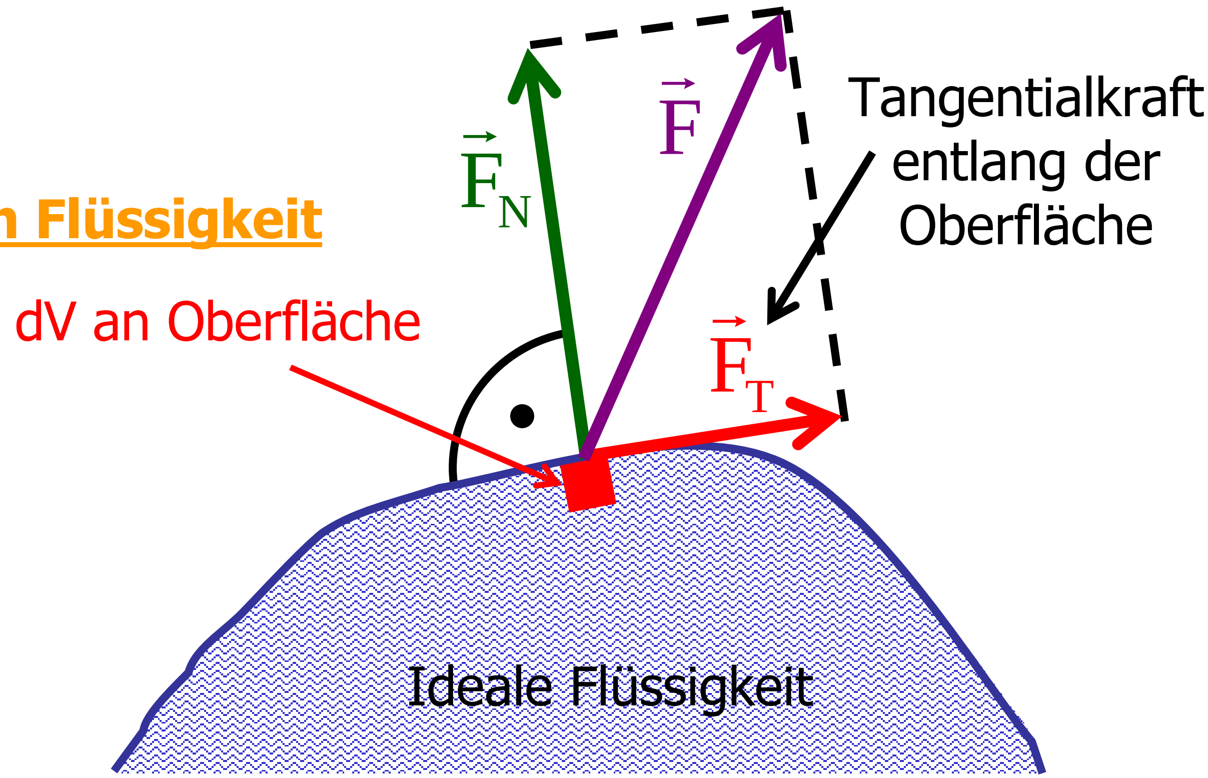
5.3. Hydrostatik

- Statik ↔ Gleichgewichtszustände, zeitunabhängig
- ideale Flüssigkeit ↔ ohne Arbeit verformbar bei Volumen = const.
- reale Flüssigkeit ↔ ∃ Oberflächenkräfte und innere Reibung
- Gase ↔ Form- und Volumenänderung bei kleinem Energieaufwand

Oberfläche der idealen Flüssigkeit



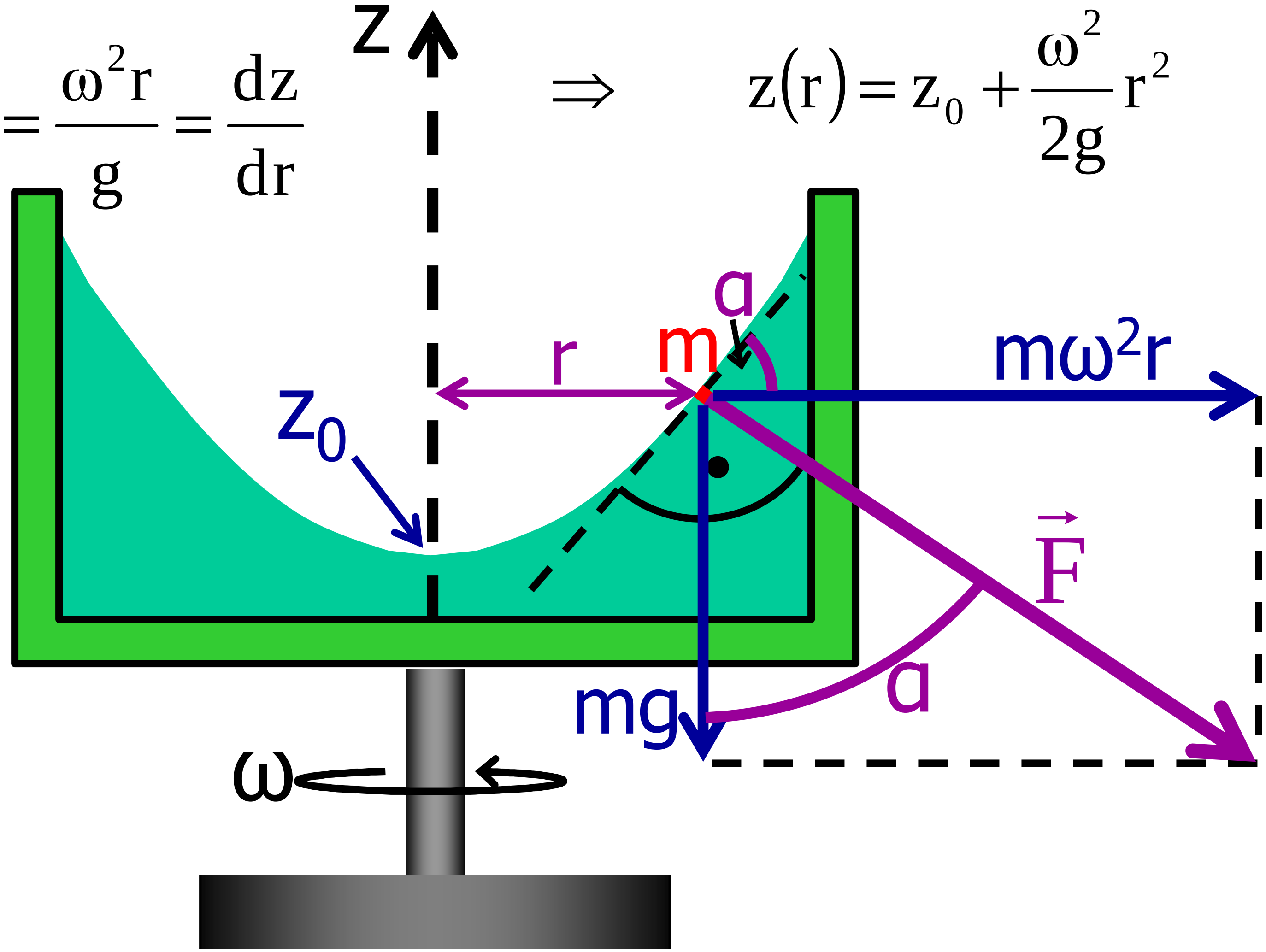
$\vec{F}_T \Rightarrow$ Verschiebung

Statik $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}_T = \vec{0}}$

5.3. Hydrostatik

Rotationsparaboloid:

$$\tan\alpha = \frac{m\omega^2 r}{mg} = \frac{\omega^2 r}{g} = \frac{dz}{dr} \quad \Rightarrow \quad z(r) = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} r^2$$



5.3. Hydrostatik

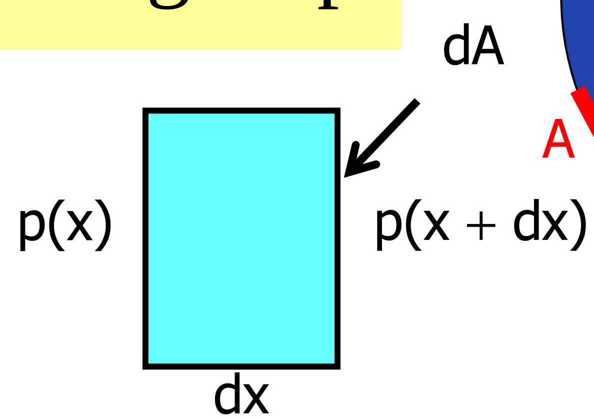
Statischer Druck (ohne Schwerkraft)

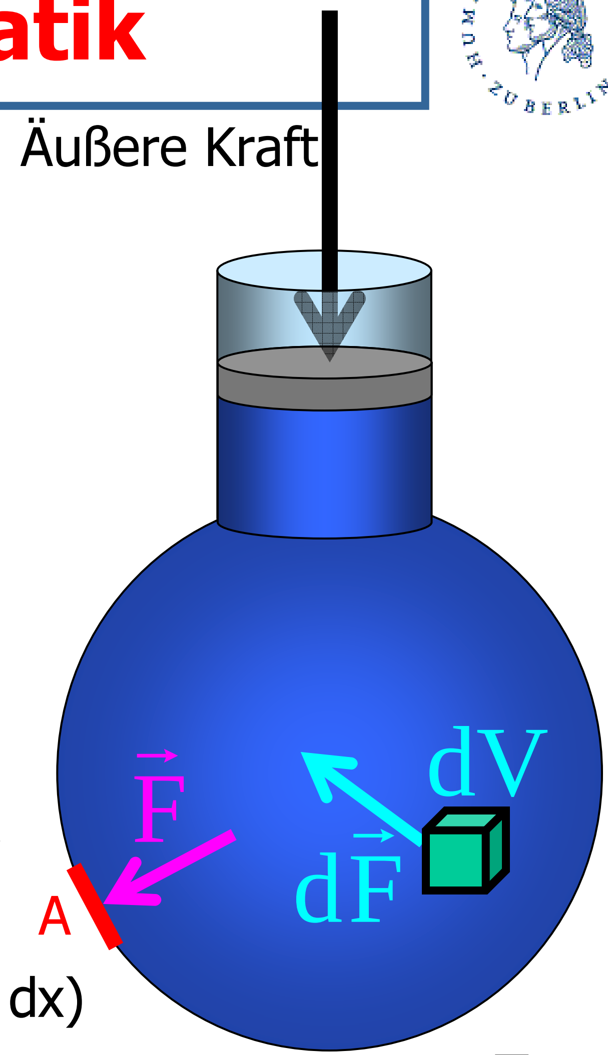
$$dF_x = p(x)dA - p(x+dx)dA$$
$$= -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx \cdot dA = -\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dV$$

$\Rightarrow$ Druckkraft: $$d\vec{F} = -\mathrm{grad}\, p \cdot dV$$

$\Rightarrow$ Kraftdichte: $$\vec{f} = \frac{d\vec{F}}{dV} = -\mathrm{grad}\, p$$

Statik: $$\vec{f} = \vec{0}$$
$$\Downarrow$$
$$p = \mathrm{const.}$$

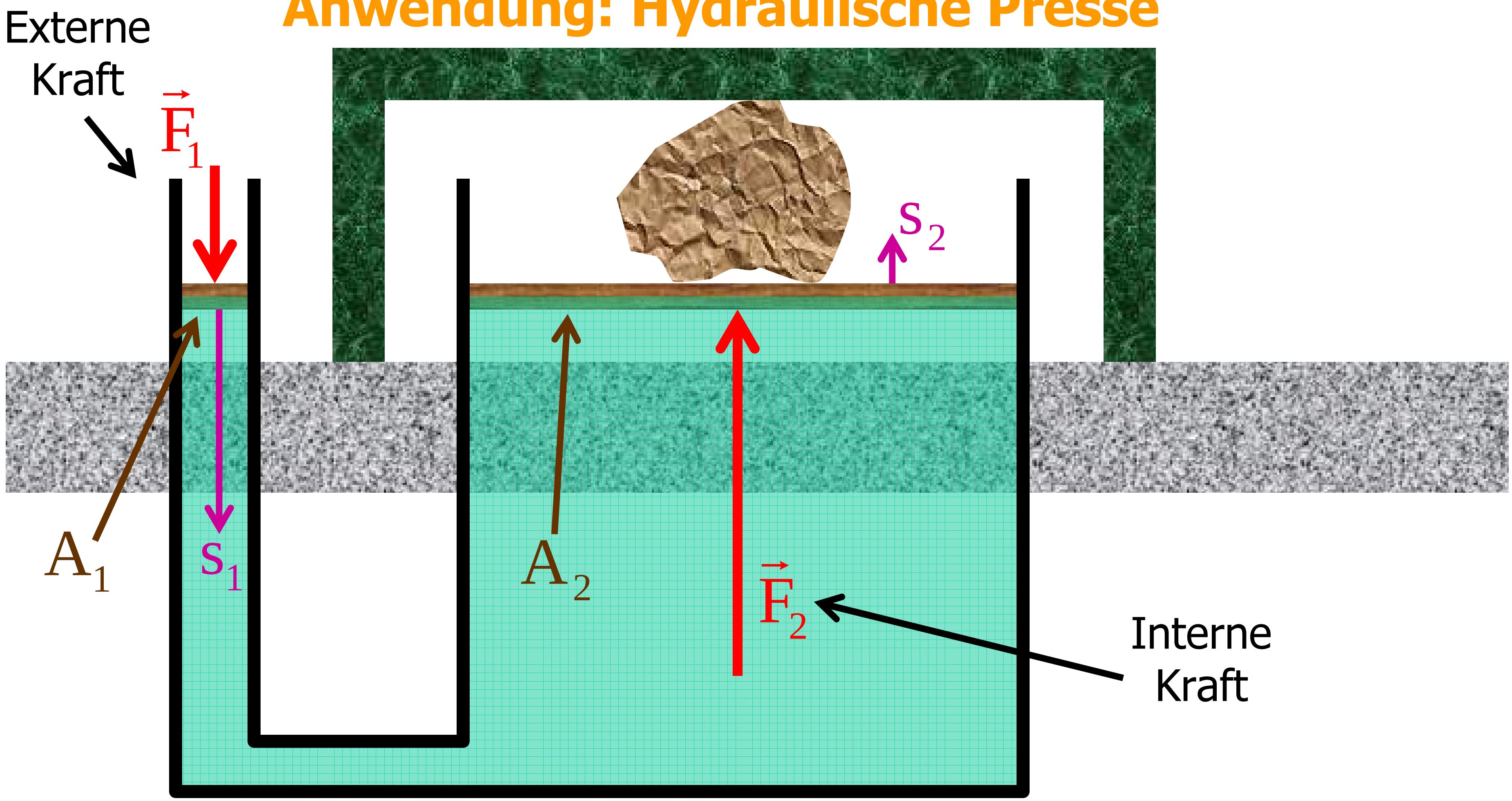




$$\text{Druck: } p = \frac{F}{A}$$

5.3. Hydrostatik

Anwendung: Hydraulische Presse



$$p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = \frac{A_2}{A_1} F_1 \gg F_1 \quad \text{aber} \quad s_2 = \frac{A_1}{A_2} s_1 \ll s_1$$

5.3. Hydrostatik

Kompressibilität

$$\kappa = -\frac{1}{V}\frac{dV}{dp}$$

in Flüssigkeiten i.a. sehr klein:

$$\kappa_{H_2O} \approx 5 \cdot 10^{-10}\, m^2 N^{-1}$$

Flüssigkeiten oft annähernd inkompressibel, d. h.

Dichte $\rho(p) \equiv \frac{dm}{dV} = \text{const.}$

5.3. Hydrodynamik

Anwendung: Schweredruck

$$F = \rho g H \cdot dA$$

$$-\rho g dV \vec{e}_z - \vec{\nabla} p \, dV = \vec{0}$$

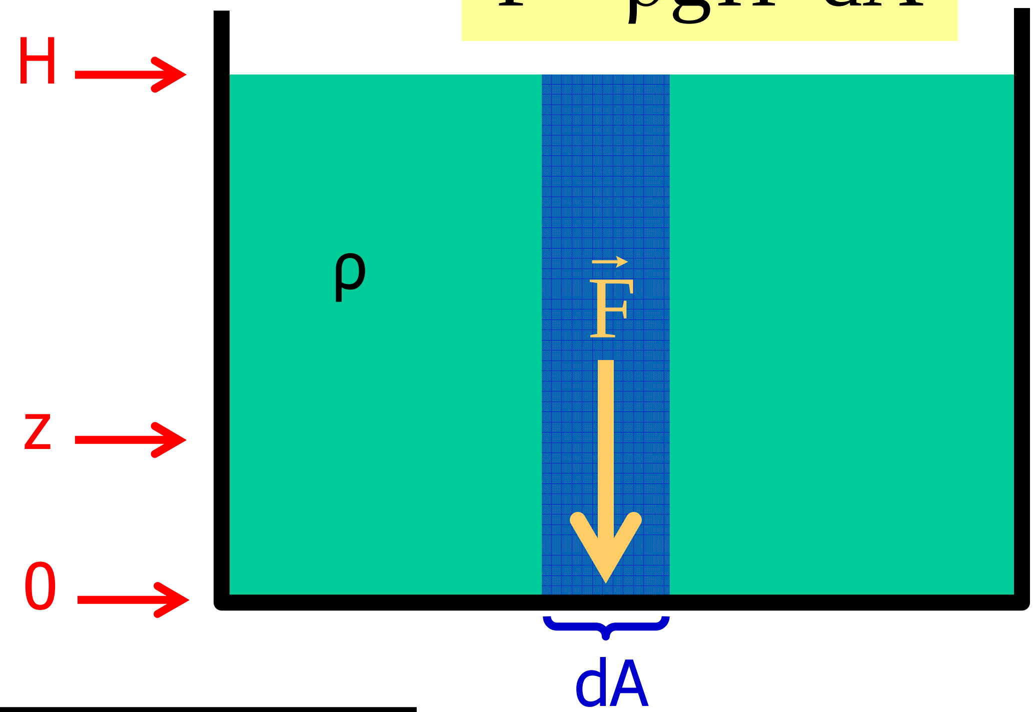
$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

$$\Downarrow$$

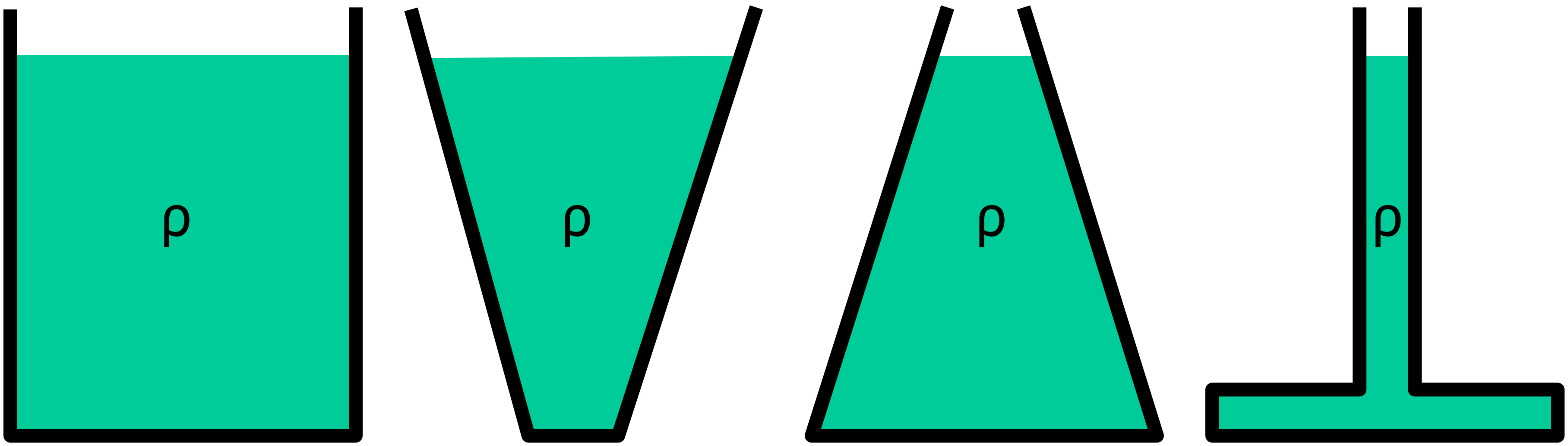
$$\boxed{p(z) = \rho g (H - z) \propto \text{Tauchtiefe}}$$



$p = \text{const.}$ bei konstanter Tauchtiefe

5.3. Hydrostatik

Folgerung: Hydrostatisches Paradoxon



Identische Bodendrücke

Anwendung: Kommunizierende Röhren $\rightarrow$ Demo-Exp.

5.3. Hydrostatik

Dichtewaage

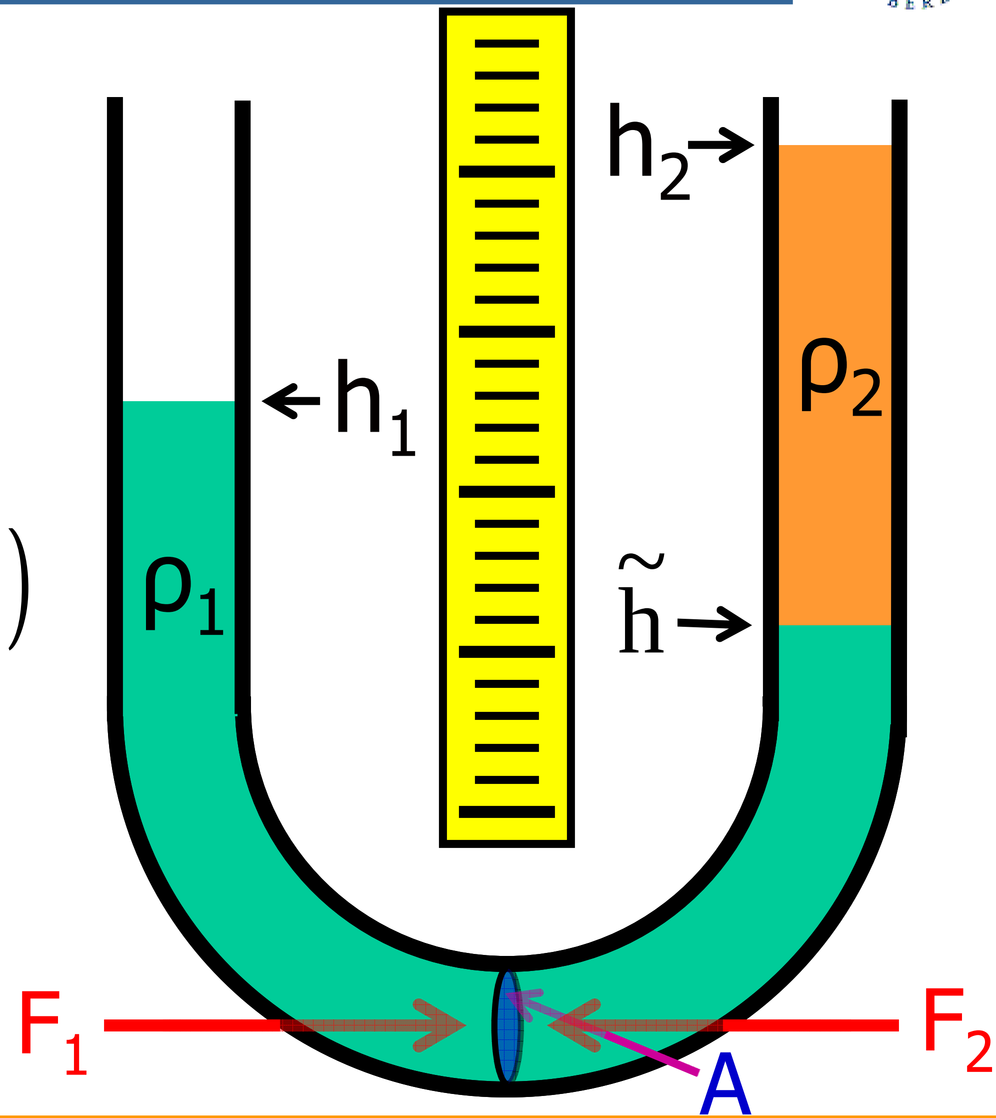
$$F_1 = F_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\rho_1 g h_1 = \rho_1 g \tilde{h} + \rho_2 g \left(h_2 - \tilde{h}\right)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2 - \tilde{h}}{h_1 - \tilde{h}}$$

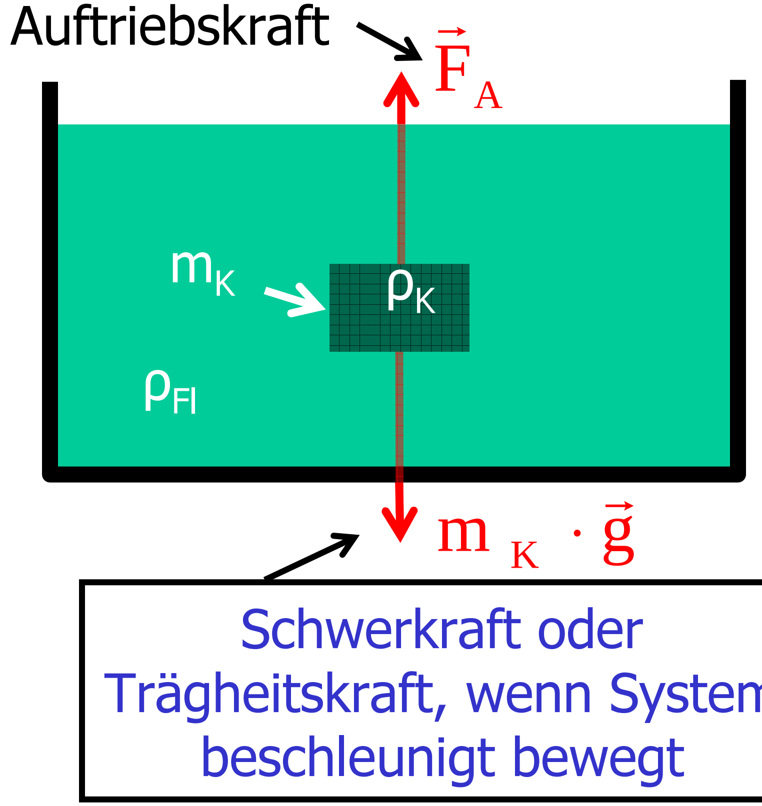


5.3. Hydrodynamik: Auftrieb

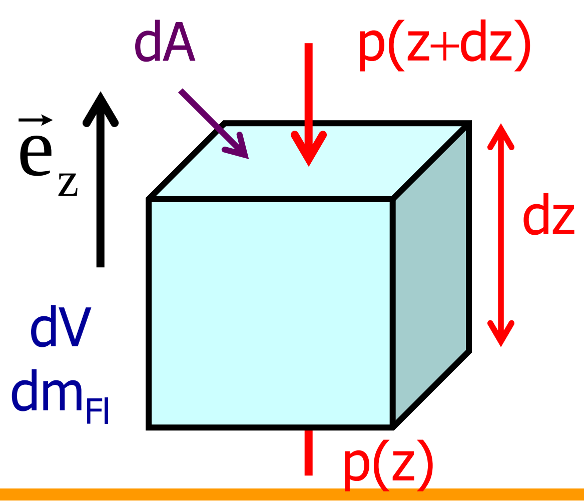
Archimedisches Prinzip:

Die Auftriebskraft ist gleich dem Gewicht der/des verdrängten Flüssigkeit/Gases

$$\vec{F}_A = -\vec{G}_{Fl}$$



Beweis: (hier für kleinen Quader)
(allgemein → Gaußscher Integralsatz)



$$d\vec{F}_A = \underbrace{\left(p(z)-p(z+dz)\right)}_{g\rho_{Fl}(z)dz} dA\,\vec{e}_z = g\underbrace{\rho_{Fl}(z)dV}_{dm_{Fl}}\vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \quad d\vec{F}_A = g\,dm_{Fl}\,\vec{e}_z = -d\vec{G}_{Fl} \quad , \quad \text{q.e.d.}$$

5.3. Hydrostatik: Auftrieb

Folgerung:

- $\rho_K > \rho_{Fl}$ $\Rightarrow$ Körper sinkt zu Boden
- $\rho_K < \rho_{Fl}$ $\Rightarrow$ Körper schwimmt (partielles Eintauchen)
- $\rho_K = \rho_{Fl}$ $\Rightarrow$ Körper schwebt

5.3. Hydrostatik: Auftrieb

Beispiel: Eisberg

$$\rho_{Eis} = 0{,}95\ \mathrm{kg}/\mathrm{l}$$

$$\rho_{Salzwasser} = 1{,}05\ \mathrm{kg}/\mathrm{l}$$