

9.3. Gedämpfte Schwingung

Stokes-Reibung $\Rightarrow F_R \propto -\dot{q} \Rightarrow \boxed{\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0}$

Lösung durch Ansatz:

$$q \propto e^{\lambda t}$$

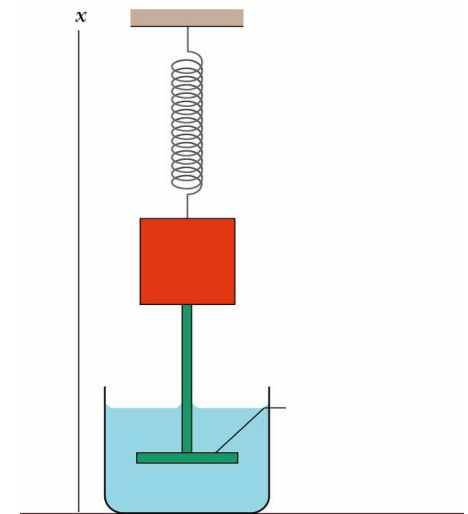
$$\Rightarrow \boxed{q(t) = a e^{\lambda_+ t} + b e^{\lambda_- t}}$$

$$\text{mit } \boxed{\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}}$$

Interpretation: $\text{Re } \lambda_{\pm} \propto (\text{Dämpfungszeitkonstanten})^{-1} = (\tau_D)^{-1}$
 $\text{Im } \lambda_{\pm} \propto \text{Oszillationsfrequenz } \omega$

Lösungstypen: $\gamma < \omega_0$: **Schwingfall**
 $\gamma > \omega_0$: **Kriechfall**
 $\gamma = \omega_0$: **aperiodischer Grenzfall**

Demo-Versuch: Waltenhofen-Pendel

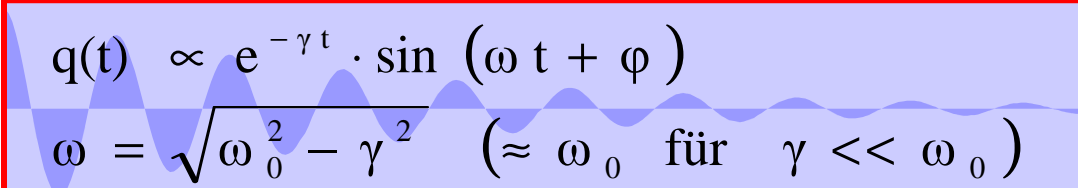


9.3. Gedämpfte Schwingung

$$q(t) = a e^{\lambda_+ t} + b e^{\lambda_- t} \quad \text{mit} \quad \lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma < \omega_0$: Schwingfall

Dämpfungszeit: $\tau_D = \frac{1}{\gamma}$
 $\lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau_D = \infty$



$$q(t) \propto e^{-\gamma t} \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

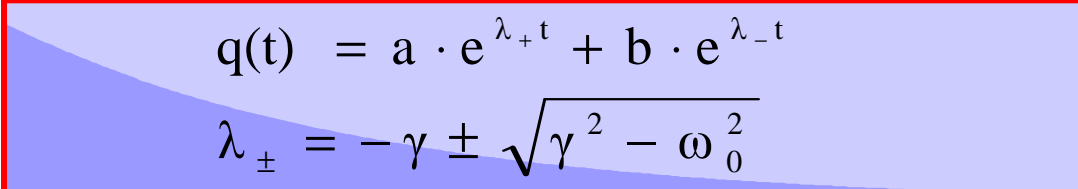
$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} \quad (\approx \omega_0 \text{ für } \gamma \ll \omega_0)$$

$\gamma > \omega_0$: Kriechfall

kein Schwingterm

max. 1 Überschwinger

$$\tau_D^{\max} \approx \frac{2\gamma}{\omega_0^2} \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} \infty$$



$$q(t) = a \cdot e^{\lambda_+ t} + b \cdot e^{\lambda_- t}$$

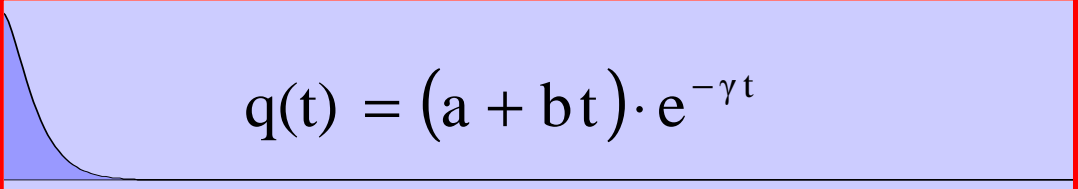
$$\lambda_{\pm} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$$

$\gamma = \omega_0$: aperiodischer Grenzfall (\rightarrow spezielle Lösungsform)

kein Schwingterm

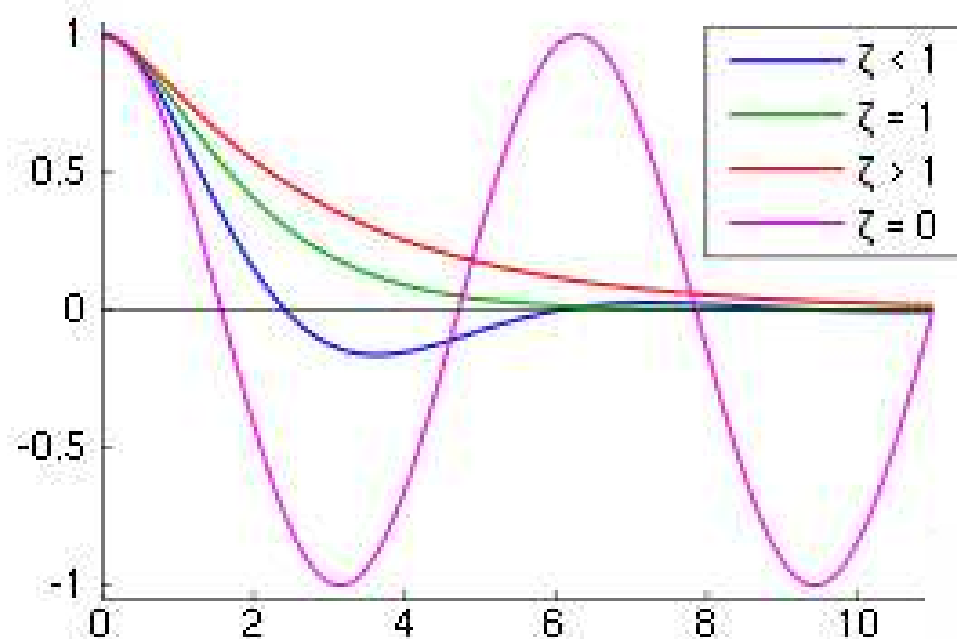
max. 1 Überschwinger

schnellste Dämpfung



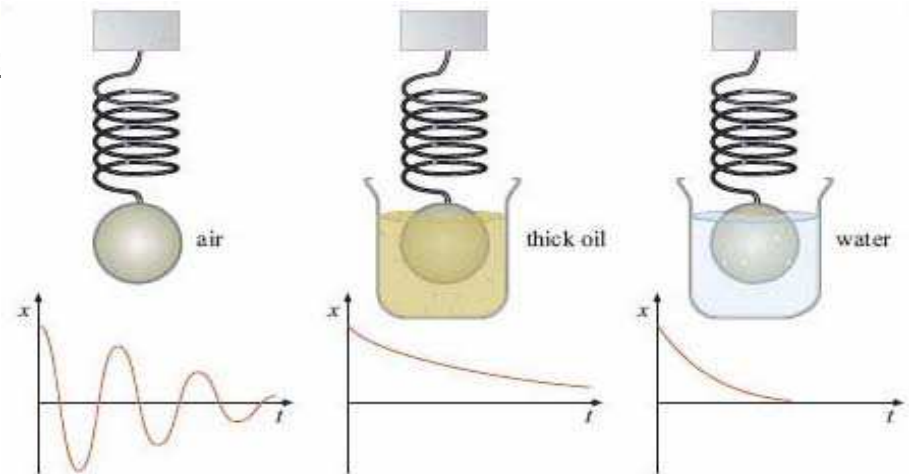
$$q(t) = (a + bt) \cdot e^{-\gamma t}$$

9.3. Gedämpfte Schwingung



unterkritisch gedämpft
kritisch gedämpft
überkritisch gedämpft
ungedämpft

Experimentelle Realisierung
(Übungsblatt 15)



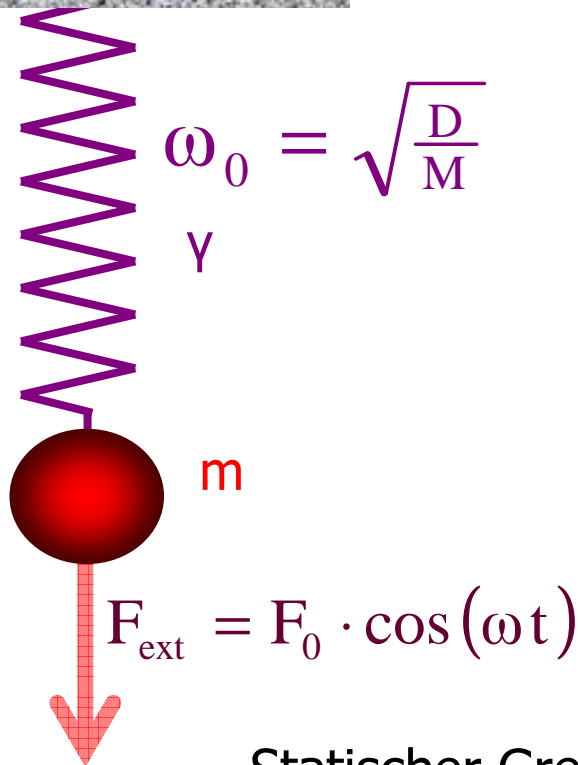
9.4. Erzwungene Schwingung



Schwinger angeregt durch $F_{\text{ext}}(t)$; oft

$$F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$$

Beispiel: Schwingfall ($\gamma < \omega_0$)



Energie-Dämpfungszeit:

$$\tau_D^E = \frac{\tau_D}{2} = \frac{1}{2\gamma}$$

$$\text{Güte: } Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0 \tau_D^E$$

($2\pi \times \#$ Schwingungen in τ_D^E)

Statischer Grenzfall ($\omega = 0$):

$$x \equiv x_G = \frac{F_0}{D} = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

9.4. Erzwungene Schwingung

Differentialgleichung: $\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = F_{\text{ext}}(t) = F_0 \cos(\omega t)$

Lösungsstrategie:

rechte Seite $\neq 0 \Leftrightarrow$ inhomogene Dgl.

$q(t) =$ **Einschwingen** + **Stationäre Schwingung**

- allgemeine Lösg. der hom. Dgl.
- stirbt mit τ_D aus

$$q \propto e^{-\gamma t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

- abhängig von Anfangsbed.

- spezielle Lösg. der inhom. Dgl.
- stationäre Schwingung

$$q = A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

schwingt mit
 ω von F_{ext}

Phase zwischen
 q und F_{ext}

- unabhängig von Anfangsbed.

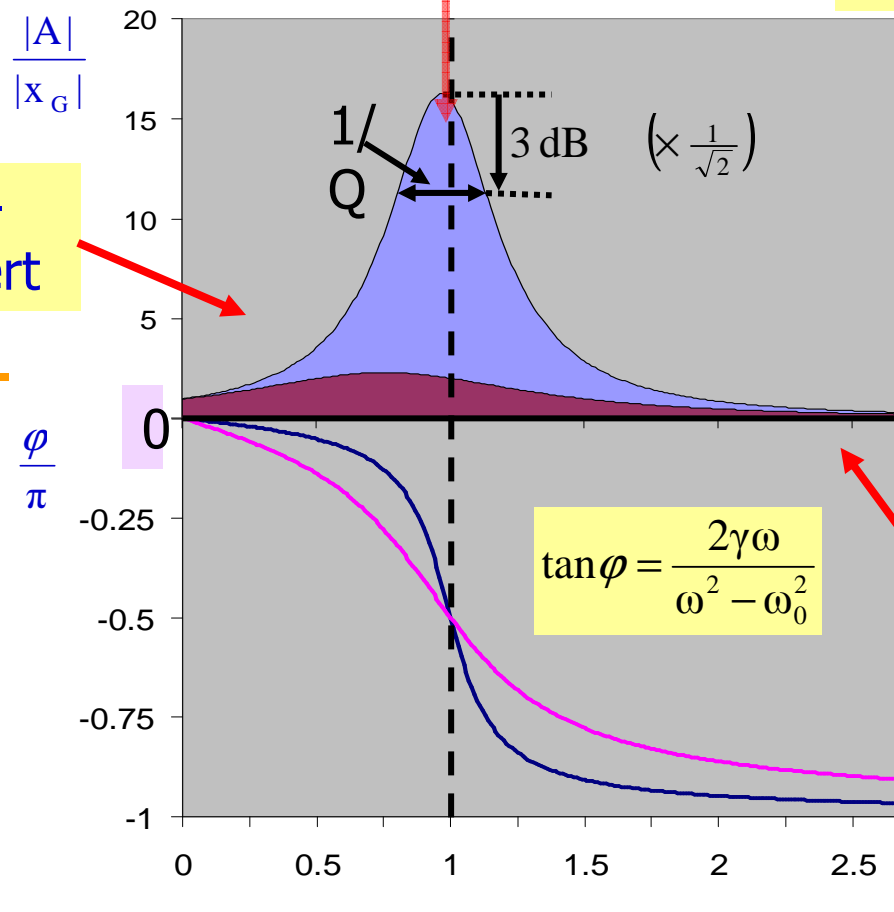
9.4. Resonanz

Resonanzfrequenz $\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2} < \omega_0$

$$\left| \frac{A}{x_G} \right| = \frac{\omega_0^2}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

Die Resonanzkurven $A(\omega)$ und $\varphi(\omega)$:

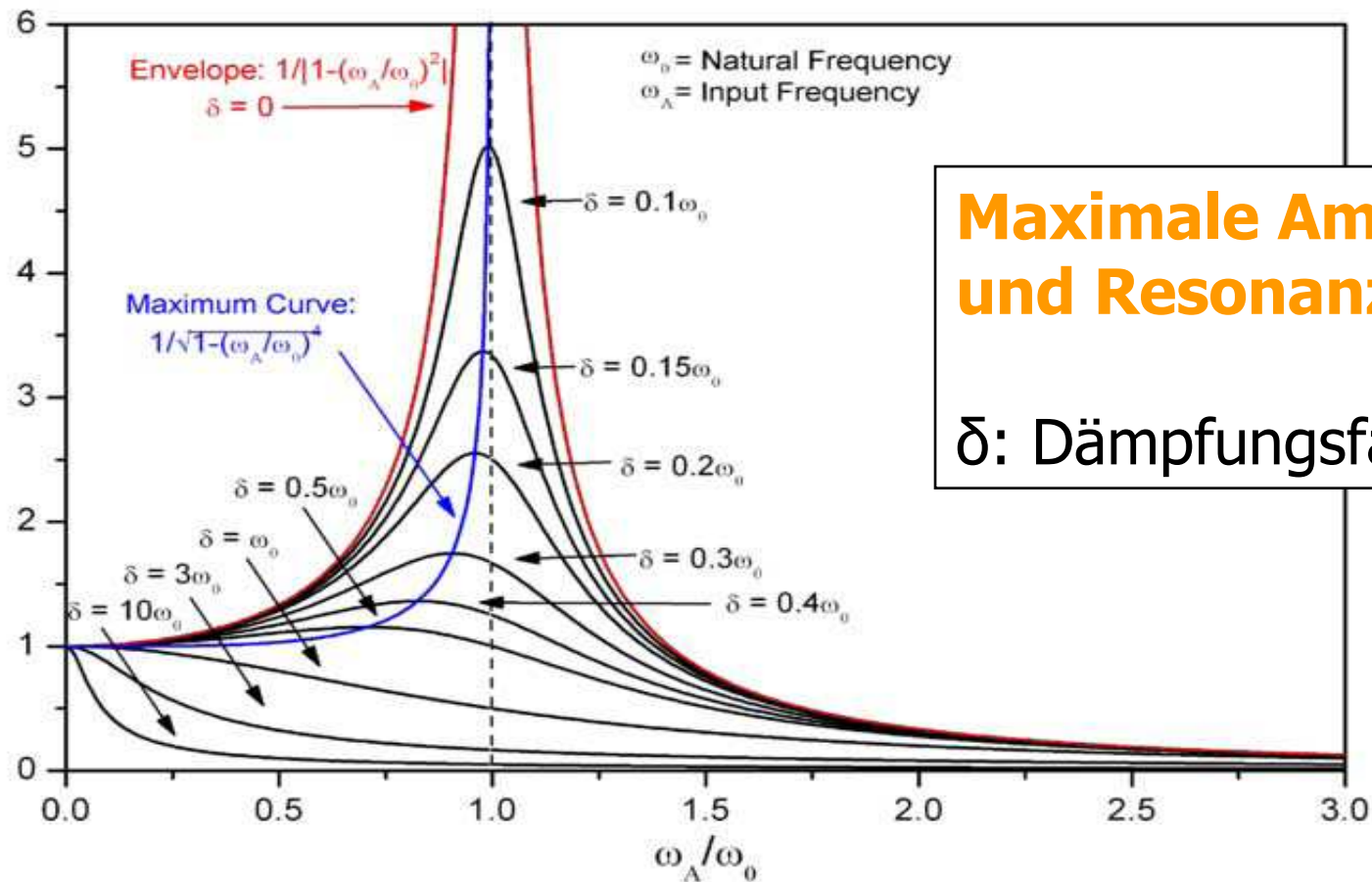
Federdominiert



	$1/Q$	Q
	0,25	4
	0,70	1,43

Masse-dominiert

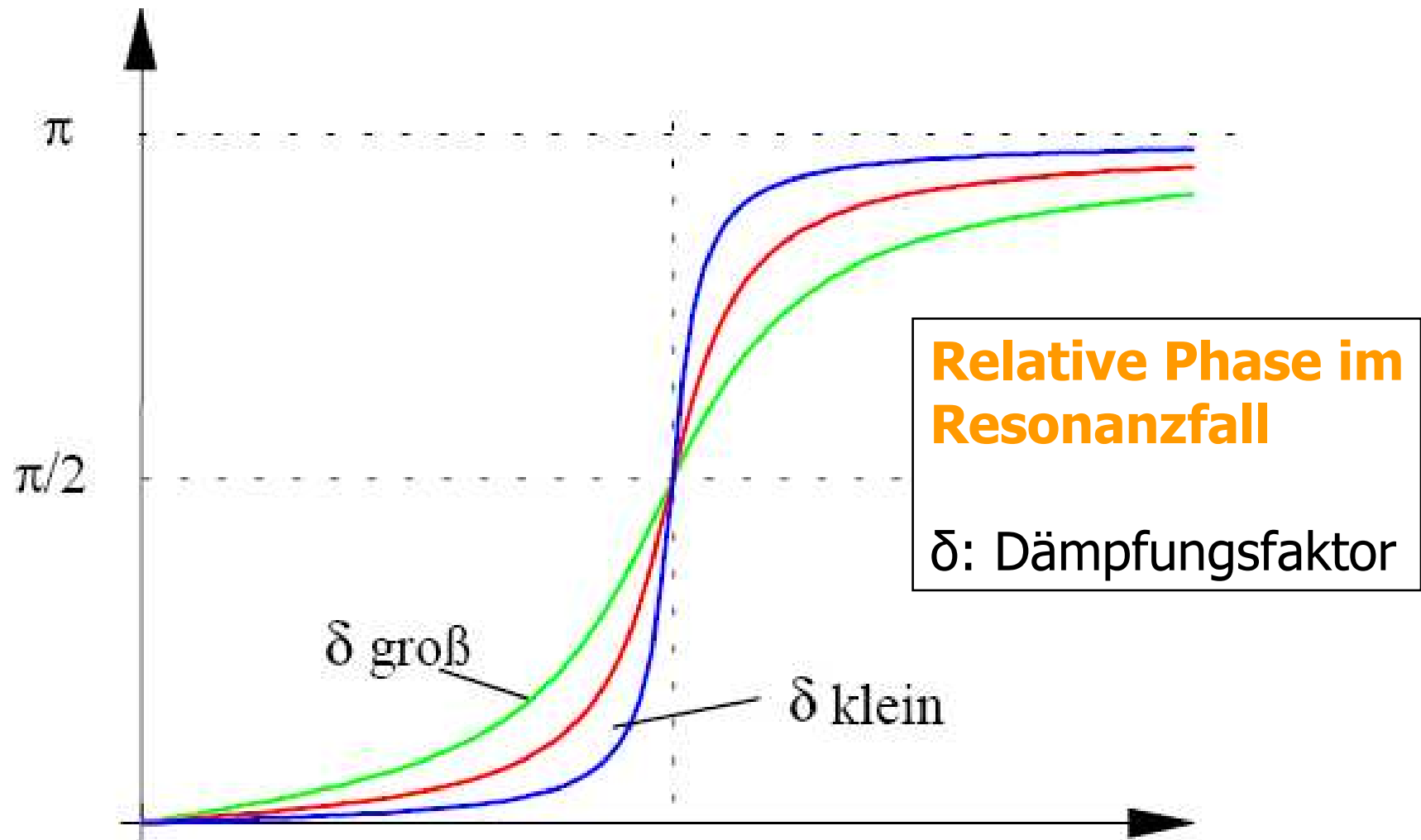
9.4. Resonanzkurve



**Maximale Amplitude
und Resonanz**

δ : Dämpfungsfaktor

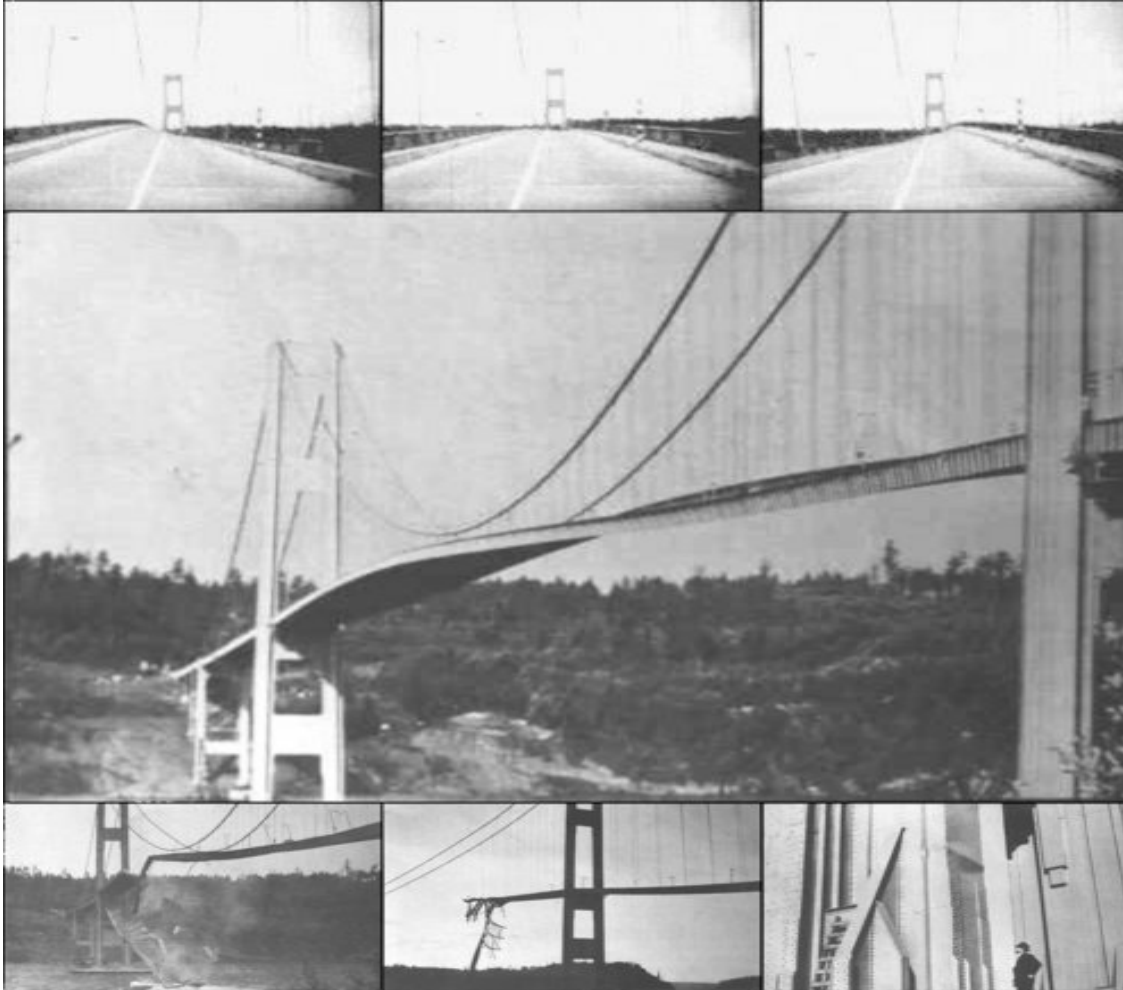
9.4. Phase der Resonanz



9.4. Resonanzphänomene



Resonanz kann auch destruktive Wirkungen haben:

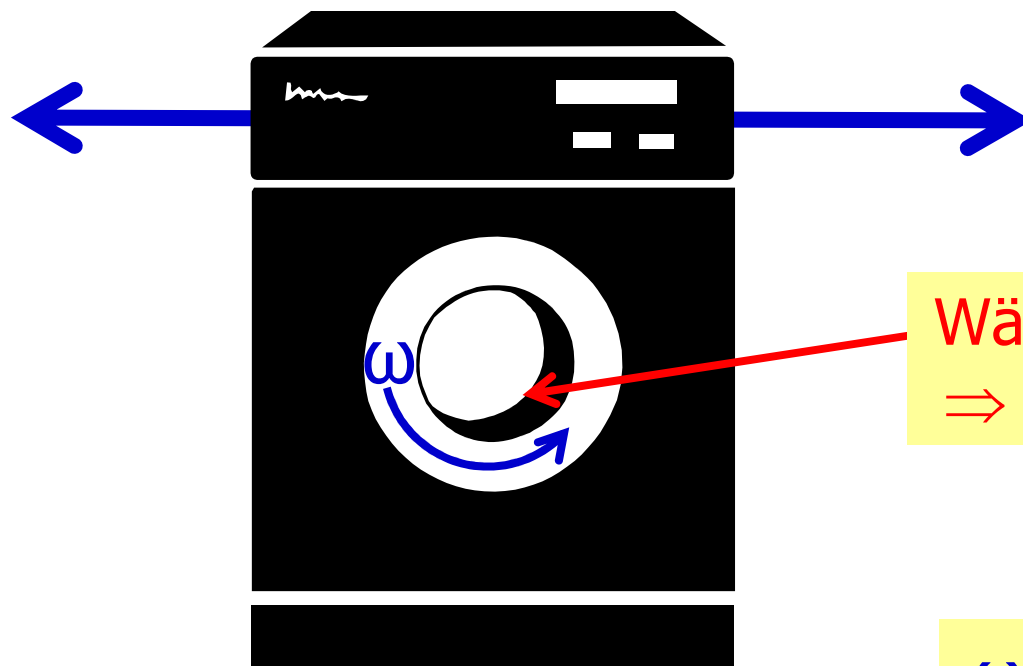


1940 geriet eine Hängebrücke in USA durch starke Winde in eine resonante Schwingung und zerbrach.

9.4. Resonanzphänomene

Beispiel: Waschmaschine

Schleudergang
(An-/ Auslaufphase)



Eigenfrequenz der
Wackelbewegung:

$$\omega_0$$

Wäsche \Rightarrow Unwucht
 $\Rightarrow F_{\text{ext}} = F_0 \cdot \cos(\omega t)$

$\omega = \omega_0$: Resonante
Wackelbewegung