Kap. 7 Strömungsmechanik

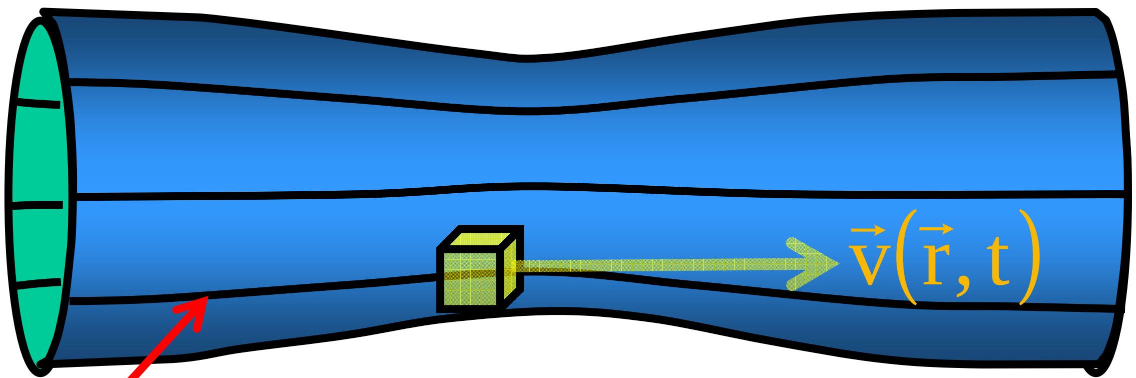
1. Grundbegriffe
2. Die Kontinuitätsgleichung
3. Die Gleichung von Bernoulli
4. Laminare Strömungen
5. Auftrieb und Wirbelbildung

7.1. Strömungen in Flüssigkeiten

Grundbegriffe

(gilt auch für Gase)

Stromröhre:



Stromlinie
(Stromfaden)

Stomröhre: Gesamtheit der Stromlinien durch einen Querschnitt

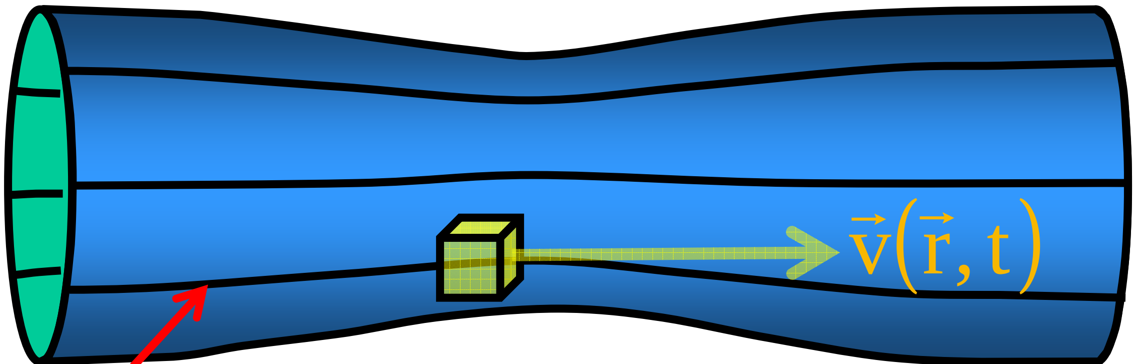
Strömungsfeld: $\vec{v}(\vec{r},t)$

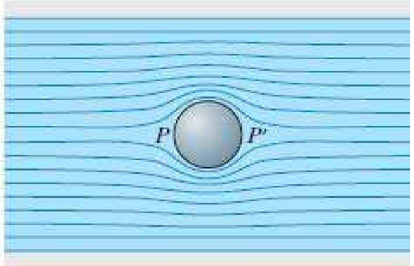
Stationäres Strömungsfeld: $\vec{v}(\vec{r})$ (zeitlich konstant)

$\Rightarrow$ Stromlinien $\vec{v}(\vec{r})$

entlang

7.1. Strömungen in Flüssigkeiten

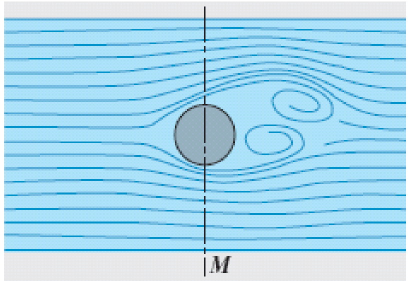




Laminare Strömung: $\vec{v}$ ist wirbelfrei.

Stromfäden liegen nebeneinander.

Reibungskräfte ≫ beschleunigende Kräfte.



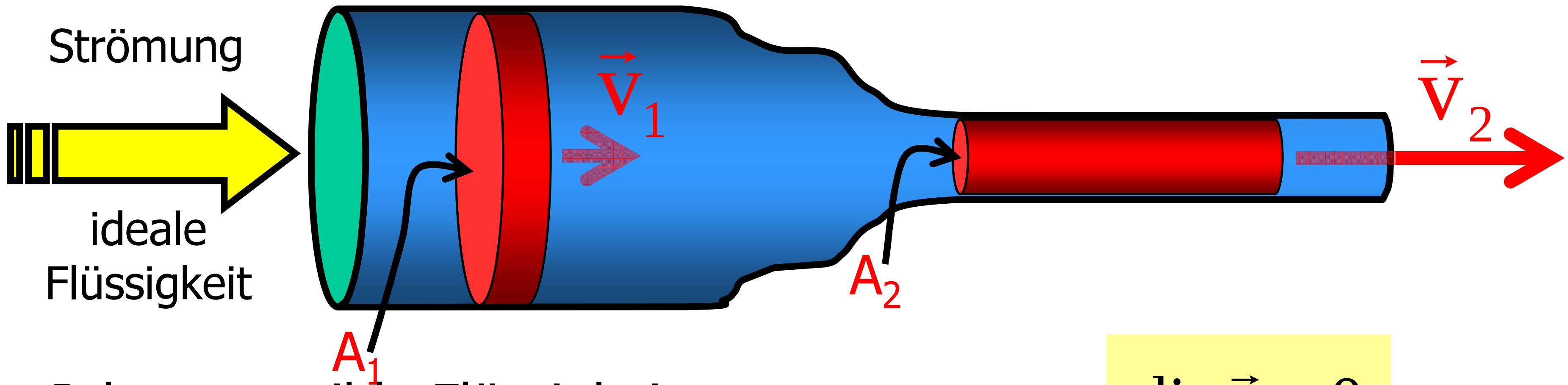
Turbulente Strömung: $\vec{v}$ ist nicht wirbelfrei.

Große Reibung an Berandungen.

Kleine innere Reibung.

7.2. Kontinuitätsgleichung

Wasserrohre mit veränderlichem Querschnitt:



Inkompressible Flüssigkeit: ρ = const. $\Rightarrow$ $\operatorname{div}\vec{v} = 0$

Äquivalent: Während dt gilt $dV_{ein} = dV_{aus}$

$A_1 \cdot (v_1 dt)$ $\quad$ $A_2 \cdot (v_2 dt)$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{A_2}{A_1}$$

Anders ausgedrückt: $\text{const.} = \rho v A = \rho \frac{d\ell}{dt} A = \rho \frac{dV}{dt} = \frac{dM}{dt} \equiv I_M$

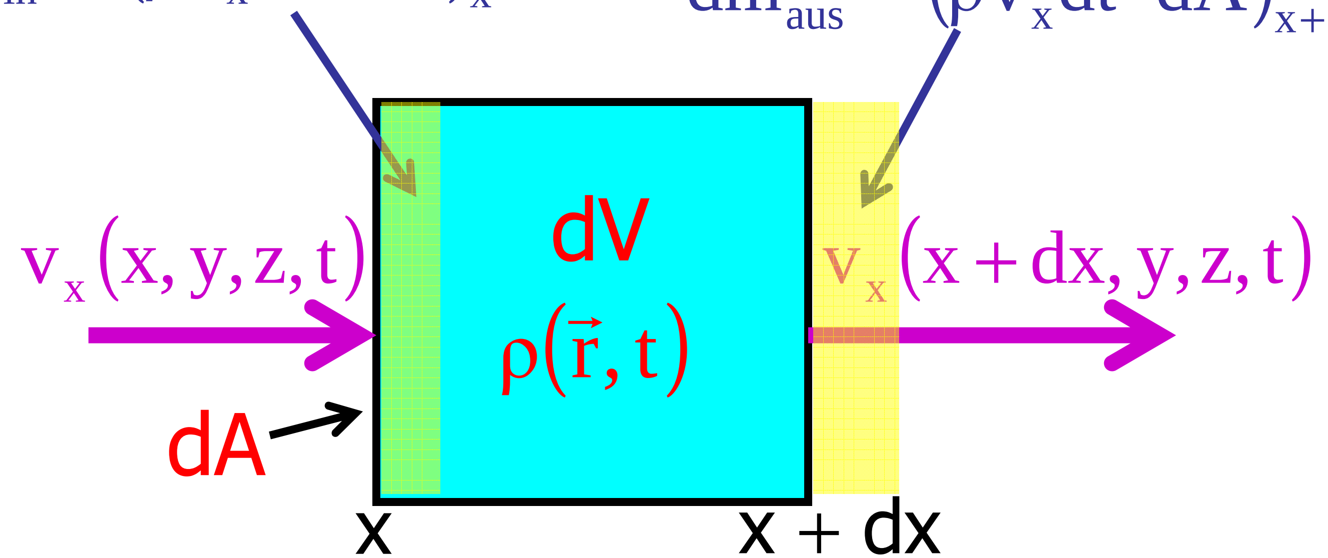
Die <u>Massenstromstärke</u> I_M ist konstant.

7.2. Kontinuitätsgleichung

Annahme: **Flüssigkeitsmasse wird weder erzeugt noch vernichtet**

Massenbilanz während dt (nur x-Richtung):

$$dm_{in} = \left(\rho v_x dt \cdot dA\right)_x \qquad dm_{aus} = \left(\rho v_x dt \cdot dA\right)_{x+dx}$$



$$dm\,\big|_x = dm\,\big|_{in} - dm\,\big|_{aus} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho v_x\right)\cdot \underbrace{dx \cdot dA}_{dV} \cdot dt$$

7.2. Kontinuitätsgleichung

$$dm\big|_x = dm\big|_{in} - dm\big|_{aus} = -\frac{\partial}{\partial x}(\rho v_x)\cdot \underbrace{dx \cdot dA}_{dV} \cdot dt$$

Gesamtmassenbilanz für dV während dt:

$$dm = dm\big|_x + dm\big|_y + dm\big|_z = -\vec{\nabla}(\rho\vec{v})\cdot dV \cdot dt$$

Folge:

$$\rho(t) + \frac{d\rho}{dt}dt = \rho(t+dt) = \rho(t) + \frac{dm}{dV} = \rho(t) - \vec{\nabla}(\rho\vec{v})dt$$

$\Rightarrow$ Kontinuitätsgleichung: $$\frac{d\rho}{dt} + \underbrace{\vec{\nabla}(\rho\vec{v})}_{} = 0$$

$$\vec{\nabla}(\rho\vec{v}) \equiv \mathrm{div}(\rho\vec{v})$$

7.2. Kontinuitätsgleichung

Kontinuitätsgleichung: $$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}(\rho\vec{v}) = 0$$

Def: **Stromdichte** $\boxed{\vec{j} = \rho(\vec{r},t) \cdot \vec{v}(\vec{r},t)}$

$=$ Massenfluss durch Fläche $\perp \vec{v}$

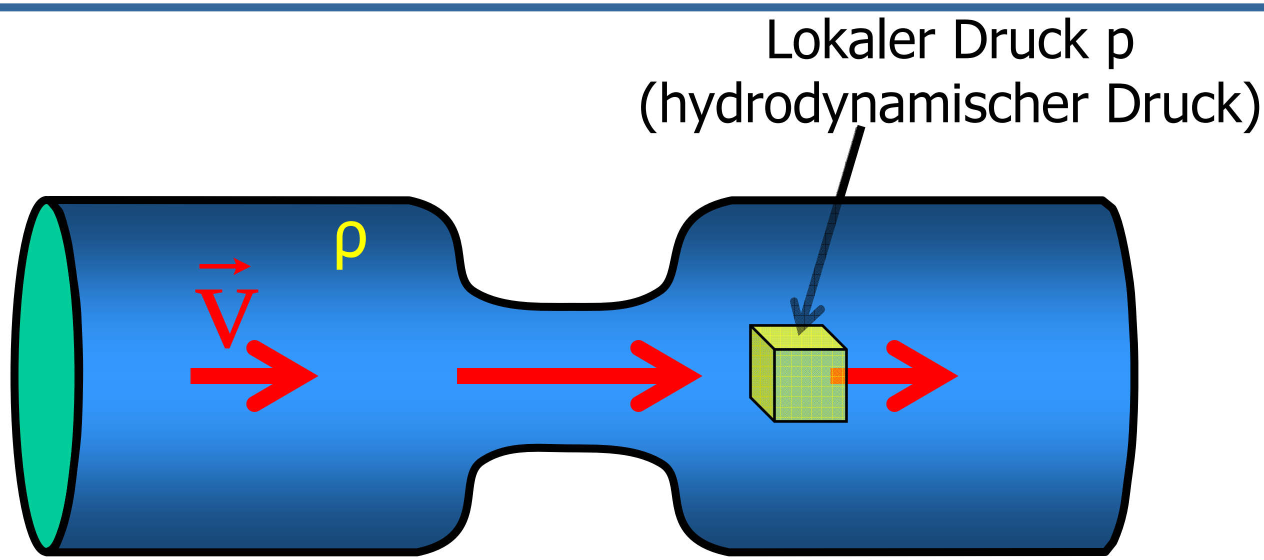
Folgerung:

Kontinuitätsgleichung: $$\frac{d\rho}{dt} + \vec{\nabla}\,\vec{j} = 0$$

Wenn die Masse in dV abnimmt, ...

fließt Masse aus dV hinaus

7.3. Die Bernoulligleichung

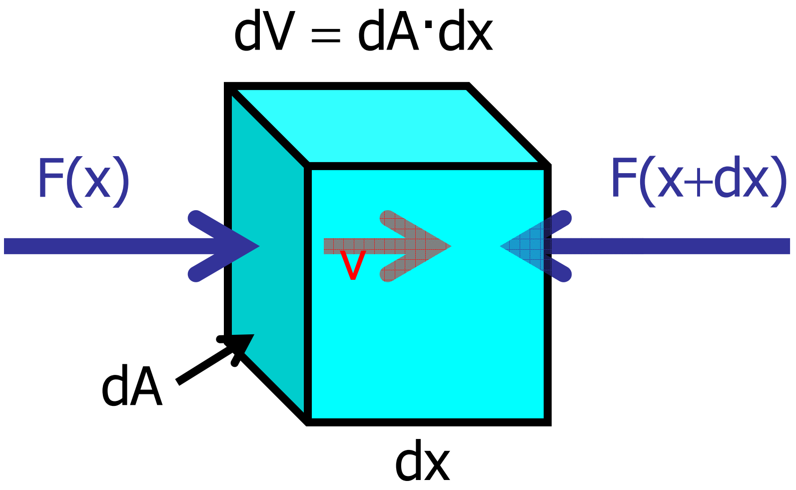


<u>Annahmen:</u>

1. ideale Flüssigkeit $\Rightarrow$ $\eta = 0$ $\Rightarrow$ v = const. entlang Rohrquerschnitt
2. inkompressible Flüssigkeit $\Rightarrow$ ρ = const.
3. keine Schwerkraft ($\Leftrightarrow$ kein Rohrgefälle)

7.3. Bernoulligleichung

Energiedichten: $\varepsilon = \frac{dE}{dV}$



$$d\varepsilon_p dV = [F(x+dx) - F(x)] \cdot dx$$
$$= [p(x+dx) - p(x)] \cdot dA \cdot dx$$
$$= \frac{dp}{dx} \cdot dx \cdot dV \quad \Rightarrow$$

Potentielle Energiedichte: $\varepsilon_p = p$
(Nullpunkt willkürlich bei p = 0)

$$\varepsilon_{kin} dV = \tfrac{1}{2} \underbrace{\rho \cdot dV}_{dm} \cdot v^2 \quad \Rightarrow$$

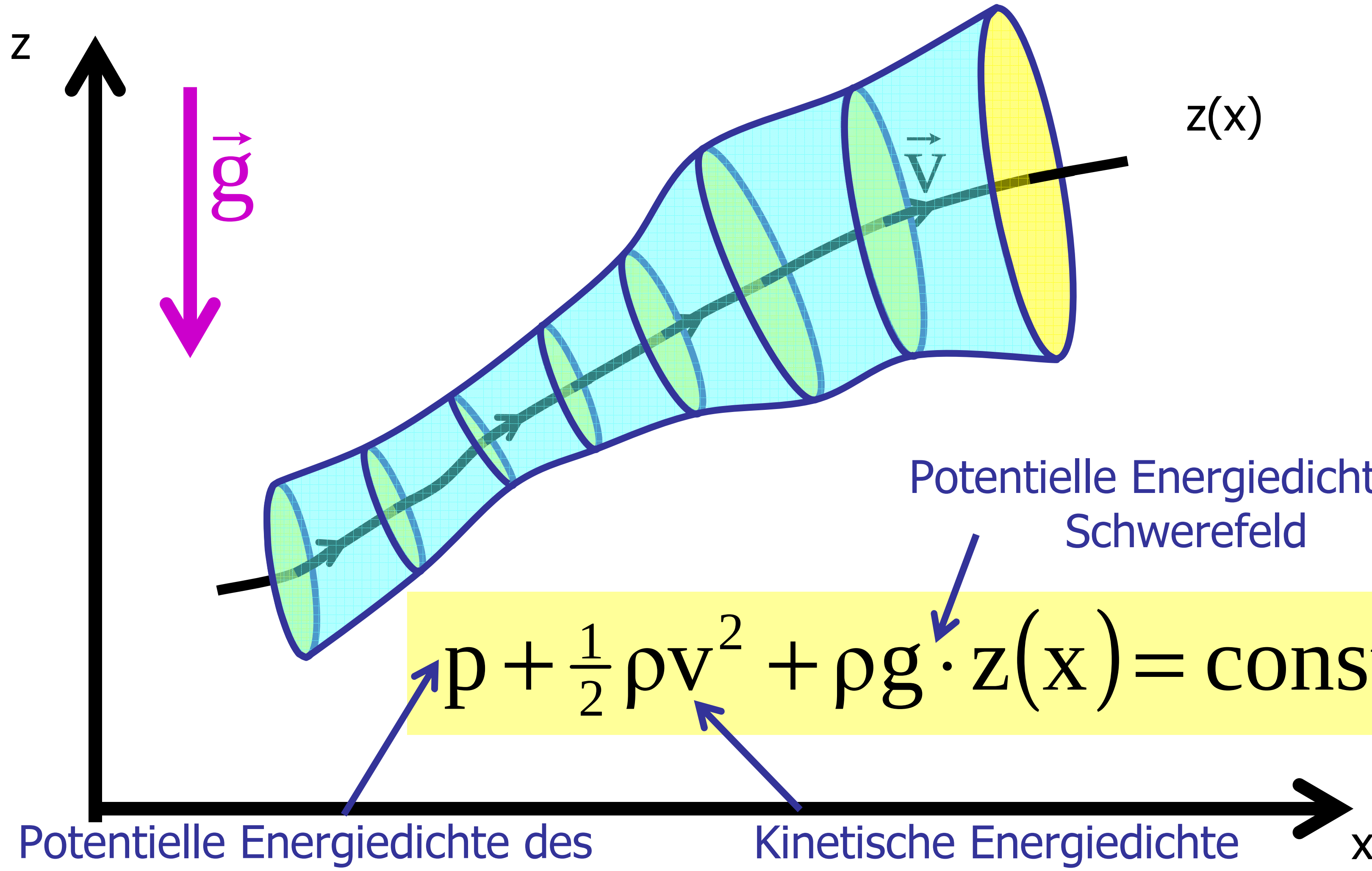
Kinetische Energiedichte: $\varepsilon_{kin} = \tfrac{1}{2} \rho v^2$

$$\varepsilon_p + \varepsilon_{kin} = \text{const.} \quad \Rightarrow$$

Bernoulli-Gleichung:

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 = p_0 = \text{const.}$$

7.3. Rohr mit Gefälle im Schwerefeld



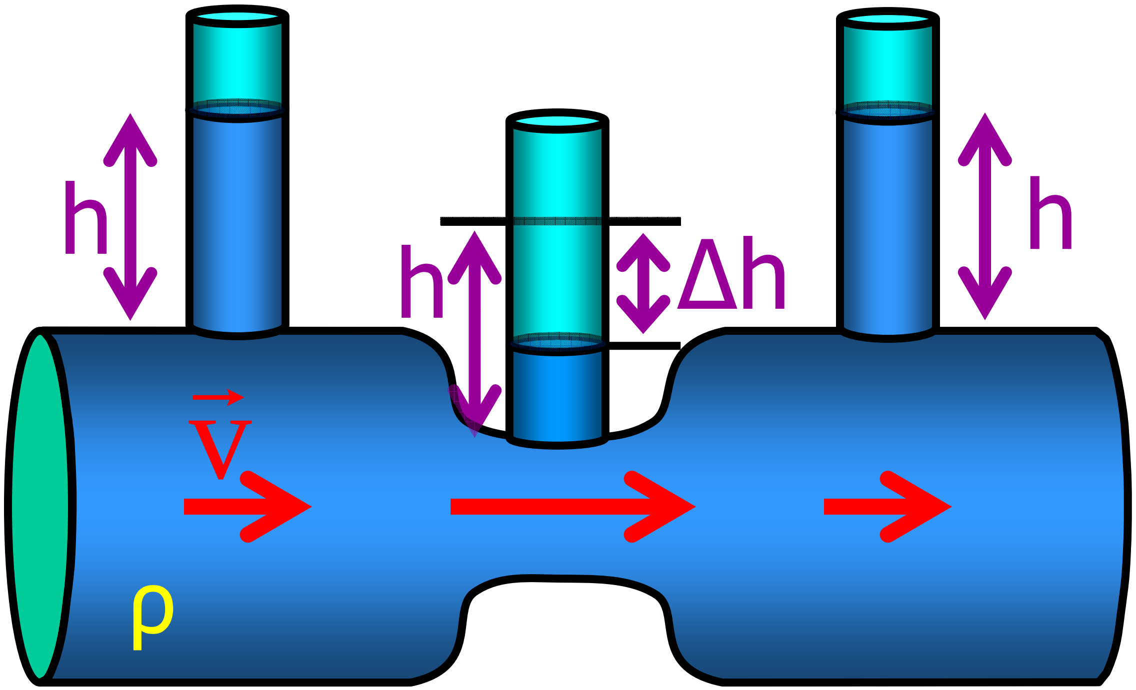
Potentielle Energiedichte im Schwerefeld

$$p + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g \cdot z(x) = \text{const.}$$

Potentielle Energiedichte des hydrodynamischen Drucks

Kinetische Energiedichte der Strömung

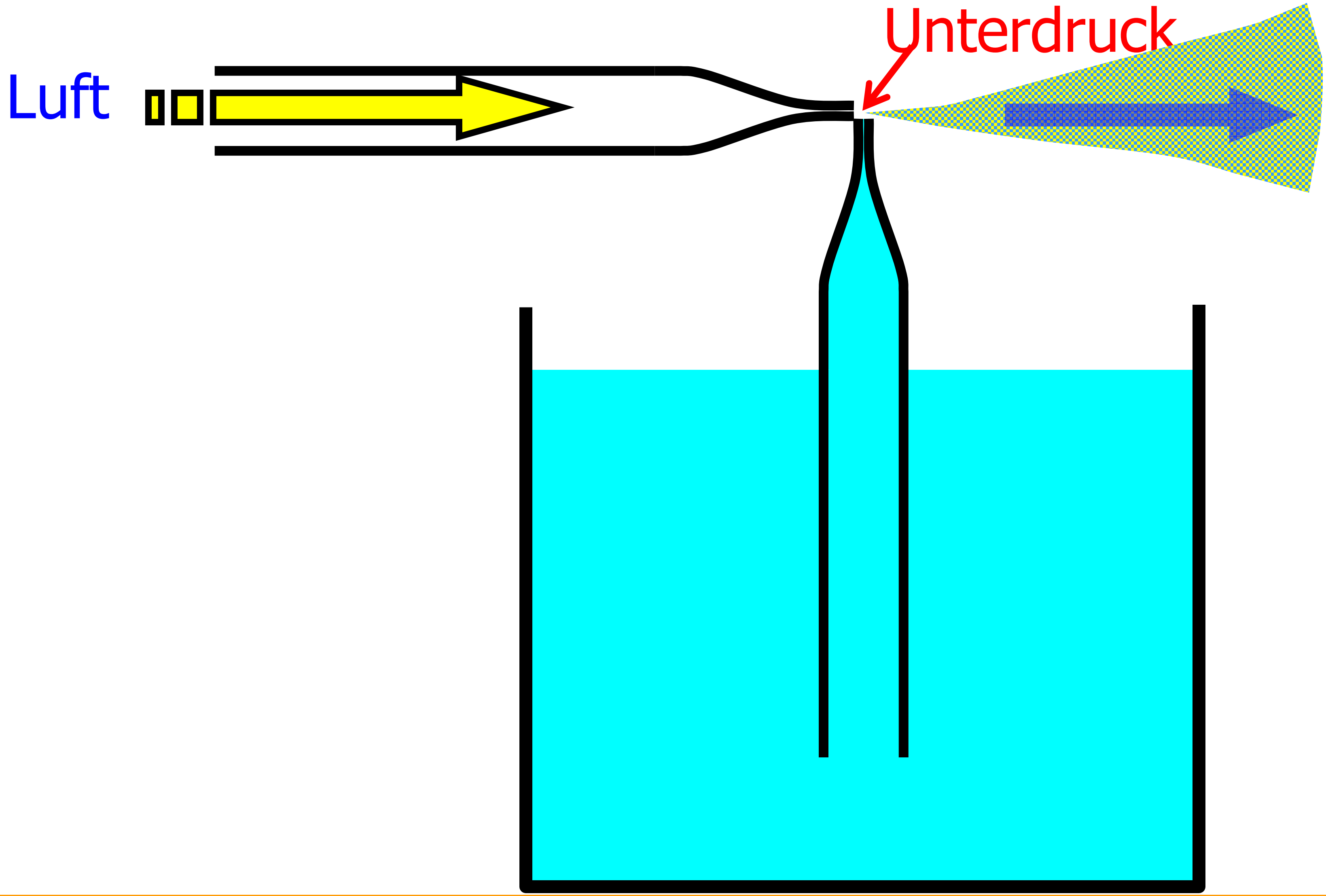
7.3. Anwendung: Druckverteilung im Rohr



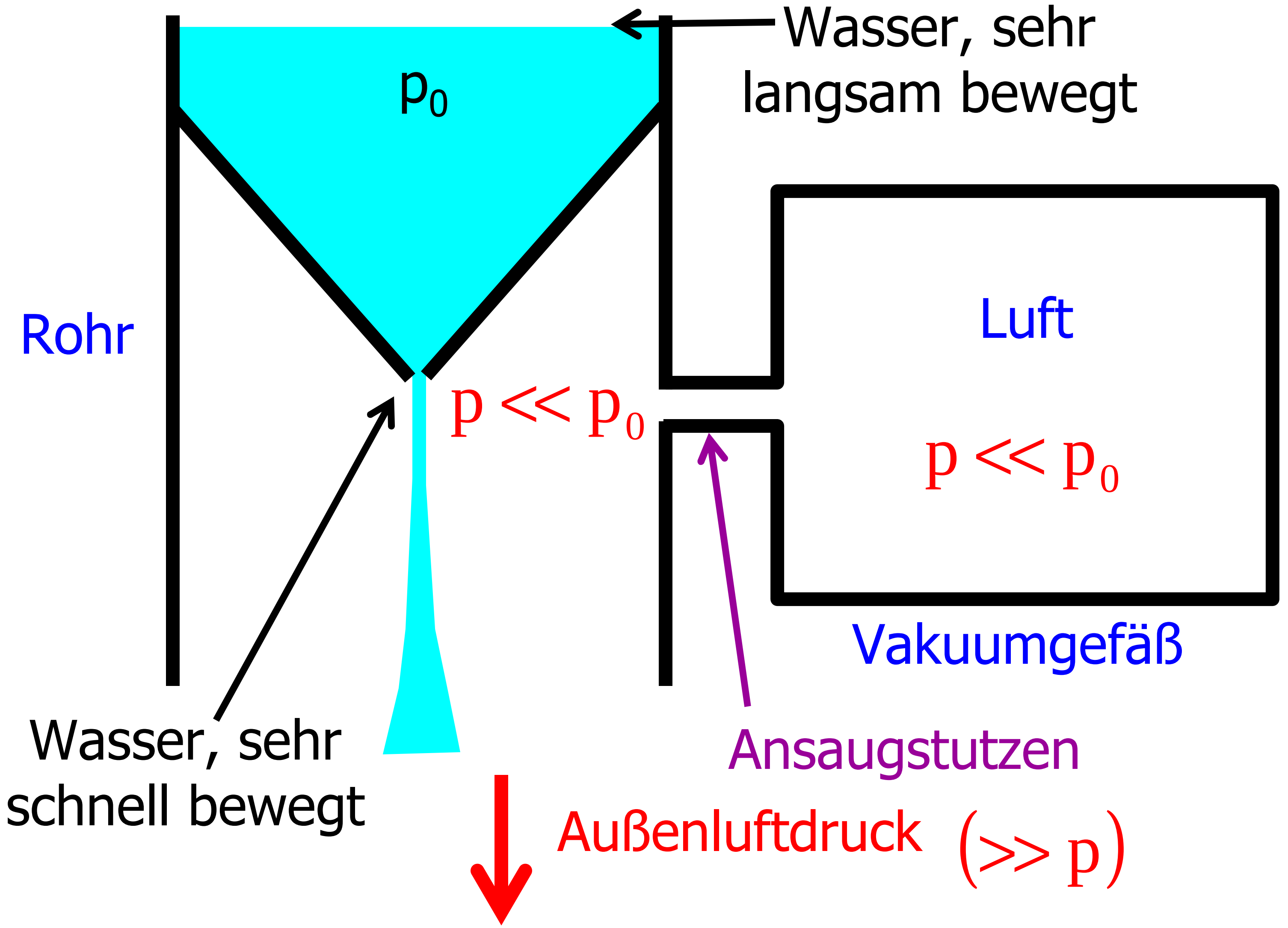
$$-\Delta p = \rho\, g\, \Delta h = \tfrac{1}{2}\rho\, \Delta\left(v^2\right)$$

Reibung $\Rightarrow$ zusätzliches kontinuierliches Druckgefälle

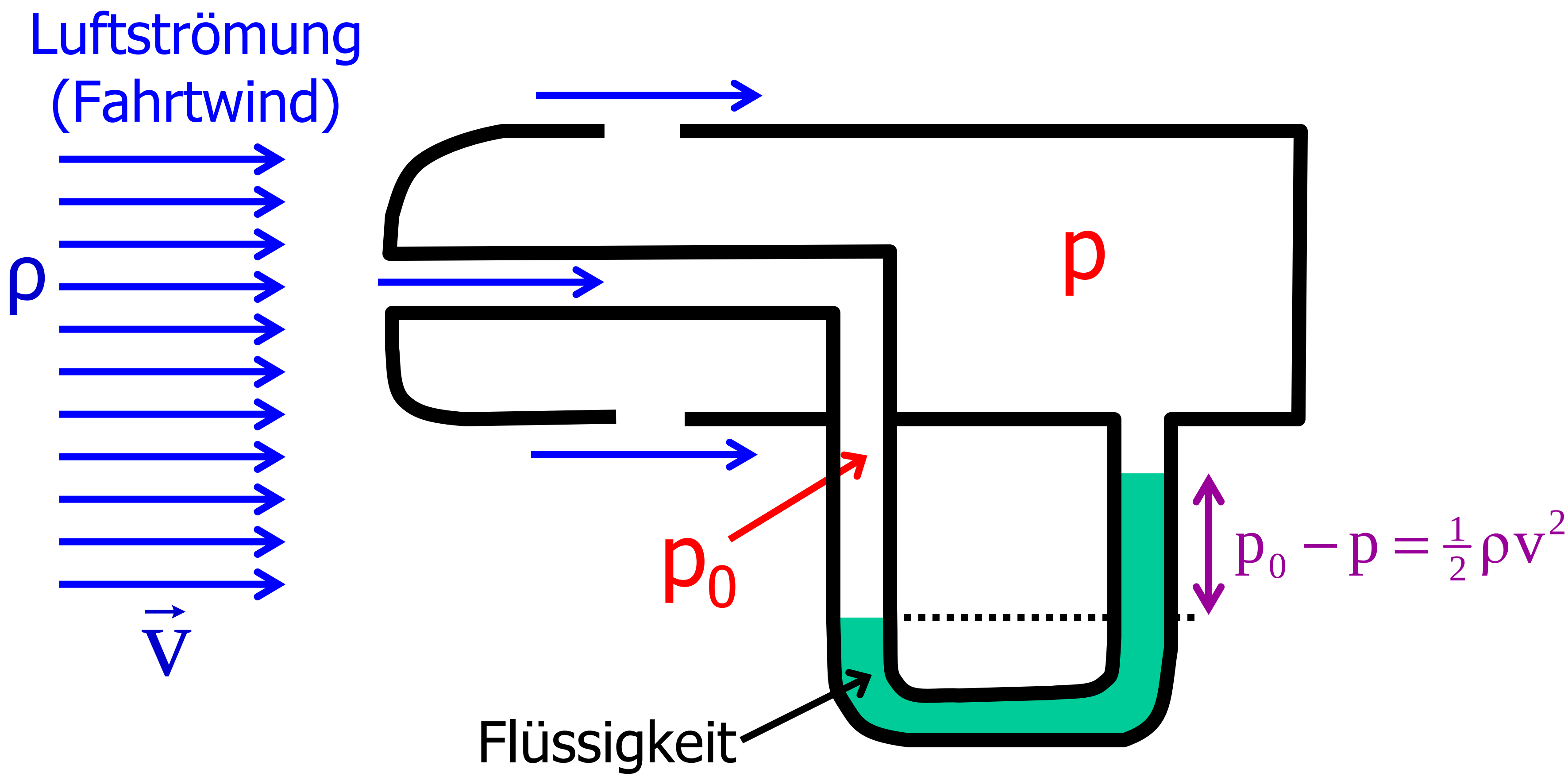
7.3. Anwendung: Zerstäuber



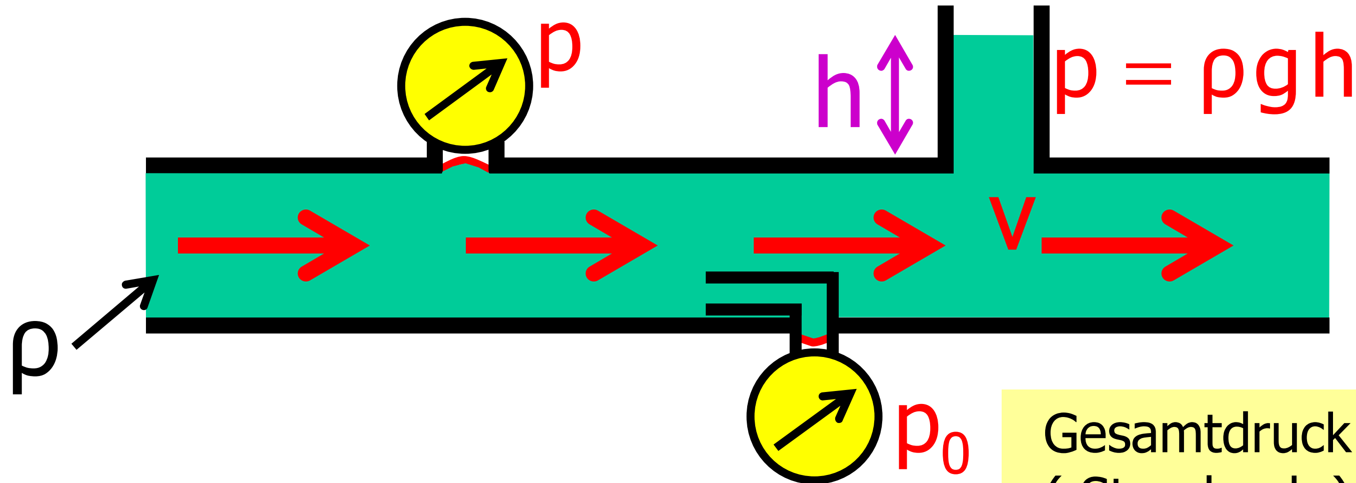
7.3. Anwendung: Wasserstrahlpumpe



7.3. Prandtlsches Staurohr



7.3. Beispiel: Pitot-Rohr



Statischer Druck

Gesamtdruck (Staudruck)

$$p_0 = p + \tfrac{1}{2}\rho v^2$$

7.3. Hydrodynamisches Paradoxon

$d \to 0 \;\Rightarrow\; v_2 \to \infty$

$\Rightarrow$ Unterdruck überwiegt Schwerkraft