Kap. 9 Schwingungen und Wellen

1. Harmonischer Oszillator
2. Überlagerung von Schwingungen
3. Gedämpfte Schwingungen
4. Erzwungene Schwingung
5. Gekoppelte Ozillatoren
6. Energiebillanz in harmonischen Oszillatoren
7. Wellentypen und Wellenausbreitung
8. Interferenz, Reflexion und Brechung
9. Beugung
10. Schallwellen und Akustik

9.1. Allgemeine Schwingungslehre

Schwingungen $\rightarrow$ Universalphänomen

- Mechanik
- Akustik
- Elektrodynamik
- Atomphysik ...

Harmonische Schwingung

q = abstrakte „Auslenkung”

V(q) = Potential mit Minimum in q_0 (o.B.d.A. $q_0 = 0$, $V(q_0) = 0$)

kleine Auslenkungen $\Rightarrow$ Taylorentwicklung um $q_0 = 0$

$$V(q) = \underbrace{V(0)}_{0} + \underbrace{V'(0)}_{0} \cdot q + \tfrac{1}{2} \underbrace{V''(0)}_{k > 0} \cdot q^2 + O(q^3)$$

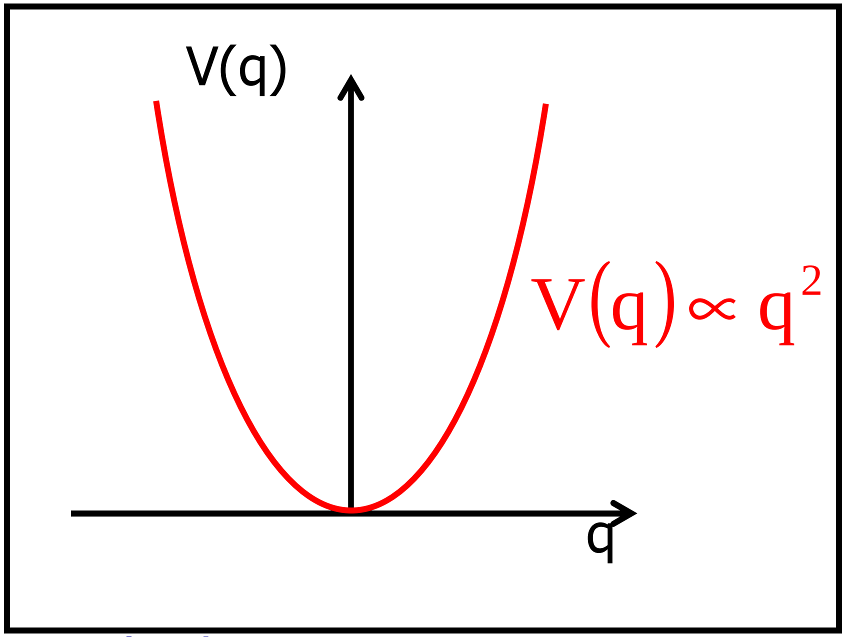
$$\boxed{V(q) = \tfrac{1}{2} k q^2}$$

harmonisches Potential ($\rightarrow$ Parabel)

9.1. Harmonische Schwingung

$$\boxed{V(q) = \tfrac{1}{2} k q^2}$$

harmonisches Potential ($\rightarrow$ Parabel)



$$\Rightarrow \quad F(q) = -V'(q) = -k\,q$$

$\rightarrow$ Hookesches Gesetz

Bewegungsgleichung:

$$\ddot{q} \propto F \propto -q$$

positive Prop.-Konstante ω^2

$$\Rightarrow \quad \boxed{\ddot{q} + \omega^2 q = 0}$$

Schwingungsgleichung

$$\Rightarrow \quad \boxed{q(t) = A \cdot \sin(\omega t + \varphi)}$$

harmonische Schwingung

Amplitude   Anfangsphase

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$$

Frequenz   Periode

9.1. Harmonische Schwingung

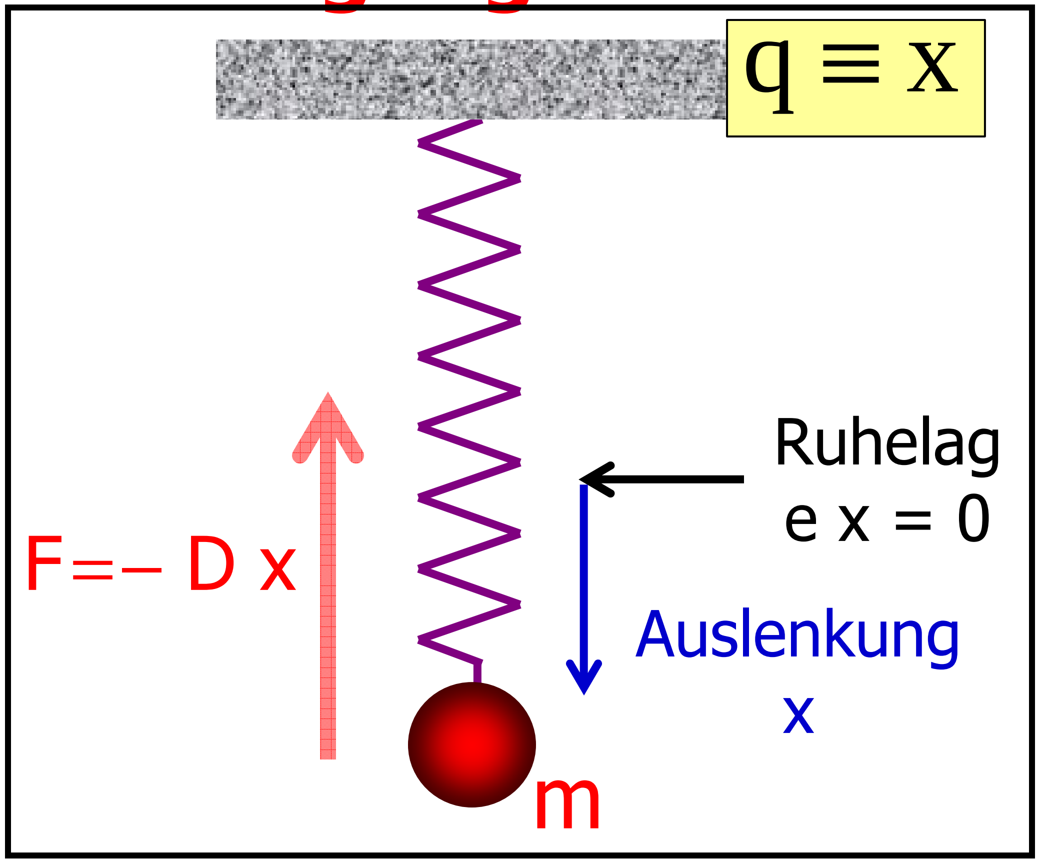
Beispiel:
Federpendel

$$m\ddot{x} = F = -Dx$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{x} + \frac{D}{m}x = 0$$

$$\omega^2$$



$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} \propto \frac{1}{\sqrt{m}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}} \propto \sqrt{m}}$$

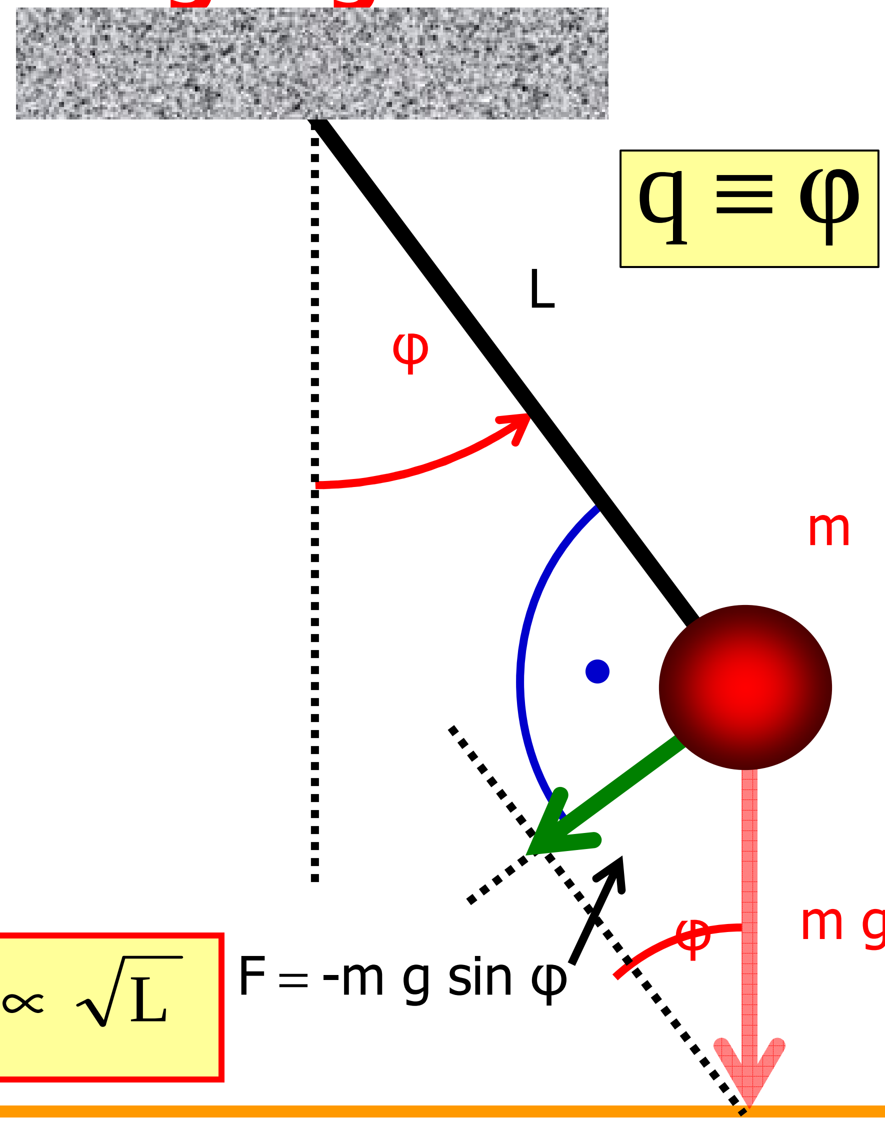
9.1. Harmonische Schwingung

Beispiel: Fadenpendel

$$m\left(L\,\ddot{\varphi}\right) = F = -mg\sin\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$\ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{g}{L}}_{\omega^2}\sin\varphi = 0$$



$\Rightarrow$ anharmonische Schwingung!

$|\varphi| \ll 1 \;\Rightarrow$ harmonische Näherung $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\boxed{\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \propto \frac{1}{\sqrt{L}}}$$

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \propto \sqrt{L}}$$

9.2. Überlagerung von Schwingungen

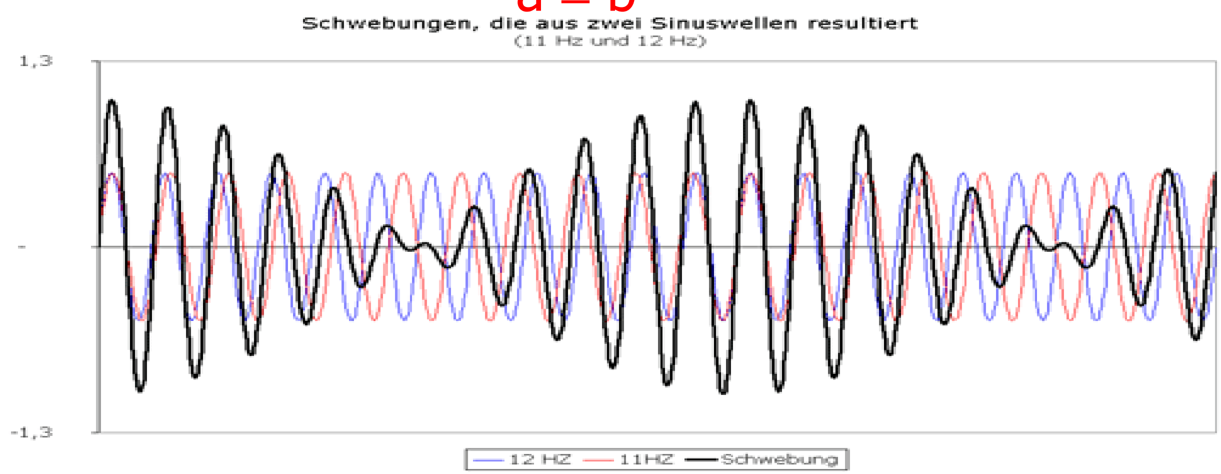
a) Eindimensionale Systeme

i) Schwingungen gleicher Frequenz:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= a \sin(\omega t + \varphi_1) \\ q_2 &= b \sin(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad q \equiv q_1 + q_2 = c \sin(\omega t + \varphi)$$

$\varphi_1 = \varphi_2$: $\quad c = a + b \overset{a=b}{=} 2\,a \quad$ konstruktive Interferenz

$\varphi_1 = \varphi_2 \pm \pi$: $\quad c = |a - b| \underset{a=b}{=} 0 \quad$ destruktive Interferenz



9.2. Üerlagerung von Schwingungen

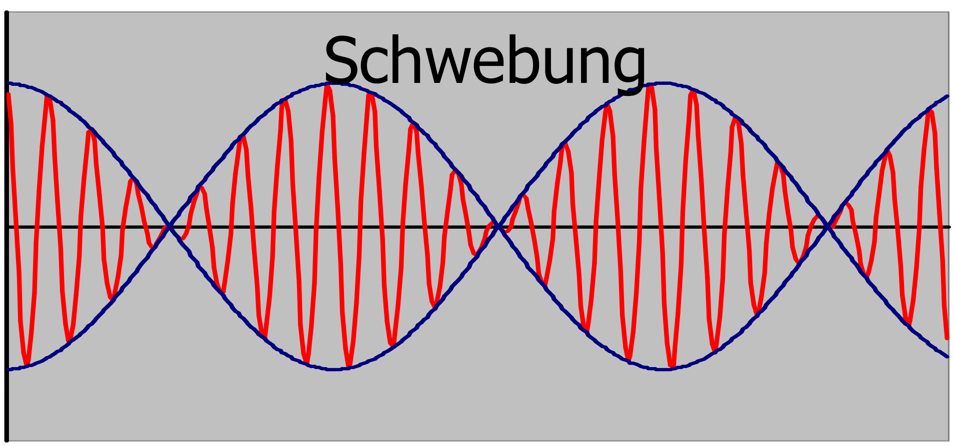
ii) Schwingungen unterschiedlicher Frequenz:

$$q_1 = a\cos(\omega_1 t) \qquad\qquad q_2 = a\cos(\omega_2 t)$$

$$q \equiv q_1 + q_2 = 2a\,\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}\,t\right)}\,\underbrace{\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\,t\right)}$$

langsame Amplituden-Schwingung, Schwebung

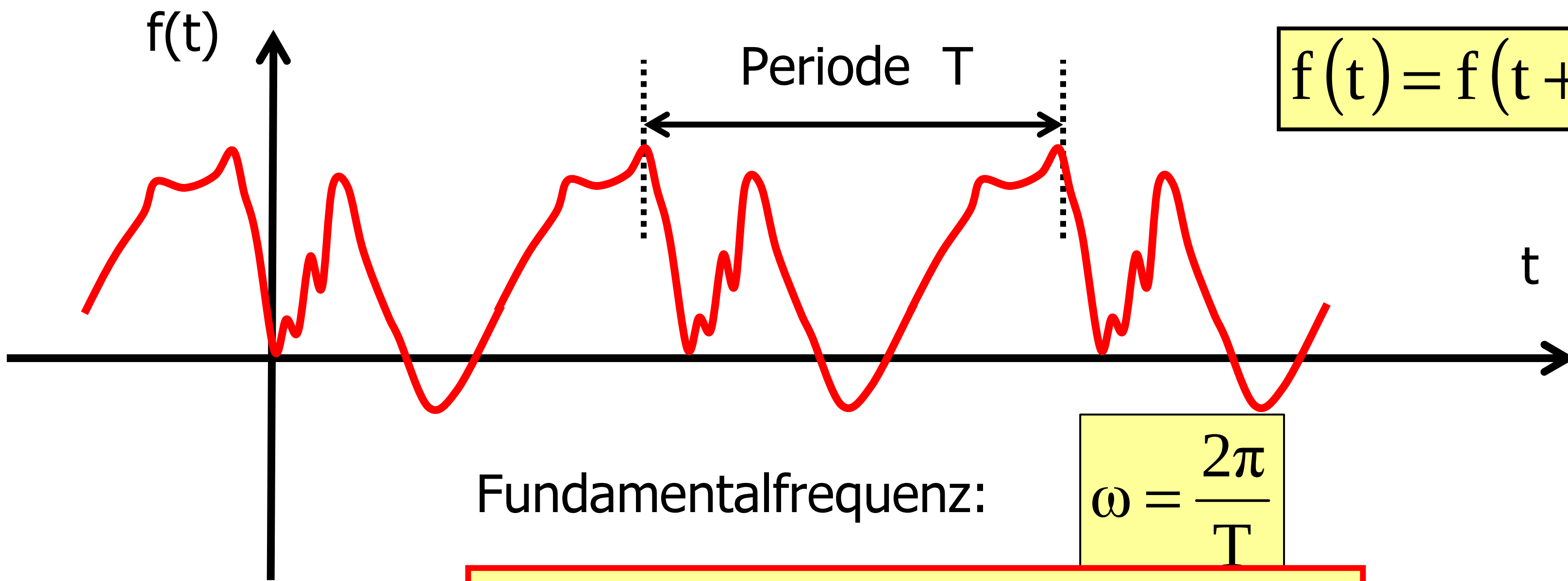
schnelle Schwingung mittlerer Frequenz



$$T_S = \frac{4\pi}{|\omega_1 - \omega_2|}$$

9.2. Überlagerung von Schwingungen

iii) Fourierzerlegung (allgemeine periodische Schwingungen)



$$f(t) = f(t+T)$$

Fundamentalfrequenz: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Fourierzerlegung: $$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Grundschwingung: $n = 1,\ \omega_1 = \omega$

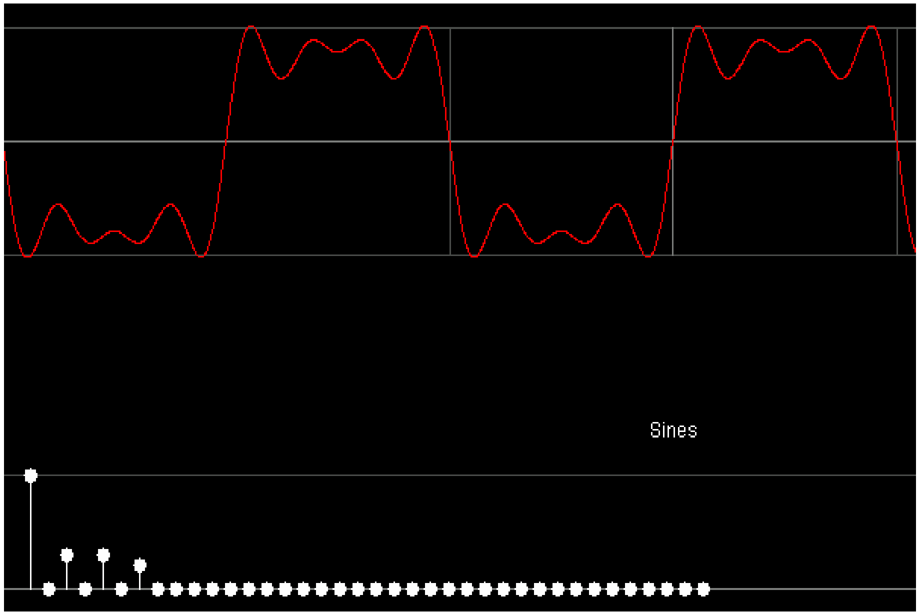
Oberwellen (Harmonische): $n \geq 2,\ \omega_n = n\,\omega$

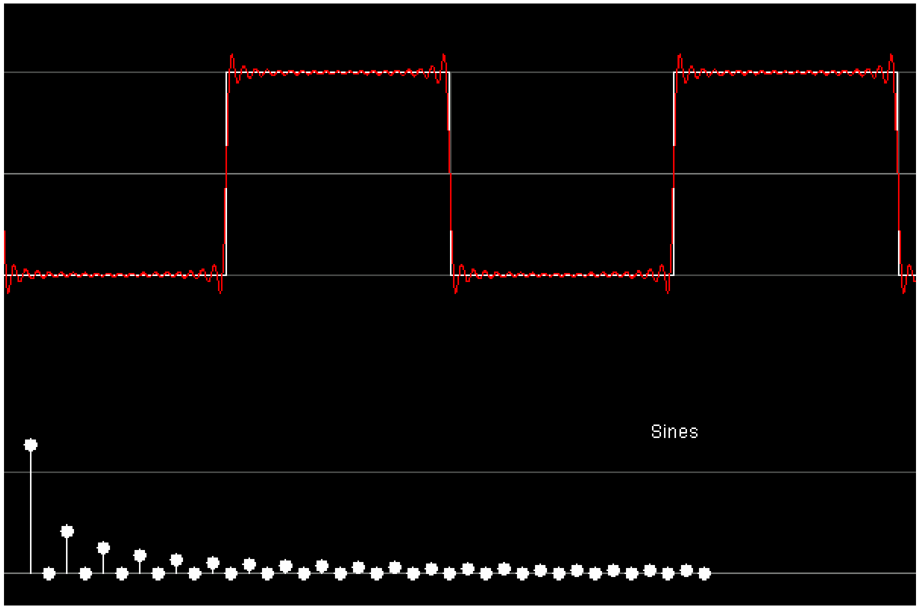
Klirrfaktor: $$\frac{1}{a_1^2} \cdot \sum_{n=2}^{\infty} a_n^2$$

9.2. Zerlegung von Schwingungen

Fourier-Transformation:

Jede periodische Funktion f(t) lässt sich schreiben als Summe von sin- und cos-Funktionen der Frequenzen $n*\omega_0$.





9.2. Überlagerung von Schwingungen

b) Zweidimensionale Systeme, Lissajous-Figuren

Überlagerte x- & y-Schwingungen mit Frequenzen ω_x, ω_y $\quad (\hat{e}_y \perp \hat{e}_x)$

Beispiel: Fadenpendel → $\quad \omega \equiv \omega_x = \omega_y = \sqrt{\frac{L}{g}} \; , \quad x \mathrel{\hat{=}} \varphi_x \; , \quad y \mathrel{\hat{=}} \varphi_y$

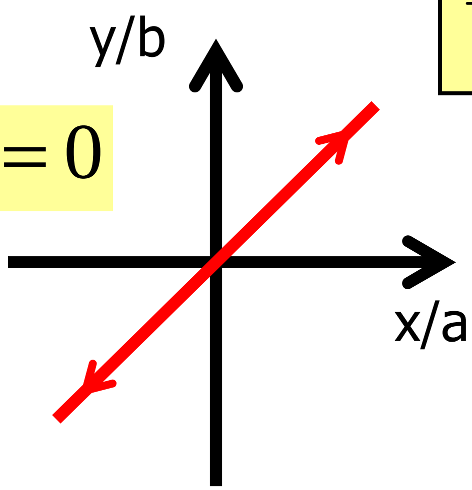
i) $\omega_x = \omega_y = \omega$:

$$x = a \sin(\omega t) \; , \quad y = b \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2\cos\varphi}{ab} xy = \sin^2\varphi}$$

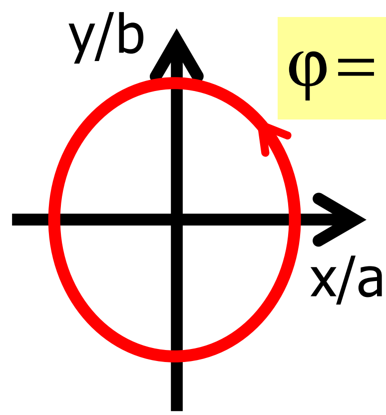
Ellipse

$\varphi = 0$

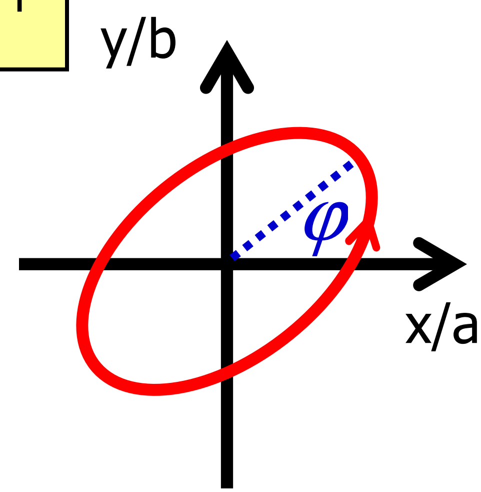


$\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$



$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$



$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

9.2. Überlagerung von Schwingungen

ii) $\omega_x \neq \omega_y$: i.a. keine geschlossenen Kurven

Ausnahme: $$\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m} \Rightarrow \frac{T_x}{T_y} = \frac{m}{n}$$ rationale Zahl

n, m teilerfremd

Periode der Schwingung: $T = n \cdot T_x = m \cdot T_y$

$\rightarrow$ geschlossene Lissajous-Figur mit n Maxima in x und m in y

$\rightarrow$ Demo-Experiment