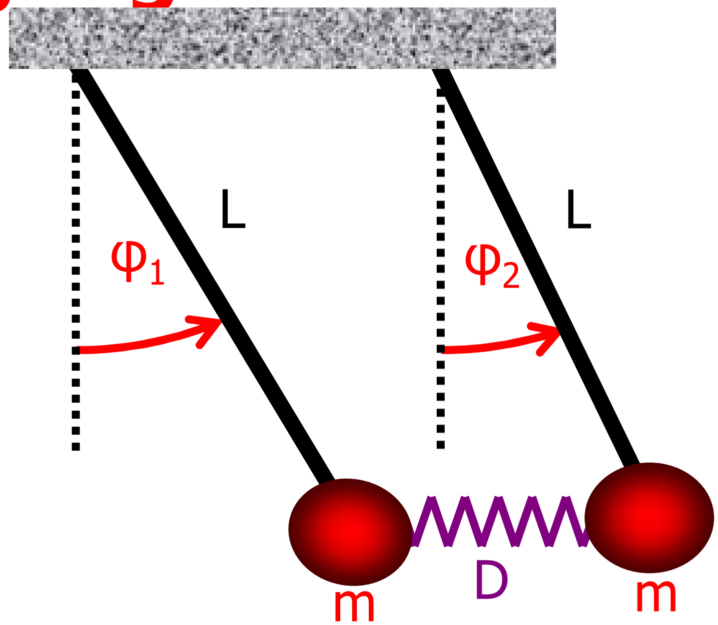
9.5. Gekoppelte Schwingungen

→ gekoppelte Differentialgleichungen

Beispiel: gekoppelte Pendel (→ Bild)

$$\frac{d^2}{dt^2}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} + M\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = 0$$

$$M = \begin{pmatrix}\frac{g}{L}+\frac{D}{m} & -\frac{D}{m}\\ -\frac{D}{m} & \frac{g}{L}+\frac{D}{m}\end{pmatrix}$$



Lösungsweg: Wahl von Normalkoordinaten, derart dass M diagonal

⇒ entkoppelte eindim. Schwingungen in Normalkoordinaten

hier:

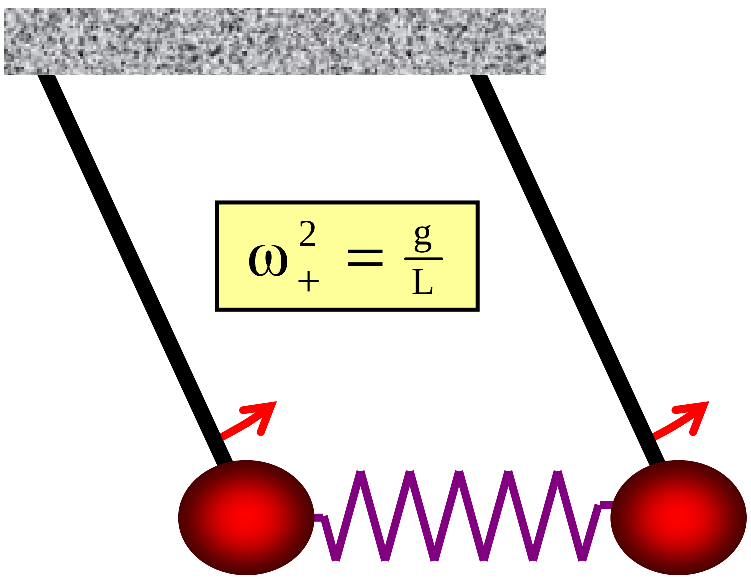
$$\boxed{\xi_\pm = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 \pm \varphi_2)} \Rightarrow \begin{cases}\ddot{\xi}_+ + \omega_+^2\xi_+ = 0 \text{ mit } \omega_+^2 = \frac{g}{L}\\ \ddot{\xi}_- + \omega_-^2\xi_- = 0 \text{ mit } \omega_-^2 = \frac{g}{L}+\frac{2D}{m}\end{cases}$$

9.5. Gekoppelte Schwingung

Veranschaulichung der Normalmoden

$$\xi_\pm = \tfrac{1}{2}(\varphi_1 \pm \varphi_2)$$

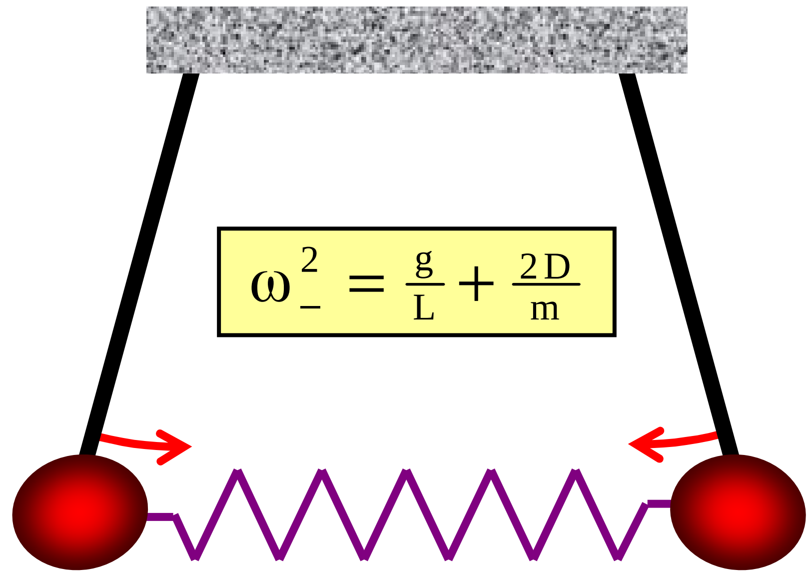
ξ_+-Mode



$$\omega_+^2 = \frac{g}{L}$$

$$\varphi_1 = \varphi_2\,, \quad \xi_- = 0$$

ξ_--Mode



$$\omega_-^2 = \frac{g}{L} + \frac{2D}{m}$$

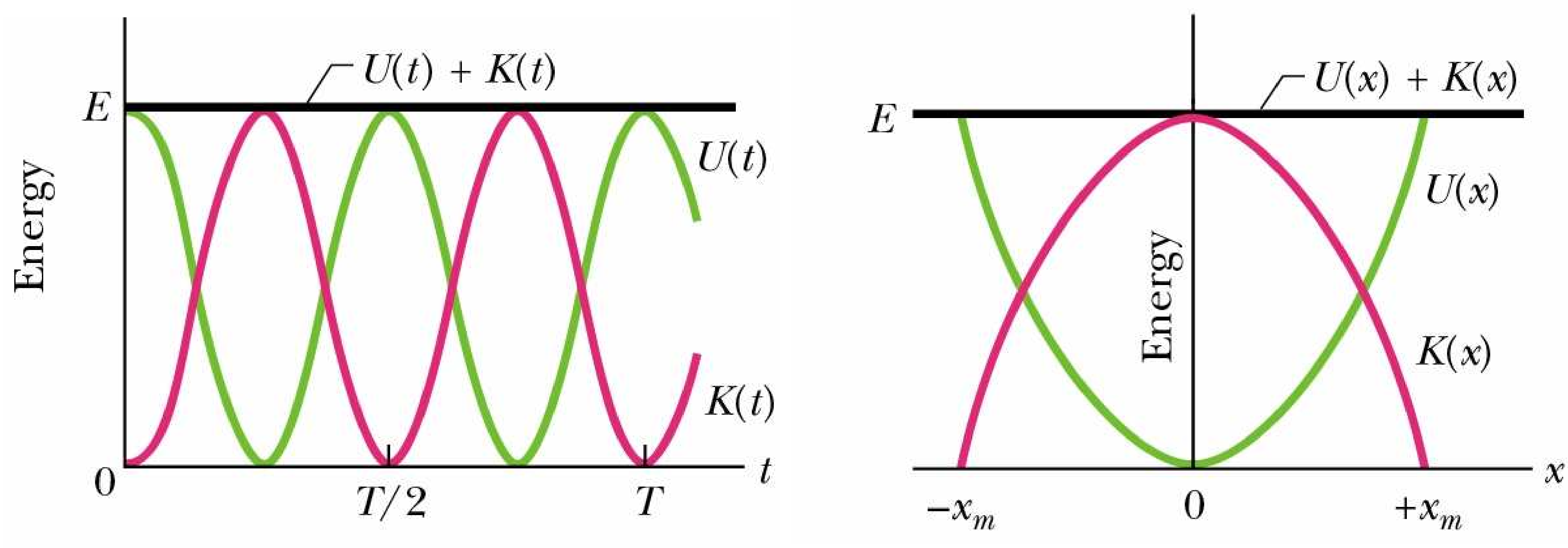
$$\varphi_1 = -\varphi_2\,, \quad \xi_+ = 0$$

Überlagerung der Moden $\Rightarrow$ Schwebung $\rightarrow$ Demo-Experiment

9.6. Energiebilanz

Gesamtenergie im harmonischen Oszillator ist konstant.
Für den Mittelwert in einer Schwingungsperiode gilt:

$$\langle E_k \rangle = \langle E_p \rangle$$

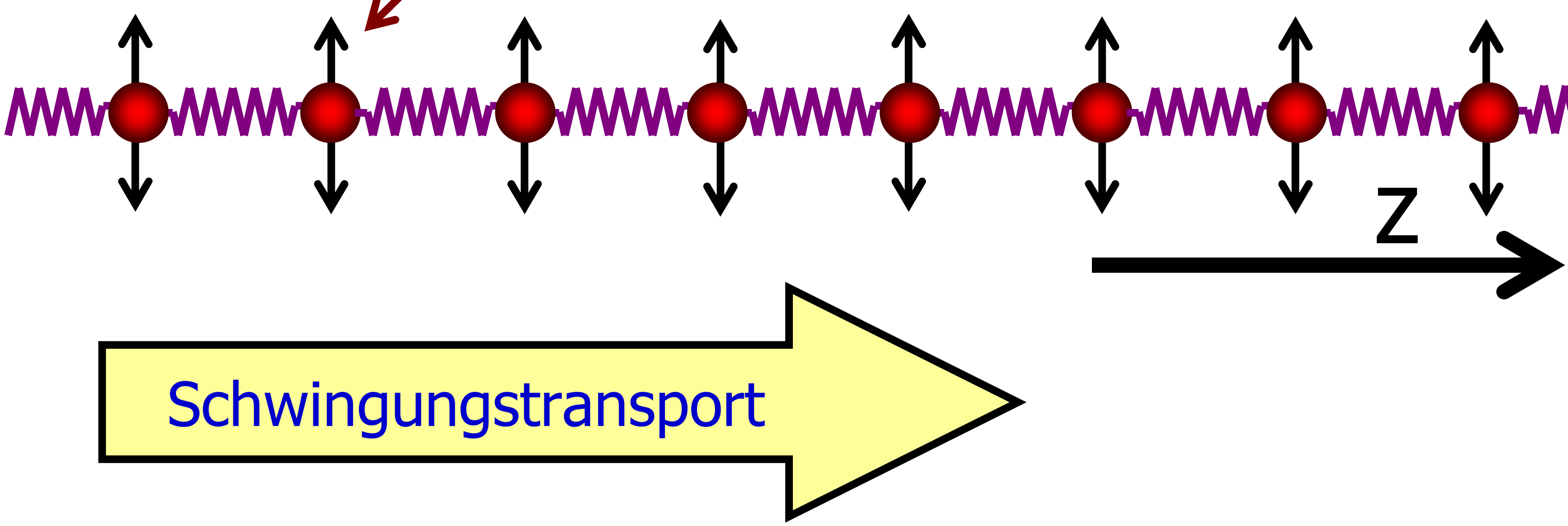


9.7. Wellenausbreitung

a) Ebene Wellen

Beispiel: Kette gekoppelter Schwinger

transversale Auslenkung: $\xi(z,t)$



9.7. Wellentypen

i) Harmonische ebene Welle

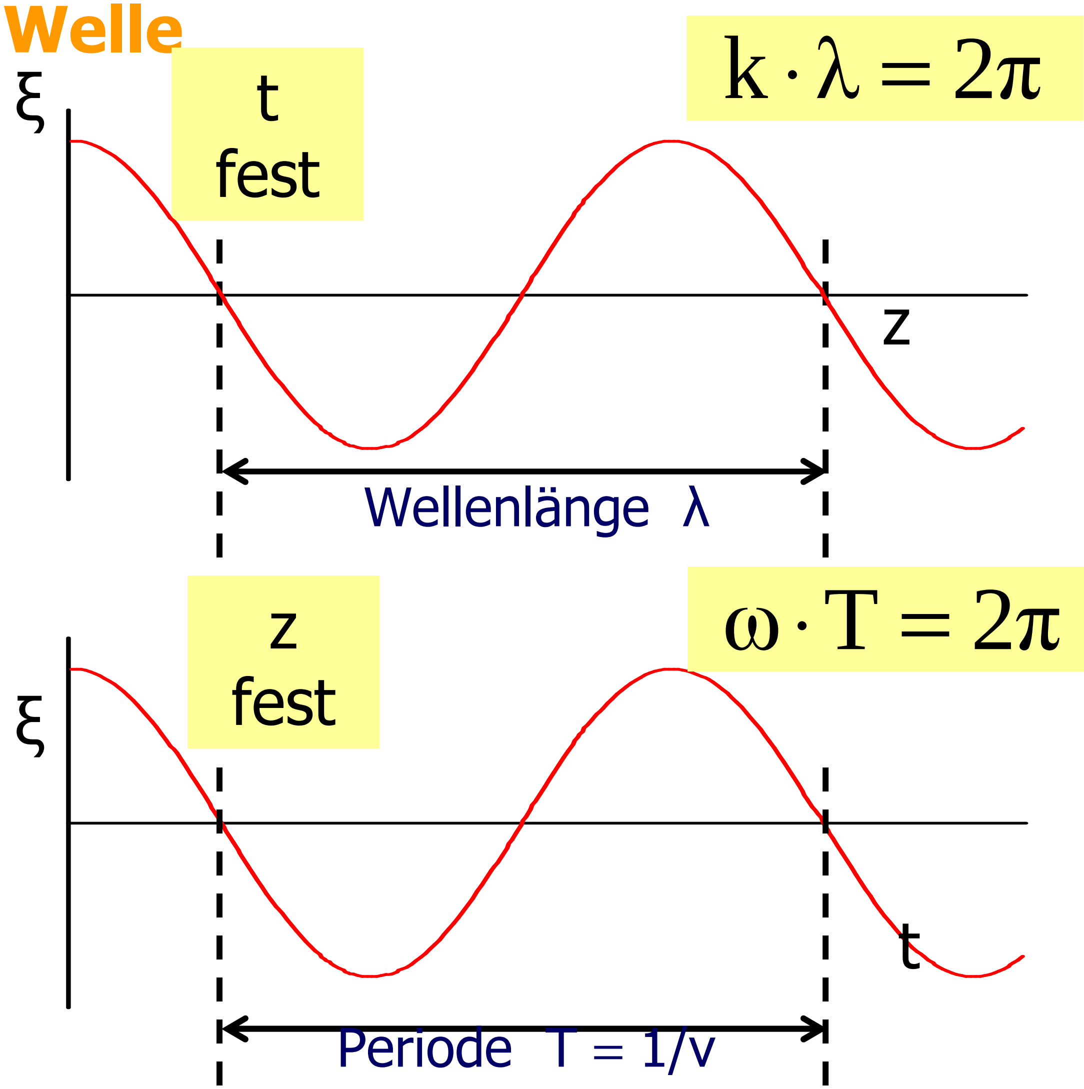
$$\xi = A\cos(\omega t - kz) = A\cos\left[k\left(z - \frac{\omega}{k} t\right)\right]$$

$$\frac{\omega}{k} = v$$

ω	$\rightarrow$	Kreisfrequenz
$\nu = \frac{\omega}{2\pi}$	$\rightarrow$	Frequenz
$T = \nu^{-1}$	$\rightarrow$	Periode
λ	$\rightarrow$	Wellenlänge
$k = \frac{2\pi}{\lambda}$	$\rightarrow$	Wellenzahl

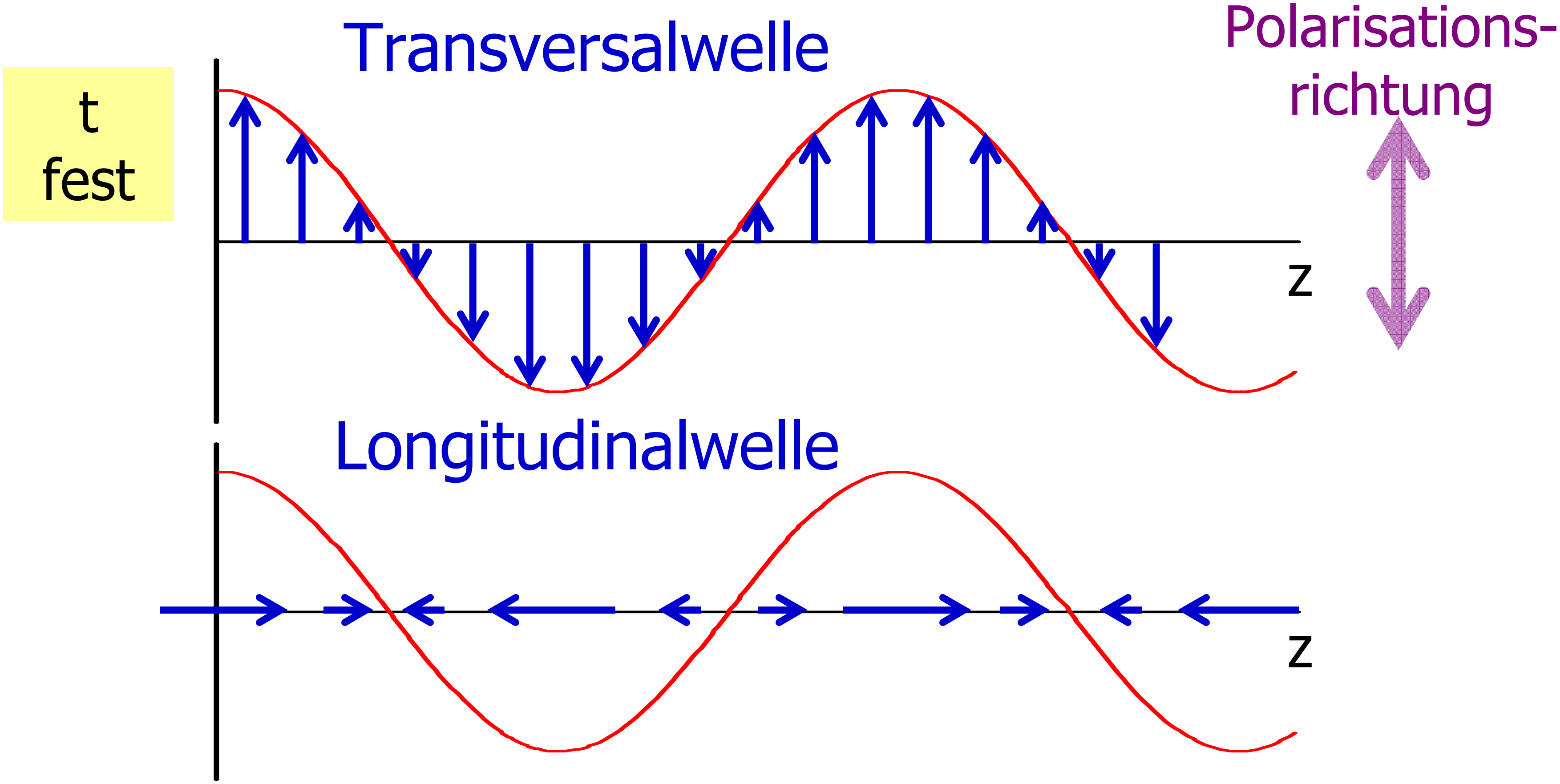
Dispersionsrelation

$$\omega = v \cdot k$$



9.7. Wellentypen

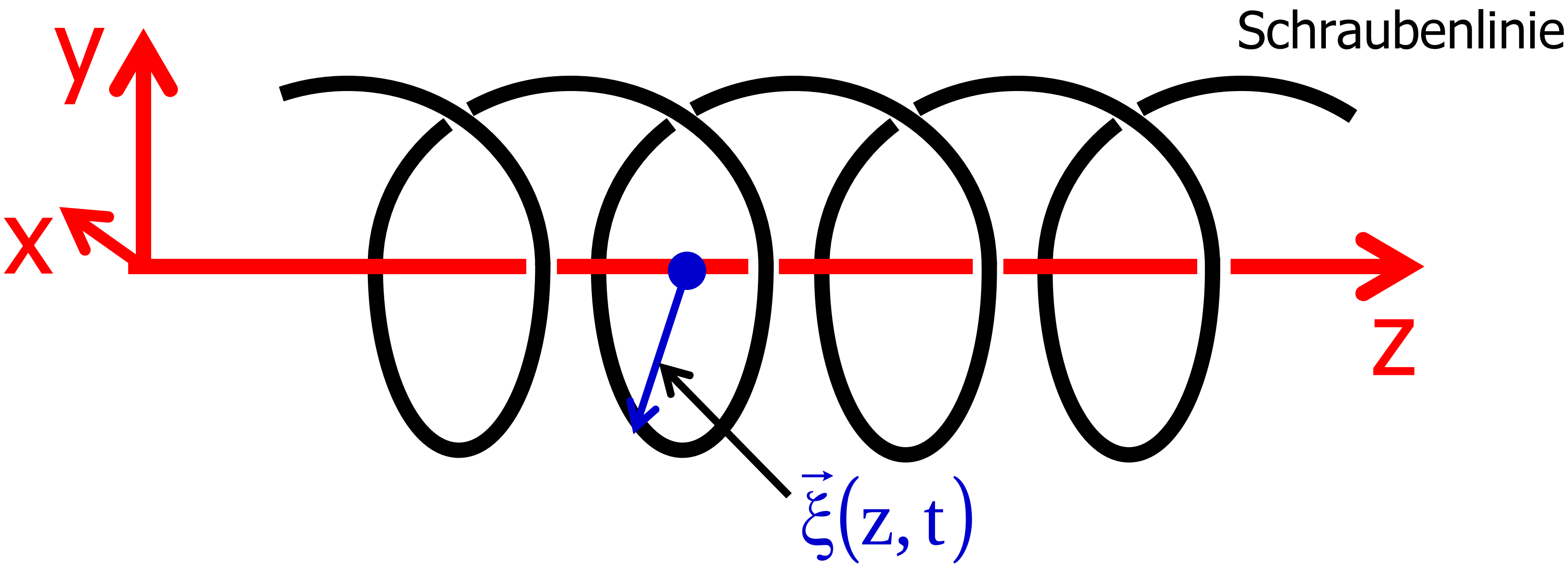
ii) longitudinale / transversale mechanische Wellen



iii) ξ = elektrische Feldstärke (Licht, Funksignale, …)

9.7. Wellentypen

iv) zirkular / elliptisch polarisierte Welle



komplexe Schreibweise (physikalische Anteil $\rightarrow$ Realteil):

$$\vec{\xi}(z,t) = \left(A \cdot \vec{e}_x + B \cdot \vec{e}_y \cdot e^{i\Delta\varphi}\right) \cdot e^{i(\omega t - kz)}$$

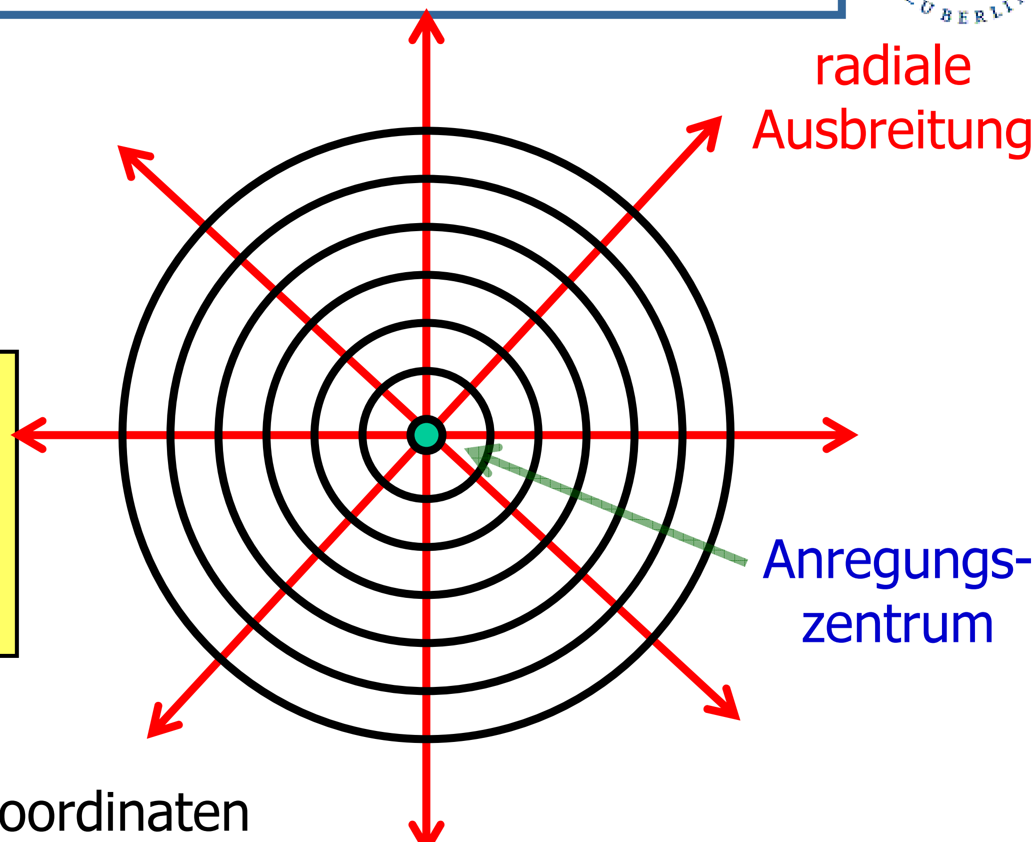
Zirkulare Polarisation:

$$A = B, \ \ \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

9.7. Wellentypen

b) Kugelwellen

Kugelsymmetrie $\rightarrow$
verwende Kugelkoordinaten $\Rightarrow$
symmetrischer Lösungstyp



3-dim Kugelwelle

$$\xi(r,t) = \begin{cases} \frac{A}{r}\sin(\omega t - kr) & \text{aus} \\ \frac{A}{r}\sin(\omega t + kr) & \text{ein} \end{cases}$$

<u>Analog:</u> 2-dim Kreiswellen in Polarkoordinaten

$$\xi(r,t) = \sin(\omega t + \varphi)\left(A\, J_0(kr) + B\, Y_0(kr)\right)$$
$$\xrightarrow{r \to \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \sin(\omega t + \varphi)\left(A \sin\left(kr - \tfrac{\pi}{4}\right) + B \cos\left(kr - \tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$

J_0, Y_0 = Besselfunktionen