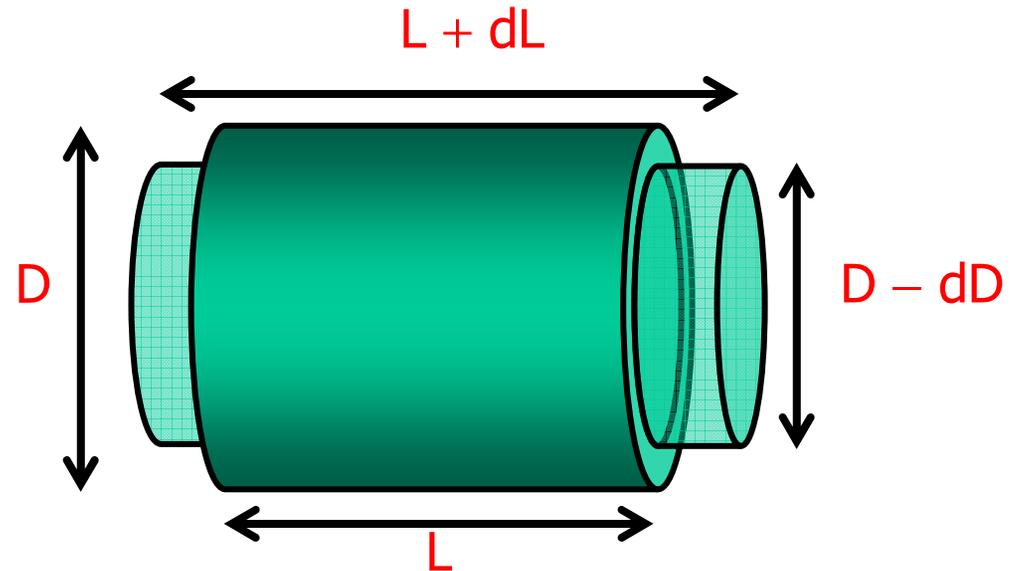


5.2. Deformierbare Medien

Querkontraktion

Def.: Poissonzahl

$$\mu = \frac{dD/D}{dL/L}$$



Zugspannung \Rightarrow
Volumenzunahme:

$$V \propto L D^2 \Rightarrow \frac{dV}{V} = \underbrace{\frac{dL}{L}}_{\varepsilon} - 2 \underbrace{\frac{dD}{D}}_{2\mu \varepsilon}$$

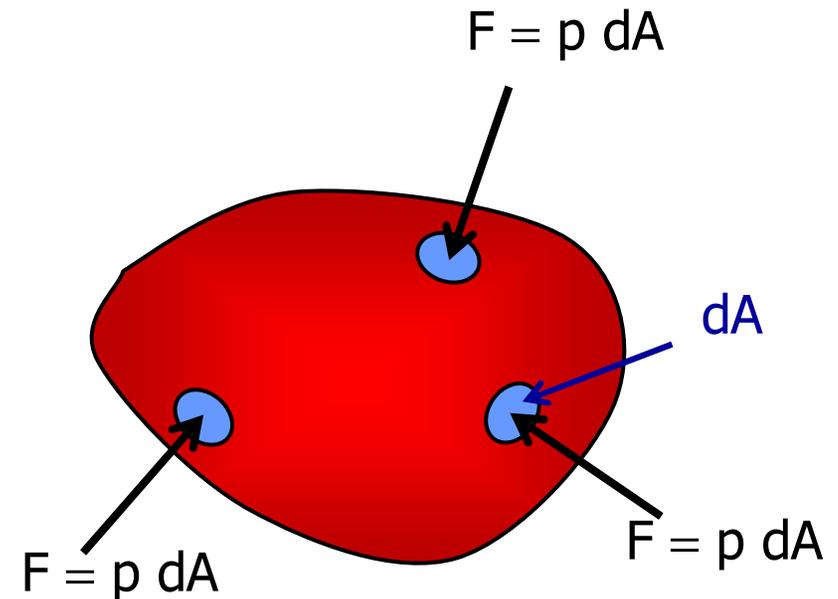
$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = \varepsilon(1 - 2\mu) \Rightarrow 0 \leq \mu \leq 0,5$$

5.2. Deformierbare Medien

Kompressionsmodul

Def.: **Druck** $p = \frac{\text{Normalkraft}}{\text{Fläche}}$

$$[p] = 1 \text{ Nm}^{-2} = 1 \text{ Pa} = 1 \text{ Pascal}$$



Def.: **Kompressibilität**

$$\kappa = - \frac{1}{V} \frac{dV}{dp}$$

Kompressionsmodul

$$K = \frac{1}{\kappa}$$

5.2. Deformierbare Medien

Zusammenhang zwischen E , μ und K :

$$\kappa = \frac{1}{K} = \frac{3}{E} (1 - 2\mu)$$

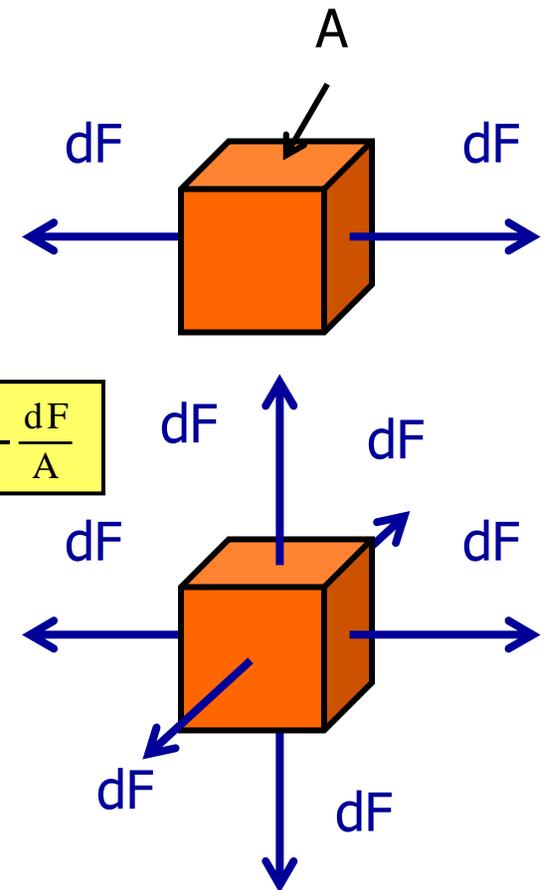
Beweis:

$$\frac{dV}{V} = \varepsilon (1 - 2\mu) = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) = \frac{dF}{EA} (1 - 2\mu)$$

$$\frac{dV}{V} = 3 \frac{dF}{EA} (1 - 2\mu) = -3 \frac{dp}{E} (1 - 2\mu)$$

$$dp = -\frac{dF}{A}$$

$$\Rightarrow \kappa = -\frac{1}{V} \frac{dV}{dp} = \frac{3}{E} (1 - 2\mu) \quad \text{q.e.d.}$$



5.2. Deformierbare Medien

Scherung und Torsionsmodul

Tangentialkräfte \Rightarrow Scherung

Def.: Schub- / Scherspannung

$$\vec{\tau} = \frac{\vec{F}}{A}$$

Hookesches Gesetz:

$$\tau = G \cdot \alpha$$

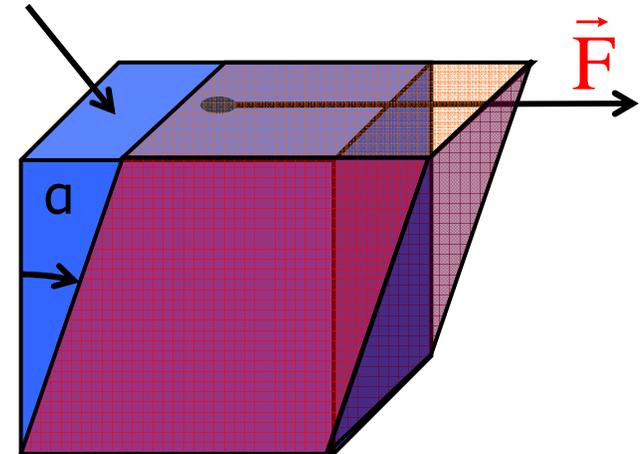
(für hinreichend kleine α)

$G =$ Schub- / Scher- / Torsionsmodul , $[G] = 1 \text{ N m}^{-2} \text{ rad}^{-1}$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

$$\frac{1}{2} E \geq G \geq \frac{1}{3} E$$

Fläche A



5.2. Deformierbare Medien

Torsionsschwingung

→ Messung von G

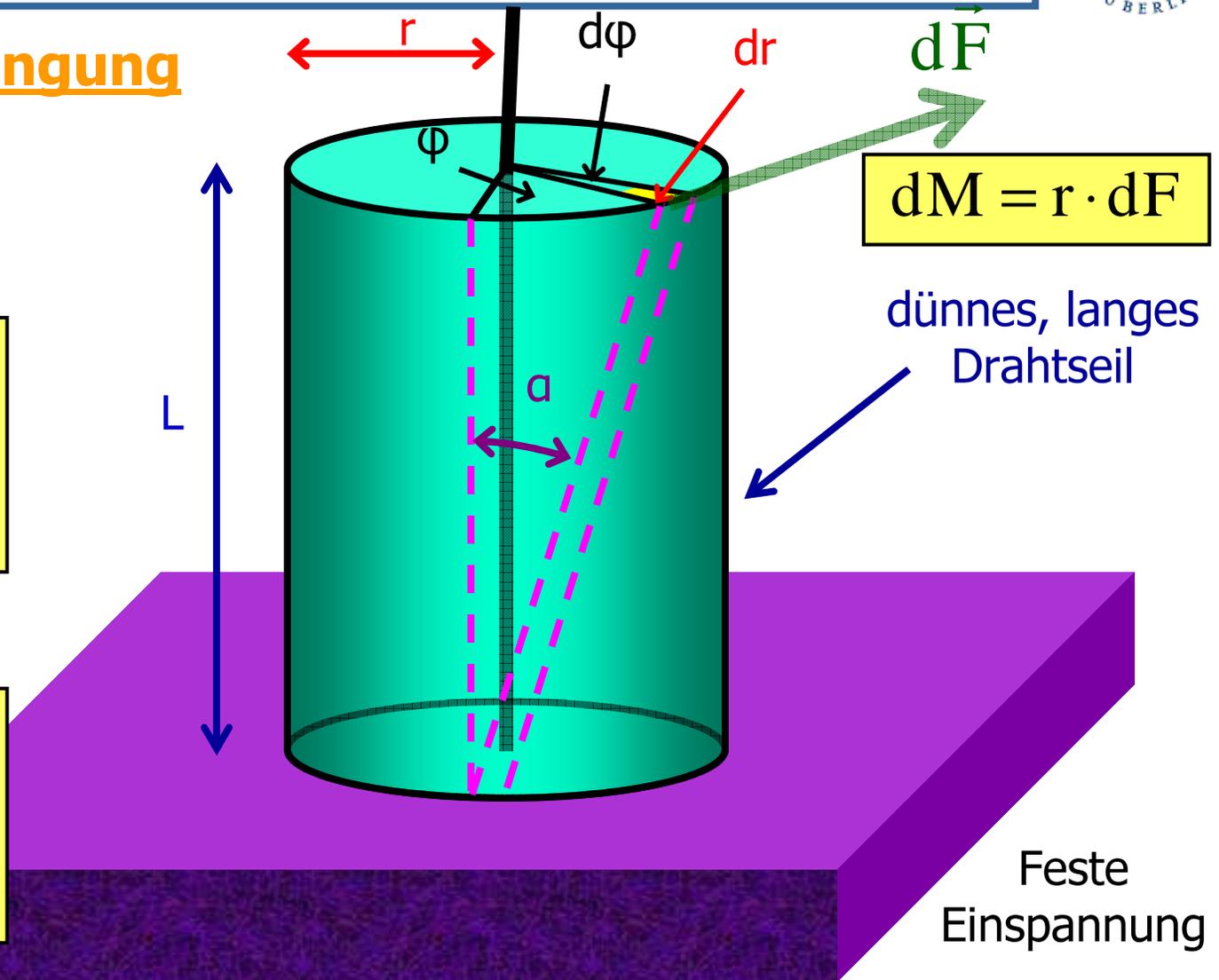
Rücktreibendes Drehmoment

$$M_{el} = -D \cdot \varphi$$

mit

Richtmoment

$$D = \frac{\pi r^4}{2L} \cdot G$$



5.2. Deformierbare Medien

Realisierung als Drehpendel:

Def.:

$$\omega = \dot{\phi}$$

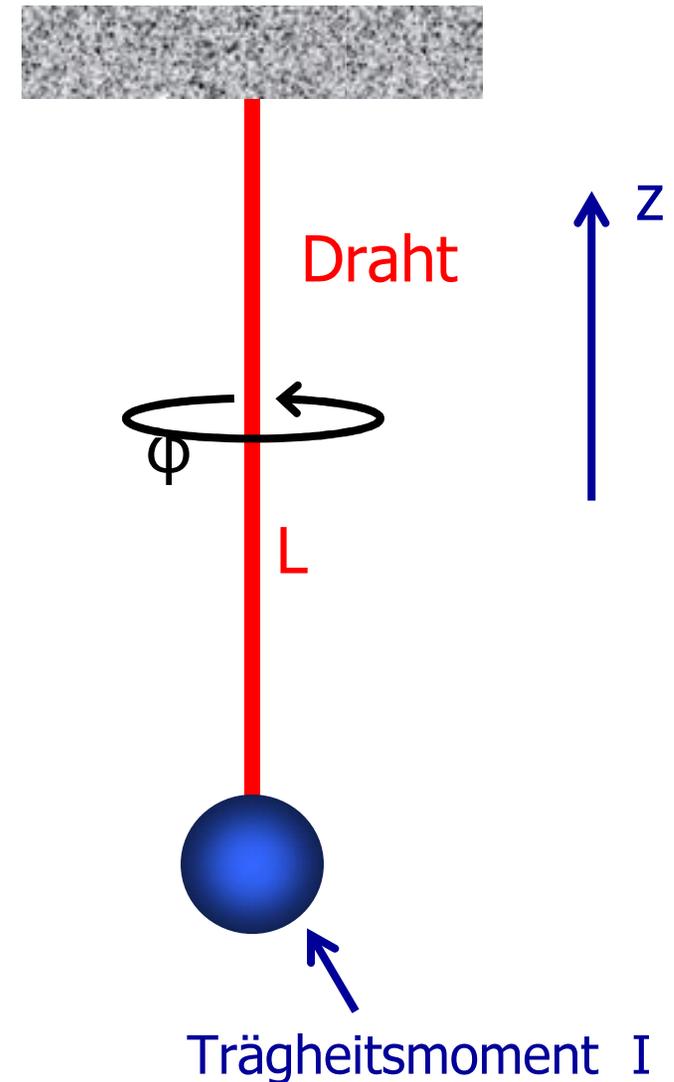
$$L_z = I \cdot \omega$$

Bewegungsgleichung der Drehbewegung:

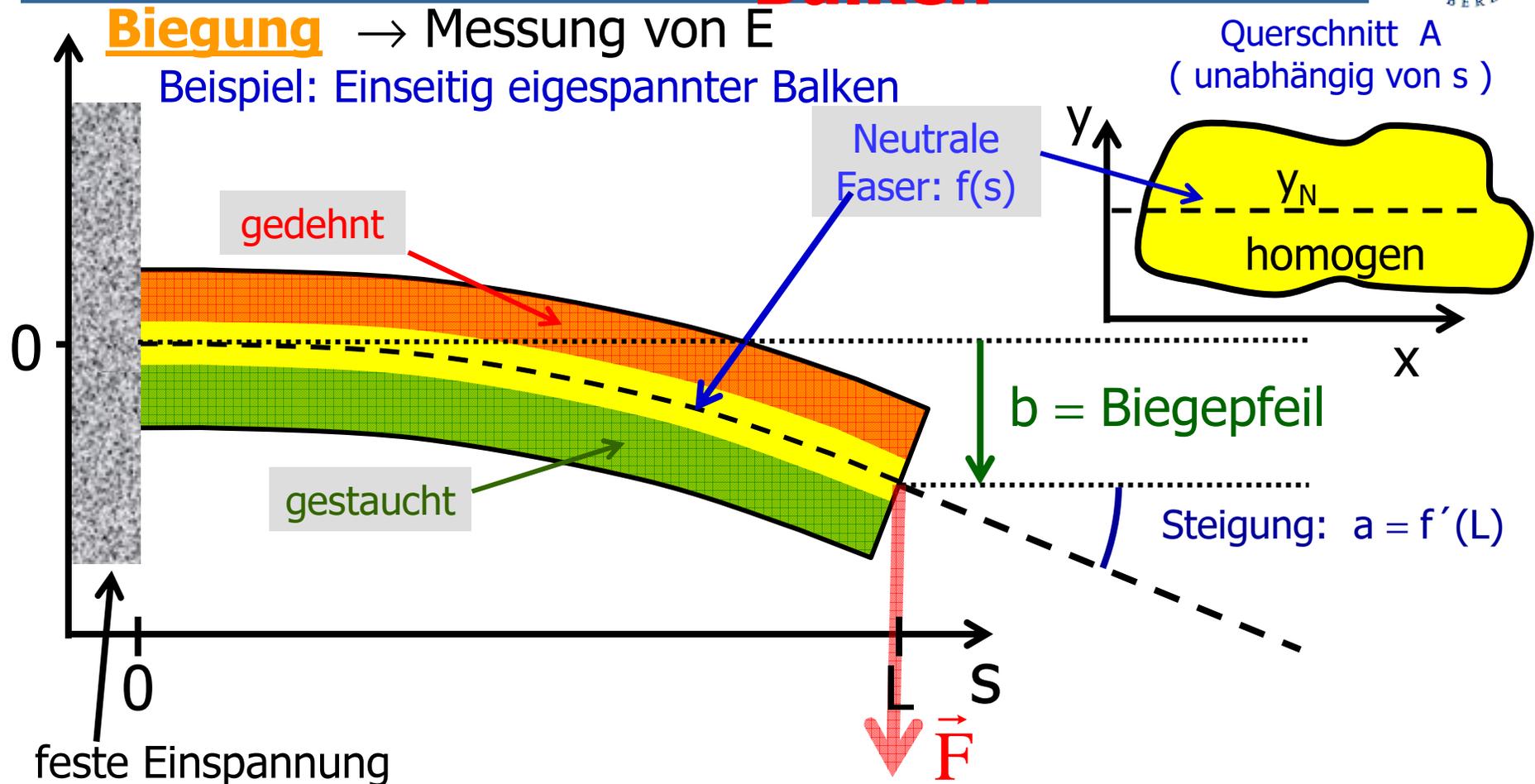
$$\frac{d L_z}{d t} = M_{el}$$

Tafelrechnung \Rightarrow Schwingungsperiode T

$$T = \sqrt{\frac{2 I L}{\pi G}} \cdot \frac{2 \pi}{r^2}$$



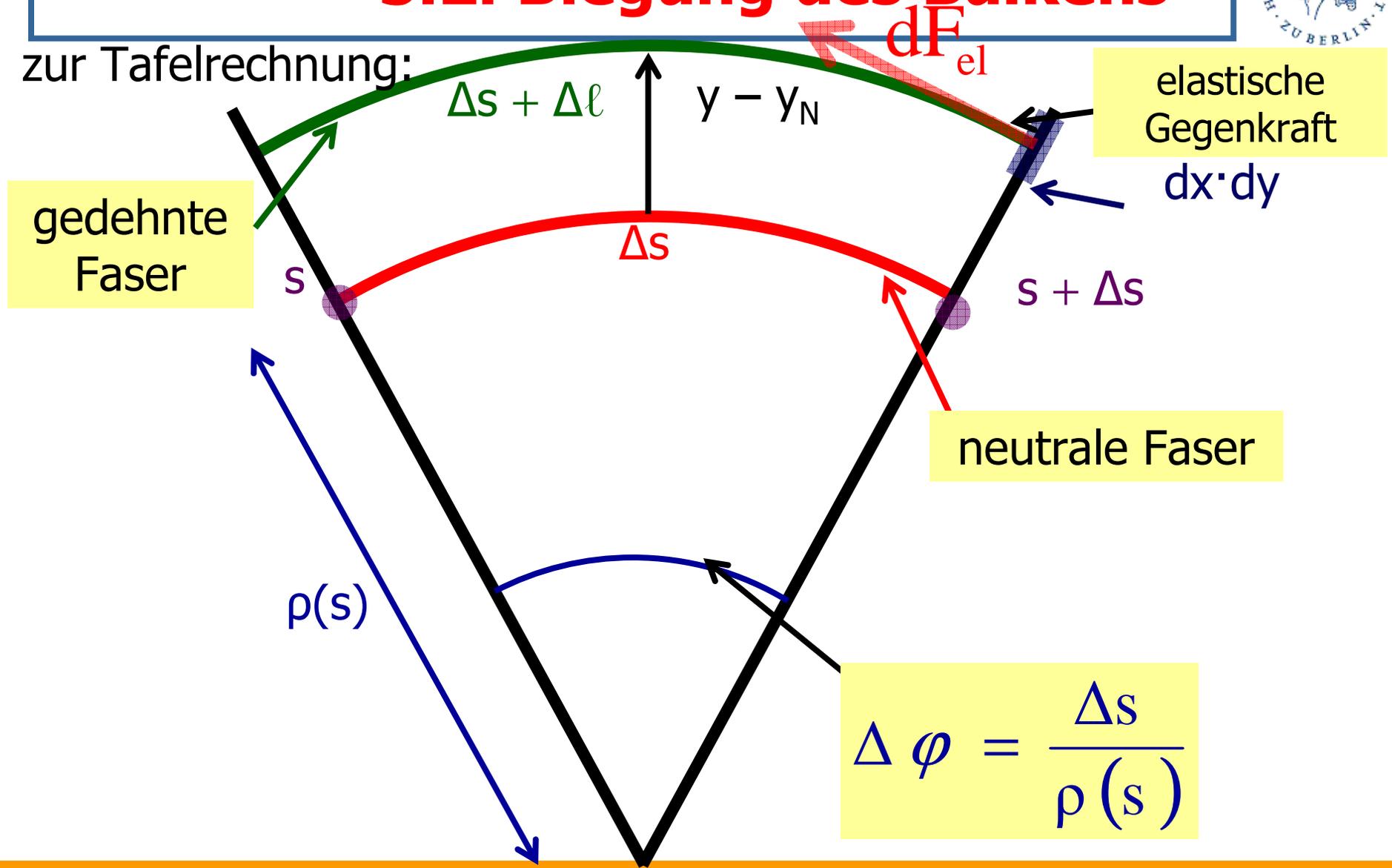
5.2. Deformierbare Medien, Balken



Näherung kleiner Biegung: $|f'(s)| \ll 1$, $\frac{1}{\rho(s)} \approx -f''(s)$

5.2. Biegung des Balkens

zur Tafelrechnung:



5.2. Biegung des Balkens

Randbedingungen \Rightarrow Biegekurve: $f^{(4)}(s) = 0 \Leftrightarrow f(s) = \alpha + \beta \cdot s + \gamma \cdot s^2 + \delta \cdot s^3$

$$f(s) = \left(\frac{a}{L^2} + 2 \frac{b}{L^3} \right) \cdot s^3 - \left(\frac{a}{L} + 3 \frac{b}{L^2} \right) \cdot s^2$$

$$V_{el} = 2EI \cdot \left(\frac{a^2}{L} + 3 \frac{ab}{L^2} + 3 \frac{b^2}{L^3} \right)$$

