6.3. Kinetische Gastheorie

Zustandsgleichung: $$\boxed{p\,V = N\,k\,T = \tfrac{1}{3}\,N\,m\left\langle v^2 \right\rangle}$$

Spezialfall: Stoffmenge 1 mol $\leftrightarrow$ $N = N_A$

Def.: **Allgemeine Gaskonstante** $\mathbf{R = N_A k = 8{,}31\ J\ K^{-1}\ mol^{-1}}$

Folgerung: $$\boxed{p\,V_{mol} = R\,T}$$

Folgerung: Mittlere kinetische Energie eines Gasmoleküls

$$\boxed{u \equiv \left\langle E_{kin} \right\rangle = \frac{m}{2}\left\langle v^2 \right\rangle = \frac{3}{2} k_B T}$$

Verallgemeinerung: #Freiheitsgrade der Bewegung = f

$$\boxed{u = \frac{f}{2} k_B T}$$

Ideales Gas: f = 3 Freiheitsgrade der Translation (x,y,z)

6.3. Kinetische Gastheorie

Besetzungswahrscheinlichkeiten der Energiezustände:

Energiezustände: E_1 , E_2 , E_3 , ...

relative Häufigkeiten der E_i : g_1 , g_2 , g_3 , ...

Boltzmann-Verteilung:
$$p_i = g_i \exp\left(-\frac{E_i}{k_B T}\right)$$

Beispiel: Barometrische Höhenformel

$$i \to h \qquad E_i \to V(h) = m\,g\,h \qquad g_i \to const. \qquad p_i \propto n(h)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{m\,g\,z}{k_B T}\right)}$$

6.3. Kinetische Gastheorie

Maxwellsche Geschwindigkeitsverteilung der Gasmoleküle

Variante 1:

$$i \rightarrow (v_x, v_y, v_z) \quad E_i \rightarrow E_{kin} = \tfrac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} \quad g_i \rightarrow const. \quad p_i \propto \rho(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(\vec{v}) = \frac{1}{N}\frac{d^3N}{dv_x\,dv_y\,dv_z} \propto \exp\left(-\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2k_B T}\right)}$$

Variante 2:

$$\int_\Omega dv_x\,dv_y\,dv_z = \int_\Omega d\Omega\, v^2 dv = 4\pi|\vec{v}|^2\, d|\vec{v}|$$

$$i \rightarrow |\vec{v}| \quad E_i \rightarrow E_{kin} = \tfrac{1}{2} m|\vec{v}|^2 \quad g_i \rightarrow 4\pi|\vec{v}|^2 \quad p_i \propto \rho(|\vec{v}|)$$

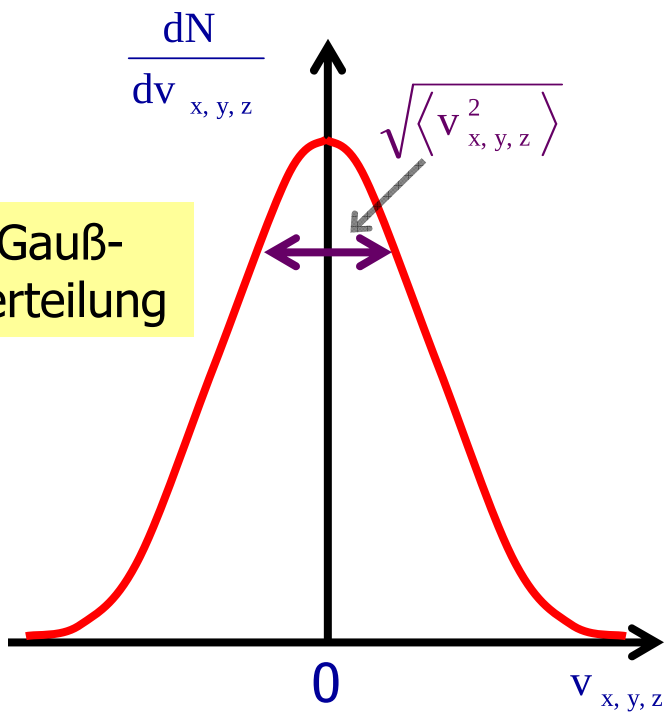
$$\Rightarrow \quad \boxed{\rho(|\vec{v}|) = \frac{1}{N}\frac{dN}{d|\vec{v}|} \propto \vec{v}^{\,2} \exp\left(-\frac{m\vec{v}^{\,2}}{2k_B T}\right)}$$

6.3. Kinetische Gastheorie

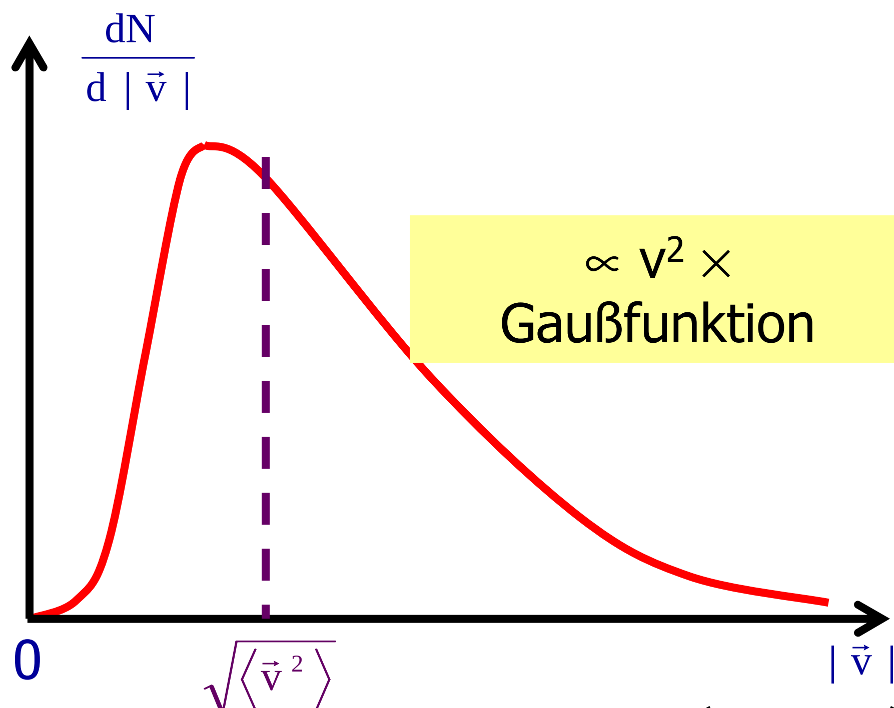
$$\rho(\vec{v}) = \frac{1}{N}\frac{d^3N}{dv_x\, dv_y\, dv_z} \propto \exp\left(-\frac{m\,\vec{v}^{\,2}}{2\,k_B T}\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{m\,v_x^2}{2\,k_B T}\right)\cdot \exp\left(-\frac{m\,v_y^2}{2\,k_B T}\right)\cdot \exp\left(-\frac{m\,v_z^2}{2\,k_B T}\right)$$

Gauß-Verteilung



v_x , v_y , v_z unkorreliert



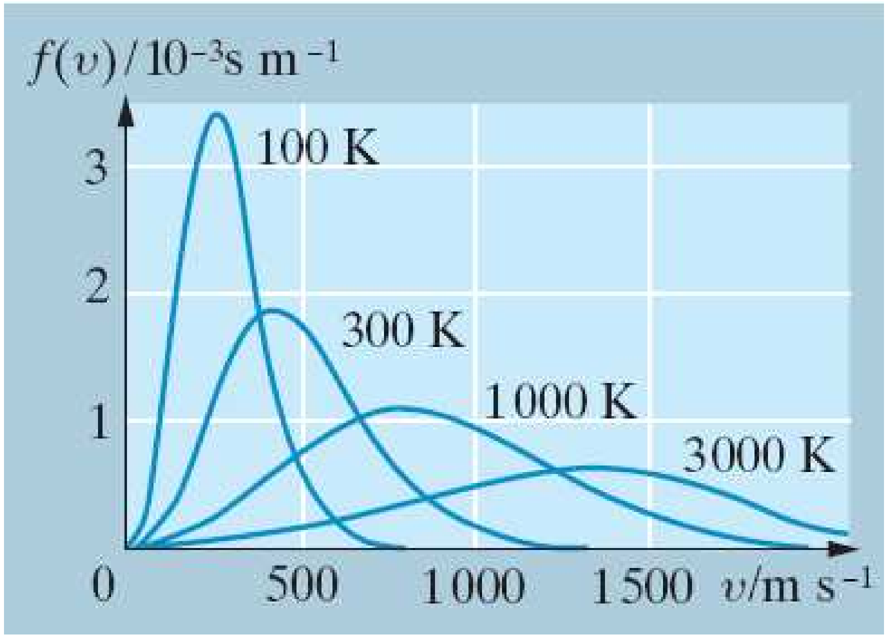
$\propto v^2 \times$ Gaußfunktion

$$\rho(|\vec{v}\,|) = \frac{1}{N}\frac{dN}{d\,|\vec{v}\,|} \propto \vec{v}^{\,2}\exp\left(-\frac{m\,\vec{v}^{\,2}}{2\,k_B T}\right)$$

6.3. Kinetische Gastheorie

Maxwell-Boltzmann-Verteilung

$$f(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{m}{k_B T}\right)^{3/2} v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2k_B T}\right)\mathrm{d}v$$



Die Maxwell-Verteilung der Molekülgeschwindigkeit in Luft ist **temperaturabhängig**

6.3. Kinetische Gastheorie

"Root mean square" Geschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{rms}}^2 = \int v^2 f(v)\mathrm{d}v = \frac{2RT}{M}$$

Mittlere Geschwindigkeit:

$$v_{\mathrm{avg}} = \int v f(v)\mathrm{d}v = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$$

Wahrscheinlichste Geschwindigkeit:
(Maximum von f(v))

$$v_p = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$$