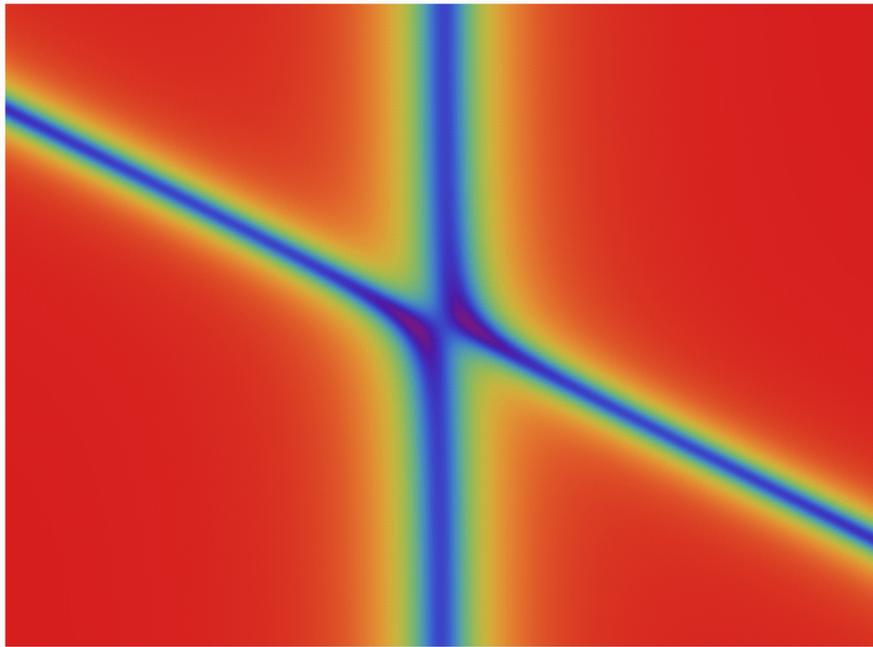


# Kopplung zweier optischer Mikroresonatoren ultrahoher Güte über eine makroskopische Distanz

Diplomarbeit von Andreas Johannes Vogler



vorgelegt bei

Prof. Dr. Arno Rauschenbeutel

Institut für Physik der  
Johannes Gutenberg-Universität Mainz

16. März 2009



1. Gutachter: Prof. Dr. Arno Rauschenbeutel
2. Gutachter: Prof. Dr. Jochen Walz



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Ultradünne Glasfasern</b>	<b>3</b>
1.1	Eigenschaften ultradünner Glasfasern . . . . .	4
1.1.1	Lichtpropagation in einer Glasfaser . . . . .	4
1.1.2	Herstellung ultradünner Glasfasern . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Optische Mikroresonatoren</b>	<b>11</b>
2.1	Allgemeine Eigenschaften optischer Resonatoren . . . . .	11
2.1.1	Das Verhältnis aus Güte und Modenvolumen . . . . .	11
2.1.2	Resonatortypen im Überblick . . . . .	12
2.2	Der Fabry-Pérot-Resonator . . . . .	14
2.2.1	Der Fabry-Pérot-Resonator als Frequenzmaßstab . . . . .	15
2.3	Flüstergaleriemodenresonatoren . . . . .	16
2.4	Flaschenresonatoren . . . . .	18
2.4.1	Herstellung von Flaschenresonatoren . . . . .	20
2.4.2	Abstimmung von Flaschenresonatoren . . . . .	22
2.5	Kopplung der Flaschenresonatoren an ultradünne Fasern . . . . .	23
2.5.1	Anregung der Flaschenmoden . . . . .	23
2.5.2	Der Koppelaufbau . . . . .	29
2.5.3	Optische Komponenten . . . . .	31
2.5.4	Datenverarbeitung . . . . .	34
2.5.5	Bestimmung der Güte einer Flüstergaleriemode . . . . .	34
2.5.6	Experimentelle Charakterisierung der Kopplung . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Kopplung von Resonatormoden</b>	<b>41</b>
3.1	Modenkopplung im einzelnen Flüstergalerieresonator . . . . .	42
3.1.1	Modenkopplung gegenläufiger Moden . . . . .	42
3.1.2	Kopplung von Moden unterschiedlicher Polarisierung . . . . .	47
3.2	Modenkopplung räumlich getrennter Flaschenresonatoren . . . . .	49
3.2.1	Transmittive Kopplung . . . . .	50
3.2.2	Numerische Modellierung der transmittiven Kopplung . . . . .	52
3.2.3	Reflektive Modenkopplung . . . . .	64
<b>A</b>	<b>Theoretische Behandlung der Flaschenresonatormoden</b>	<b>71</b>
<b>B</b>	<b>Bemerkung zur Verbesserung der Experimente</b>	<b>75</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>77</b>



# Einleitung

Seit Menschengedenken fasziniert uns die flüchtige Natur des Lichts, das uns durch seine Farben erst die Welt erschließt. Tatsächlich lässt sich Licht auch mit physikalischen Mitteln nicht „festhalten“, wohl aber mit Hilfe optischer Resonatoren in kleinen Volumina für begrenzte Zeit speichern.

Ein solcher Resonator ist durch zwei Schlüsselgrößen charakterisiert [1]: Seine Güte ist ein Maß für die Speicherzeit von Licht, und das Modenvolumen bemisst den räumlichen Einschluss. Mikroresonatoren haben ein sehr kleines Modenvolumen in Kombination mit hoher Güte. Das macht sie zu idealen Werkzeugen, um Materie mit Licht wechselwirken zu lassen. Diese Kopplung ist umso stärker, je kleiner das Modenvolumen ist. Das Verhältnis von Güte zu Volumen bestimmt das Verhältnis der Kopplung zu den intrinsischen dissipativen Effekten von Materie und Resonator. Überwiegt die Kopplung die dissipativen Effekte, so spricht man von der *starken Kopplung*. Nur in diesem Bereich ist ein kohärenter Energieaustausch möglich.

Durch ihr breites Anwendungsspektrum haben Mikroresonatoren in den letzten Jahren eine große Bedeutung erlangt [2]. Sie finden Verwendung in der optischen Kommunikationstechnologie als schmalbandige optische Filter [3] oder Schalter [4], als Mikrolaser [5] sowie in der nichtlinearen Optik [6, 7] und in der Biosensorik [8, 9] um nur einige Beispiele zu nennen.

Das Thema dieser Arbeit zielt langfristig auf die Anwendung von Mikroresonatoren im Bereich Resonator-Quantenelektrodynamik (engl. *cavity-QED*, kurz *CQED*) ab. Sie beschreibt im Allgemeinen Systeme in denen Atome mit räumlich begrenzten elektromagnetischen Feldern wechselwirken. Eine Anwendung der CQED befasst sich mit der Quanteninformationsverarbeitung. Das Ziel dieses Forschungsgebiets ist unter anderem, Quantennetzwerke zu verwirklichen. In ihnen kann quantenmechanische Information über Quantenkanäle übertragen und innerhalb von Quantenknoten gespeichert werden [10]. Als Quantenkanäle können optische Wellenleiter dienen, wie zum Beispiel Glasfasern. Quantenknoten bestehen beispielsweise aus einem Resonator, dessen Lichtfeld mit einem einzelnen Atom [11] oder ein Quantenpunkt [12] stark gekoppelt ist. Quanteninformation wird dabei in zwei quantenmechanischen Zuständen (*Qubit*) des Atoms oder des Quantenpunkts gespeichert. Diese Information kann gezielt ausgelesen und in einen anderen Knoten des Netzwerks übertragen werden. Dabei wird die im Atom gespeicherte Quanteninformation durch einen Laserpuls z.B. auf die zwei orthogonalen Polarisationszustände eines Photons des Resonators übertragen. Dieses muss den Resonator verlassen und durch den Quantenkanal in einen anderen Knoten des Netzwerks gelangen.

Die Ein- und Auskopplung des Lichts der Resonatoren ist dabei jedoch problematisch. Heute werden für CQED-Experimente Fabry-Pérot-Mikroresonatoren benutzt [13], da sie durch ihren Aufbau das Einbringen von Atomen in das Resonatorvolumen erleichtern. Sie bestehen aus zwei sehr dicht zueinander platzierten Spiegeln mit sehr hoher Reflektivität,

---

um eine hohe Güte und geringes Modenvolumen zu erreichen [14]. Um Licht in einen solchen Resonator ein- oder auszukoppeln, muss es durch einen der Spiegel transmittiert werden. Die Spiegel lassen sich heute jedoch nur so herstellen, dass ihre Transmission in der gleichen Größenordnung liegt, wie ihre Verluste durch Absorption und Streuung. Die Effizienz der Ein- und Auskopplung des Lichts ist deshalb auf wenige zehn Prozent limitiert [15]. Zudem kann man sie nicht direkt über eine Glasfaser ankoppeln, was einen integrierten optischen Aufbau unmöglich macht.

In dieser Arbeit wird ein alternativer Ansatz verfolgt. Es werden sogenannte *Flaschenresonatoren* verwendet. Dieser Resonatortyp zählt zu den monolithischen Flüstergaleriemodenresonatoren (*WGM-Resonatoren*). Sie besitzen eine rotationssymmetrische Form und speichern das Licht nahe der Oberfläche durch kontinuierliche Totalreflexion. Bedingt durch den Wellencharakter des Lichts, ragt ein gewisser Teil der Feldintensität aus dem Resonator heraus, es wird als *evaneszentes Feld* bezeichnet.

In dieser Eigenheit liegt der wesentliche Vorteil des WGM-Resonators gegenüber anderen Typen begründet. Das evaneszente Feld ermöglicht die nahezu verlustfreie Ein- und Auskopplung von Licht in diesen Resonator direkt mittels einer ultradünnen Glasfaser. Diese hat einen Durchmesser von der Größenordnung des in ihr geführten Lichts. Das führt dazu, dass sie von einem evaneszenten Feld umgeben ist.

Allerdings besitzen typische Flüstergalerie-Mikroresonatoren, wie Mikrotori und Mikrokugeln gerade wegen ihres kleinen Modenvolumens auch nachteilige Eigenschaften. Sie haben sehr große freie Spektralbereiche und sind durch ihre monolithische Bauart nur begrenzt abstimbar. Das schränkt ihre Einsatzmöglichkeiten stark ein, denn insbesondere bei Anwendungen der CQED muss ihre Resonanzfrequenz mit einer festgelegten Frequenz, zum Beispiel der eines atomaren Übergangs, übereinstimmen.

Der in dieser Arbeit verwendeten WGM-Resonatortyp (*Flaschenresonator*) umgeht diese Einschränkung. Durch seine prolate Form hat er eine reichere Modenstruktur als andere Flüstergaleriemodenresonatoren. Sein freier Spektralbereich lässt sich bei der Herstellung nahezu beliebig wählen. Diese Eigenschaft in Verbindung mit mechanischer Durchstimmbarkeit macht es möglich, ihn auf jede beliebige Frequenz abzustimmen.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob sich ein gekoppeltes System von zwei Flaschenresonatoren verwirklichen lässt, in dem der Energieaustausch zwischen zwei Resonatormoden die dissipativen Verluste überwiegt. Zu diesem Zweck wird Spektroskopie an verschiedenen Systemen gekoppelter Flaschenresonatormoden durchgeführt. Hierbei liegt die Signatur dieser starken Kopplung in einer typischen spektralen Charakteristik.

Kapitel 1 befasst sich mit den Eigenschaften von Glasfasern und der Lichtpropagation von elektromagnetischen Wellen in diesen. Kapitel 2 behandelt optische Resonatoren sowie gesondert den Flaschenresonator und die Einkopplung von Licht in Flüstergaleriemodenresonatoren. Es diskutiert den experimentellen Aufbau zur Messung der Koppeleffizienz, anschließend wird auf die Messung dergleichen eingegangen und die experimentellen Resultate präsentiert. In Kapitel 3 wird die Kopplung von Flaschenresonatormoden untereinander untersucht. Dieses Kapitel diskutiert zuerst die Modenkopplung innerhalb eines Resonators und anschließend die Modenkopplung in räumlich getrennten Flaschenresonatoren. In Anhang A findet sich eine theoretische Beschreibung der Flaschenmoden.

# 1 Ultradünne Glasfasern

Eine Glasfaser besteht aus einem Kern (engl. *core*) und einem umgebenden Mantel (engl. *cladding*) mit einem geringen Brechungsindexunterschied von  $\Delta n < 1\%$  [16]. Es handelt sich um eine Stufenindexfaser, wenn der Brechungsindex zwischen Kern und Mantel sprunghaft abnimmt (vgl. Abbildung (1.1)). Das in der Faser geführte Licht erfährt bei jedem Kontakt mit dieser Grenzfläche eine Totalreflexion. Dazu muss es unter einem flachen Winkel zur Faserachse auf die Grenzfläche treffen. Bei Totalreflexion dringt das Licht, abhängig von  $\Delta n$ , geringfügig in den Mantel ein. Dieses *evaneszente Feld* ist im Inneren der Faser vor äußeren Einflüssen geschützt. Typische Eindringtiefen liegen im Bereich der Wellenlänge des geführten Lichts und sind damit viel kleiner als die Dicke des Mantels. Will man das evaneszente Feld für experimentelle Zwecke nutzen, so muss der Mantel zum Beispiel durch Ätzverfahren entfernt werden [17]. Das Licht wird dann, ähnlich einer Stufenfaser, durch den Brechungsindexunterschied zwischen Kern und umgebendem Medium geführt.

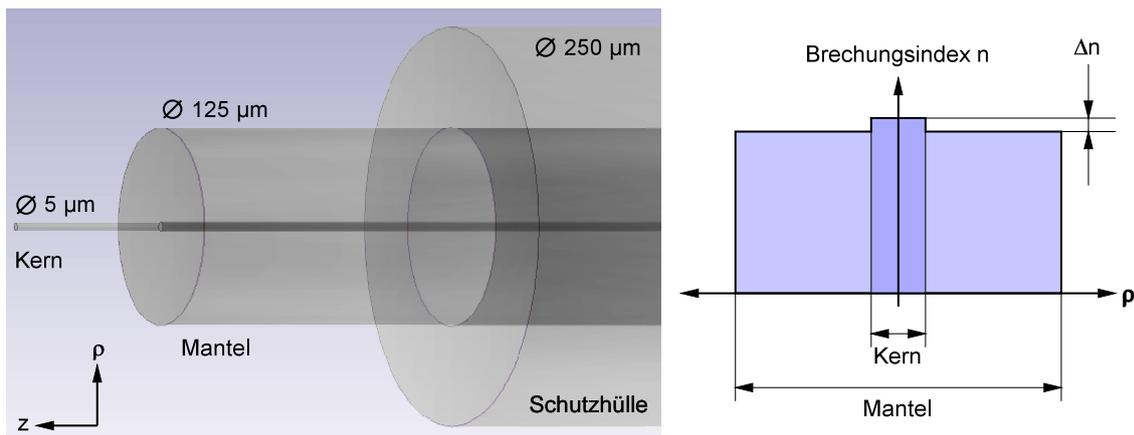


Abbildung 1.1: Links: Aufbau einer Stufenindexfaser. Die Schutzhülle (engl. *Buffer*) aus Polycarbonat dient allein der mechanischen Stabilität. Die Abmessungen beziehen sich auf eine Monomoden-Faser für eine Wellenlänge von 830 nm. Rechts: Verlauf des Brechungsindex  $n$  einer Stufenindexfaser.

Ein alternativer Ansatz eine Faser mit evaneszenten Feld zu erhalten, ist die Verjüngung optischer Standardfasern. Um dies zu erreichen, werden Glasfasern durch lokales Heizen und gleichzeitiges Ziehen verjüngt, bis der Durchmesser der Glasfaser etwa der Ausdehnung der Wellenlänge des geführten Lichts entspricht. Das Größenverhältnis zwischen Mantel und Kern bleibt dabei erhalten. Der ursprüngliche Glasfaserkern ist durch das Ziehen jedoch so klein, dass er für die Lichtleitung eine vernachlässigbare Ausdehnung hat. Das Licht wird durch den Sprung des Brechungsindex zwischen der verjüngten Faser (*Taille*) und der umgebenden Luft geführt.

Die so hergestellten ultradünnen Fasern bieten im Gegensatz zu entmantelten Fasern einige Vorteile. Sie können gezielt so produziert werden, dass sie über ein starkes evaneszentes Feld bei gleichzeitig sehr hoher Transmission verfügen [17]. Anders als bei den Ätzverfahren kann hierbei das Faserprofil und insbesondere der Übergang zwischen Taille und dem unbearbeiteten Teil präzise eingestellt werden.

Die Intensität des evaneszenten Felds der ultradünnen Faser kann schon bei geringen Lichtleistungen sehr hohe Werte annehmen. Eine solche Eigenschaft ist zum Beispiel für spektroskopische Zwecke wichtig. Werden Farbstoffmoleküle auf eine ultradünne Faser aufgedampft, lässt sich damit Absorptionsspektroskopie betreiben. Die Moleküle absorbieren Licht bei charakteristischen Anregungsfrequenzen aus der Faser, da sie sich im evaneszenten Feld befinden. Die Streueffizienz skaliert mit der Intensität des evaneszenten Felds auf der Oberfläche der Faser. Dadurch verbessert sich das Signal im Gegensatz zu anderen faserbasierten spektroskopischen Methoden beträchtlich.

Monolithische Mikroresonatoren lassen sich durch das evaneszente Feld an eine ultradünne Faser koppeln. Wobei die Intensität des evaneszenten Felds dabei nur eine untergeordnete Rolle spielt. Damit eine Kopplung an den Resonator überhaupt möglich wird, müssen die Propagationskonstanten der Fasermode und der im Resonator umlaufenden Mode übereinstimmen. Damit ist die wichtigste Eigenschaft ultradünner Fasern für diesen Anwendungszweck, dass die Taillendicke die Propagationskonstante einer geführten Mode bestimmt.

## 1.1 Eigenschaften ultradünner Glasfasern

Die Lichtleitung durch ultradünne optische Fasern kann unter bestimmten Bedingungen, im Gegensatz zu entmantelten Fasern, sehr verlustarm sein. Vorwiegend wirken sich zwei Mechanismen negativ auf die Transmission aus. An den Übergängen treten Verluste auf, die später genau behandelt werden. Verschmutzungen der Fasertaille führen zu einer zusätzlichen Verminderung der Transmission, neben den absorptiven Verlusten des Fasermaterials und des umgebenden Mediums. Durch die hohe Intensität an der Faseroberfläche streuen anhaftende Partikel, wie zum Beispiel Staub, einen entsprechenden Teil des geführten Lichts.

### 1.1.1 Lichtpropagation in einer Glasfaser

Als Ausgangspunkt dienen die Maxwell-Gleichungen [18]. Die Elektrodynamik beschreibt das zeitabhängige Zusammenspiel zwischen elektrischem Feld  $\vec{E}(\vec{r})$  und magnetischer Flussdichte  $\vec{B}(\vec{r})$ . Die Quellen dieser Felder sind Ladungen und Ströme. Diese wiederum berechnen sich durch Integration aus ihrer differentiellen Form, der Ladungsdichte  $\rho(\vec{r})$  und der Stromdichte  $\vec{j}(\vec{r})$ . Die Maxwell-Gleichungen im Vakuum lauten:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = -\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0}, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.1)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}(\vec{r}) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.2)$$

Handelt es sich wie bei Glas um ein Dielektrikum in Abwesenheit von Ladungen ( $\rho(\vec{r}) = 0$ ) und Strömen ( $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{0}$ ), so vereinfachen sich die Maxwell-Gleichungen. Im Dielektrikum muss noch beachtet werden, dass Magnetisierung und Polarisation auftreten. Diese Effekte beeinflussen die zueinander orthogonalen Felder  $\vec{E}$  und  $\vec{B}$  so, dass sich im Medium die effektiven Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  bilden. Das Magnetfeld  $\vec{H}$  steht mit der magnetischen Flussdichte über  $\vec{B} = \mu\vec{H}$  in Verbindung. Wobei die magnetische Permeabilität  $\mu = \mu_r \cdot \mu_0$  sich aus der magnetischen Feldkonstante  $\mu_0$  und der (relativen) Permeabilität  $\mu_r$  zusammensetzt. Analog verhält sich die Dielektrizitätskonstante  $\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r$ , die die dielektrische Verschiebung und das elektrische Feld über  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  miteinander in Verbindung setzt. Sie besteht aus relativer Dielektrizitätszahl  $\epsilon_r$  und der elektrischen Feldkonstante  $\epsilon_0$ .

In der Regel haben  $\mu$  und  $\epsilon$  Tensorcharakter. In einem isotropen homogenen Medium, in dem sich monochromatisches Licht ausbreitet, sind beide Feldkonstanten Skalare. Diese Näherung ist bei Glasfasern hinreichend erfüllt. Unter mechanische Spannung gesetzt reagiert das Glas jedoch mit einer Doppelbrechung, bei der diese Vereinfachung nicht mehr gilt. Sie induziert eine Symmetriebrechung, da  $\mu_r$  und  $\epsilon_r$  von der Richtung der wirkenden Spannung abhängig sind. Man nutzt diesen Effekt zur gezielten Beeinflussung der Lichtpolarisation in optischen Fasern [19, 20].

Anstatt der effektiven Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{H}$  wird in der Literatur mit den Feldern  $\vec{E}$  und  $\vec{H}$  gerechnet. In ihnen sind die Eigenschaften des Mediums verrechnet, was als *Fundamentalbeziehung* [1] bekannt ist. Alternativ sind auch die Felder  $\vec{D}$  und  $\vec{B}$  als Rechengrößen üblich, werden aber seltener verwendet.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (1.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad \vec{\nabla} \times \vec{H} = \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (1.4)$$

Monochromatische elektromagnetische Wellen der allgemeinen Form  $\Psi(t) \propto e^{-i\omega t}$  mit  $\Psi = (\vec{E}, \vec{H})$  haben die Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$ , die Kreisfrequenz

$$\omega = \frac{k \cdot c_0}{n}, \quad (1.5)$$

und propagieren in einem Dielektrikum mit Brechungsindex  $n$ . Die Variable  $c_0$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Der Betrag des Wellenzahlvektors  $\vec{k}$  ist durch

$$k = \frac{2\pi n}{\lambda_0} \quad (1.6)$$

definiert. Bei Ausbreitung im Vakuum ( $n = 1$ ) wird er als  $k_0$  bezeichnet. Da es sich bei Licht um eine elektromagnetische Welle handelt, erfüllt es die Helmholtzgleichung [1]:

$$(\Delta\Psi + k^2) = 0. \quad (1.7)$$

Formel (1.7) ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung. Zur einfacheren Lösung bietet es sich an, den Nablaoperator der Zylindersymmetrie einer Glasfaser anzupassen:

$$\vec{\nabla} = \left( \partial_\rho \hat{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \partial_\phi \hat{e}_\phi + \partial_z \hat{e}_z \right). \quad (1.8)$$

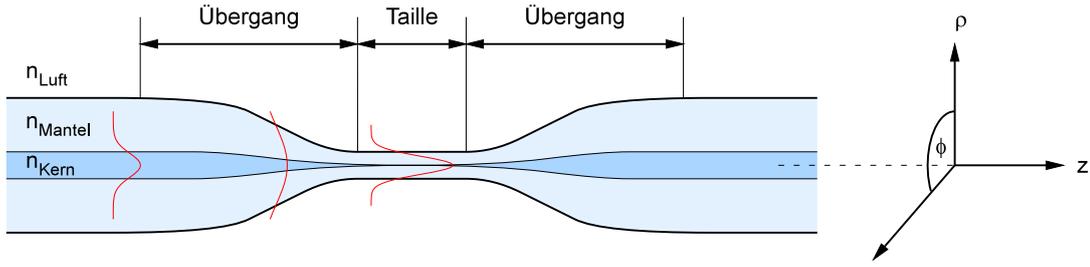


Abbildung 1.2: Schematische Darstellung eines Schnitts durch eine Glasfaser mit ultradünner Fasertaille und den Übergängen (nicht maßstabsgetreu). Die gaußförmige Feldverteilung der Grundmode ist angedeutet (rot). Ihr evaneszentes Feld ragt im unbearbeiteten Bereich in den Mantel und im Bereich der Taille in das umgebende Medium hinein.

Die partiellen Ableitungen sind mit der Kurzschreibweise  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial_i}$  mit  $i = \phi, \rho, z$  abgekürzt, wobei  $\hat{e}_\phi, \hat{e}_\rho, \hat{e}_z$  die jeweiligen Einheitsvektoren darstellen. In die Helmholtzgleichung (1.7) eingesetzt resultiert die folgende Form:

$$\left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + \frac{1}{\rho^2} \partial_\phi^2 + \partial_z^2 + k^2 \right) \Psi = 0. \quad (1.9)$$

Gleichung (1.9) wird mit einem passenden Ansatz für eine sich entlang der Faserachse  $\hat{e}_z$  ausbreitenden Mode gelöst [21]:

$$\Psi = \psi_\rho(\vec{r}) \cdot e^{i(\omega t - \beta z \pm l\phi)}. \quad (1.10)$$

Die Mode  $\Psi$  propagiert mit der Propagationskonstante  $\beta$  und einem quantisierten Drehimpuls  $l \in \mathbb{N}$ , sowie einem Radialanteil  $\psi_\rho$ . In Zylinderkoordinaten eingesetzt ergibt sich die Bessel-Differentialgleichung:

$$\left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho - \frac{l^2}{\rho^2} + k^2 - \beta^2 \right) \Psi = 0. \quad (1.11)$$

Ultradünne Fasern sind Stufenindexfasern mit einem Brechungsindexsprung, es bedarf also der Unterscheidung zwischen Mantel und Kern. Der dünnggezogene Mantel übernimmt bei ihnen die Rolle des Kerns ( $n_1 = n_{\text{Mantel}}$ ) und die umgebende Luft fungiert als Mantel ( $n_2 = n_{\text{Luft}} \approx 1$ ). Innerhalb der Fasertaille gilt  $h^2 = k^2 - \beta^2 > 0$ . Man findet als Lösung:

$$\Psi \propto J_l(h\rho) e^{i(\omega t + l\phi - \beta z)}. \quad (1.12)$$

$J_l$  ist die Besselfunktion erster Art von Ordnung  $l$ . Im Außenbereich der Faser (umgebende Luft) gilt  $q^2 = k^2 - \beta^2 < 0$  und die Lösung lautet:

$$\Psi \propto K_l(q\rho) e^{i(\omega t + l\phi - \beta z)}. \quad (1.13)$$

Hier ist  $K_l$  die modifizierte Besselfunktion zweiter Art von Ordnung  $l$ .

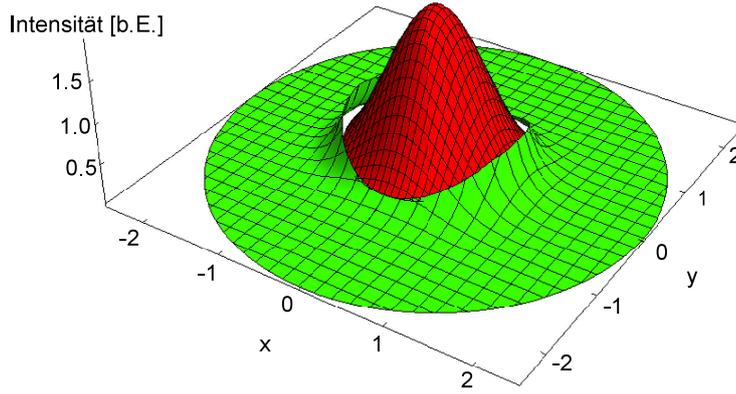


Abbildung 1.3: Gezeigt ist die Intensitätsverteilung einer linear polarisierten  $HE_{11}$ -Mode, die sich in einer Fasertaille ausbreitet. Die Intensität in der Faser (rot) und das evaneszente Feld (grün) gehen wegen unterschiedlicher Brechungsindizes ( $n_{\text{Kern}}$ ,  $n_{\text{Luft}}$ ) unstetig ineinander über. Die Ortskoordinaten ( $x$ ,  $y$ ) sind auf den Tailldurchmesser normiert.

Das Licht, das sich in einer Faser ausbreitet, erfährt nicht nur den Brechungsindex des Kerns. Es hält sich räumlich nicht ausschließlich im Kern auf, sondern erfährt auch anteilig den Brechungsindex des umgebenden Mantels, wie in Abbildung (1.2) angedeutet. Deshalb ist die Propagationskonstante  $\beta$  nicht dem Betrag des Wellenzahlvektors  $k$  äquivalent. Das gilt insbesondere für ultradünne Fasern, da der Brechungsindexkontrast bei ihnen im Gegensatz zu herkömmlichen Telekommunikationsglasfasern sehr groß ist. Der effektive Brechungsindex kann stark vom Brechungsindex des Materials der Fasertaille abweichen und ist definiert durch:

$$n_{\text{eff}} = \frac{\beta}{k_0}. \quad (1.14)$$

Sein Wert liegt im Falle ultradünner Fasern zwischen den Brechungsindizes von Mantel und umgebender Luft.

Aus der Forderung, dass die tangentialen Feldkomponenten  $E_\phi$ ,  $E_z$ ,  $H_\phi$  und  $E_z$  jeweils stetig differenzierbar am Übergang von  $n_1 \rightarrow n_2$  sein müssen, lässt sich eine transzendente Gleichung für  $\beta$  aufstellen [15]:

$$\left( \frac{J'_l(hr)}{hrJ_l(hr)} + \frac{K'_l(qr)}{qaK_l(qr)} \right) \left( \frac{n_1^2 J'_l(hr)}{hrJ_l(hr)} + \frac{n_2^2 K'_l(qr)}{qrK_l(qr)} \right) = l^2 \left[ \left( \frac{1}{qr} \right)^2 + \left( \frac{1}{hr} \right)^2 \right]^2 \left( \frac{\beta}{k_0} \right)^2. \quad (1.15)$$

Jede Mode hat eine Propagationskonstante  $\beta$ , die der Gleichung (1.15) genügt. Die möglichen Lösungen können graphisch bestimmt werden [21]. Zu jedem  $l$  finden sich die Eigenwerte  $\beta_m$ , wobei  $m = 1, 2, 3, \dots$  die Anzahl der radialen Intensitätsmaxima angibt. Die Gleichung (1.15) enthält zwei mögliche Lösungsklassen: Die  $HE_{lm}$ - und die  $EH_{lm}$ -Moden. Der Buchstabe  $H$  steht hier für *Hybrid*. Diese Moden enthalten jeweils zu den Feldkomponenten in  $E_\rho$ - und  $E_\phi$ -Richtung eine Feldkomponente in  $E_z$ -Richtung. Die  $HE$ -Moden besitzen stets ein zentrales Maximum. Die Mode  $HE_{11}$  ist die Grundmode. Die

Intensitätsverteilung einer linear polarisierten  $\text{HE}_{11}$ -Mode ist in Abbildung (1.3) dargestellt. In zylindersymmetrischen Wellenleitern existiert, unabhängig von Durchmesser und Brechungsindexkontrast, immer mindestens eine Lösung, die Grundmode mit einem Drehimpuls von  $l = 1$ . Die Anregung von Moden mit höheren Drehimpulsquantenzahlen  $l > 1$  unterliegt einer Abschneidebedingung. Sie können nur unter bestimmten Voraussetzungen, abhängig von Brechungsindexkontrast und Faserdurchmesser, geführt werden [21]. Ultradünne Glasfasern werden meist so hergestellt, dass sie nur die Grundmode führen. Für alle Glasfasern mit dieser Eigenschaft ist die Bezeichnung *monomoden*-Faser üblich. Gleichung (1.15) ist für den allgemeinen Fall unterschiedlicher Brechungsindizes  $n_1$  und  $n_2$  gültig. Er gilt insbesondere für die ultradünne Glasfasertaille mit einem großen Brechungsindexkontrast. Die Moden in einer solchen Faser werden *stark geführt*.

### Grenzfall schwacher Führung

Der Grenzfall der *schwachen Führung* tritt auf, wenn  $\Delta n$  klein wird, also  $n_1/n_2 \approx 1$  gilt. Gleichung (1.15) wird dann linear. Als Lösung existieren nun linear polarisierte Moden, die näherungsweise keine Feldkomponente in Ausbreitungsrichtung  $\hat{e}_z$  haben. Sie heißen LP-Moden, für *linear polarized*. Diese Moden sind eine Linearkombination aus  $\text{HE}_{lm}$  und  $\text{EH}_{lm}$ . Kommerziell erhältliche Standardfasern sind in der Regel schwach führende Fasern.

### Der Übergang zur ultradünnen Faser

Der Modentyp und die Modenzahl ist aufgrund des Brechungsindexkontrastes  $\Delta n$  in Fasertaille und ungezogenener Glasfaser unterschiedlich. Durch geschickte Wahl der Faserabmessungen und  $\Delta n$  in beiden Bereichen ist es möglich, dass sämtliche höhere Moden unterdrückt sind. Eine herkömmliche monomoden-Glasfaser für die Telekommunikation kann so dünn gezogen werden, dass die Taille ebenfalls nur die Grundmode führt. Die Übergänge haben nun die Aufgabe das Licht möglichst effizient von der schwach geführten Fasermode in eine stark geführte Mode in der Fasertaille zu konvertieren. Das passiert im Idealfall adiabatisch, also mit nur sehr geringen Änderungen pro Längeneinheit der Faser. Der Idealfall der Adiabasie kann im realen Übergang nicht perfekt erfüllt werden, da der Übergang sonst unendlich lang sein müsste. Die Mode löst sich in den Übergängen vom Kern, dadurch verändert sie sich stark, was zu Problemen bei der Adiabasie führt [22]. Diese Problematik tritt im Bereich der Übergänge zur Fasertaille auf. Durch eine Optimierung des Dickenverlaufs der Fasertaille und deren Übergängen (*Faserprofil*) lässt sich jedoch eine relativ hohe Transmission erreichen. Die typische Transmission einer auf 500 nm dünn gezogenen monomoden-Faser mit 3 mm Tailenlänge liegt bei etwa 97 %. Dieser Wert gilt bei nahinfrarotem Laserlicht ( $\lambda = 852$  nm) direkt nach der Herstellung der Fasertaille.

#### 1.1.2 Herstellung ultradünner Glasfasern

Ultradünne Fasern werden durch lokales Heizen und gleichzeitiges Ziehen hergestellt. Dies passiert in einer eigens dafür entwickelten Faserziehmaschine [15, 23], die in Abbildung (1.4). Ein ortsfester Brenner mit einer ein mm breiten hochreinen  $\text{H}_2\text{-O}_2$ -Flamme erhitzt die Glasfaser. Diese ist auf zwei hochpräzisen Verschiebetischen (Firma Newport, XM2000) befestigt. Der obere Verschiebetisch (*Stretcher*) dehnt die Faser an der erhitzten Stelle. Der

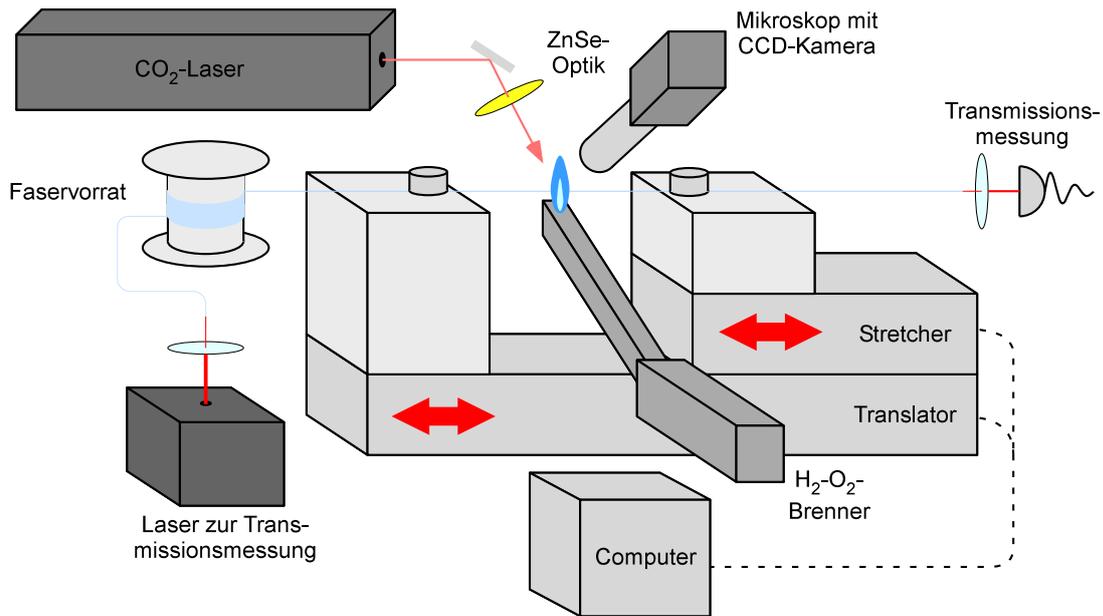


Abbildung 1.4: Skizze der Faserziehmaschine mit den wesentlichen Baugruppen: Verschiebetische, Brenner, Mikroskop, CO<sub>2</sub>-Laser zur Strukturierung von Flaschenresonatoren und Photodiode zur Transmissionsmessung.

untere Verschiebetisch (*Translator*) bewegt die Faser relativ zur Flamme. Eine Bewegung des Brenners statt der Faser ließe die Flamme flackern oder verlöschen, eine gleichmäßige Heizleistung wäre nicht gewährleistet. Durch die relative Bewegung des Translators ist die effektive Flammenbreite viel größer als ein mm, was weichere Übergänge des Faserprofils bewirkt. Mit einer für die Ziehmaschine entwickelten Software wird zu einer gewünschten Taillendicke und -länge das optimale Faserprofil berechnet, in dem die Bedingung der Adiabasis bestmöglich erfüllt ist. Dieses wird in ein Bewegungsprofil (*Trajektorie*) der Verschiebetische umgerechnet. Die Faser wird entsprechend der berechneten Trajektorie erhitzt und gezogen. Während des Prozesses wird die Transmission der Faser mit einer Photodiode gemessen und protokolliert. Aus dem Verhältnis der Photodiodenspannungen vor und nach dem Ziehen ergibt sich die Transmission der ultradünnen Faser.

Optional steht ein CO<sub>2</sub>-Laser zur Verfügung, der auf die Faser fokussiert ist. Er dient der Ausformung von Flaschenresonatoren auf der Faser, die in Abschnitt (2.4.1) diskutiert wird.



## 2 Optische Mikroresonatoren

### 2.1 Allgemeine Eigenschaften optischer Resonatoren

Es gibt eine Vielzahl optischer Resonatoren. Eine Eigenschaft ist ihnen jedoch allen gleich, nämlich der räumliche und zeitliche Einschluss von Licht. Gäbe es einen perfekten Resonator, so wäre dieser in der Lage das Licht einer diskreten Frequenz für unendlich lange Zeit in sich zu speichern. Real existierende Resonatoren besitzen jedoch immer eine Dämpfung durch Absorption, Auskopplung und Streuung. Diese lassen das Lichtfeld in ihrem Inneren exponentiell zerfallen. Ein Maß für die Speicherzeit ist der *Gütefaktor*  $Q$ , auch kurz *Güte* genannt. Er ist proportional zum Verhältnis zwischen der Speicherzeitkonstanten  $\tau$  des exponentiellen Zerfalls und der optischen Periodendauer  $T$ . Alternativ berechnet sich die Güte aus der Linienbreite  $\Delta\nu$  der spektralen Resonanzkurve. Die Güte ist dann gleich dem Verhältnis von Linienbreite zur optischen Absolutfrequenz  $\nu$ :

$$Q = \frac{2\pi}{T} \cdot \tau = \frac{\nu}{\Delta\nu}. \quad (2.1)$$

Der Resonator besitzt die sogenannte *intrinsic Güte*  $Q_0$ , wenn keine Auskopplung stattfindet. Um eine Klassifizierung vorzunehmen, ist es üblich Resonatoren mit Gütefaktoren von mehr als  $Q_0 > 10^8$  als Resonatoren *ultrahoher Güte* zu bezeichnen.

Neben der Güte als charakteristische Größe gibt das Modenvolumen  $V_{mode}$  den räumlichen Bereich an, in dem die Energie einer bestimmten Mode lokalisiert ist. Es berechnet sich aus:

$$V_{mode} = \int_{\mathbb{R}^3} n(\vec{r})^2 \frac{I(\vec{r})}{I_{max}} d^3r. \quad (2.2)$$

Die Größe  $I(\vec{r})$  bezeichnet dabei die Intensität des elektromagnetischen Feldes und  $n(\vec{r})$  den ortsabhängigen Brechungsindex. Das Modenvolumen  $V_{mode}$  ist auf die Maximalintensität  $I_{max}$  normiert. Das Modenvolumen wird meist in Einheiten von Kubikwellenlängen  $(\lambda_0/n)^3$  angegeben, hierbei ist  $\lambda_0$  die Wellenlänge des Lichts im Vakuum.

#### 2.1.1 Das Verhältnis aus Güte und Modenvolumen

Das Besondere an Mikroresonatoren ist ihr kleines Modenvolumen in Verbindung mit einer hohen Güte. Das Licht wird in einem kleinen Raumbereich über lange Zeit gespeichert. Die Folge sind hohe Intensitäten des elektromagnetischen Feldes im Resonator. Bei gegebener eingekoppelter Leistung skaliert die Feldintensität dabei mit dem Verhältnis  $Q/V$  [2].

Hohe Feldstärken im Inneren des Resonators ermöglichen zum Beispiel die Beobachtung resonatorverstärkter nichtlinearer Effekte. Eine mögliche Anwendung hierfür ist optisches Schalten [24].

Die Applikationen von Resonatoren mit einem großen  $Q/V$ -Verhältnisses sind jedoch viel weitreichender. Die gezielte Wechselwirkung des elektromagnetischen Resonatorfeldes mit Quantenobjekten eröffnet die Beobachtung einer Vielzahl neuer physikalischer Phänomene [2]. Dazu muss das Resonatorfeld zum Beispiel mit Quantenpunkten oder einzelnen Atomen interagieren. Das ist nur dann möglich, wenn das Modenvolumen auch zugänglich ist. Seine räumliche Gestalt hängt vom Aufbau des Resonators ab. Es existieren zwei Ansätze, Licht auf kleinem Raum zu speichern. Entweder ist der optische Resonator ein Hohlraum oder monolithisch aufgebaut.

Das Licht ist in monolithischen Resonatoren innerhalb eines dielektrischen Festkörpers gespeichert. Das elektromagnetische Feld in seinem Inneren hat jedoch Wellencharakter, sodass das Modenvolumen nicht durch die Grenzflächen des Festkörpers beschränkt ist. Die Feldintensität nimmt außerhalb des Resonators exponentiell ab. Das Licht ragt also aus dem Resonator heraus, wie es auch bei ultradünnen Fasern der Fall ist. Aufgrund dieser Analogie spricht man hierbei ebenfalls von einem *evaneszenten Feld*.

Ein starkes evaneszentes Feld ist nicht nur die Grundvoraussetzung für die effiziente Ein- und Auskopplung von Licht in monolithische Resonatoren, sondern es erlaubt zum Beispiel auch die Kopplung einzelner Atome an den Resonator und damit deren Detektion [2]. Resonator und Atom nehmen als gekoppeltes System einen gemeinsamen Quantenzustand an. Die Energie des Gesamtsystems geht zyklisch zwischen Resonator und Atom über. Eine solche kohärente Interaktion von Licht und Materie mit vernachlässigbar kleinen dissipativen Zerfallskanälen nennt man *starke Kopplung*. Sie bildet die Grundlage für die *Resonator-Quantenelektrodynamik* (engl. *cavity-QED*).

### 2.1.2 Resonatortypen im Überblick

Die drei wichtigsten Mikroresonatorkonzepte stellen der Fabry-Pérot-Resonator, der photonische Kristall und der Flüstergalerieresonator dar. In allen Fällen wird Licht im Resonator vielfach reflektiert, um es auf geschlossene Bahnen zu lenken. Reflexion kann zum Beispiel durch Spiegel, Totalreflexion oder photonische Bandlücken [1] erreicht werden. Nicht-monolithische Fabry-Pérot-Mikroresonatoren bestehen aus zwei dicht ( $\approx 150 \mu\text{m}$  [13]) gegenüberstehenden hochreflektierenden Spiegeln. Ihr Vorteil ist der direkte Zugang zum Lichtfeld im Resonator. Dies erleichtert cavity-QED-Experimente mit kalten Atomen. Diese können zum Beispiel mit einer optischen Dipolfalle zwischen den Spiegeln platziert werden [13].

Bei monolithischen Resonatoren muss für die Kopplung mit Atomen ein möglichst starkes evaneszentes Feld vorhanden sein, über das die Atome mit der Resonatormode koppeln können. Flüstergaleriemodenresonatoren [25] (kurz *WGM-Resonatoren*) wie Mikroscheiben, Mikrotori, Mikrokugeln und Flaschenresonatoren sind monolithischer Natur und beruhen auf dem Effekt der Totalreflexion. Die Totalreflexion (engl. *total internal reflection*, kurz *TIR*) tritt an Grenzflächen zwischen Materialien unterschiedlicher optischer Dichte auf. Trifft das Licht in einem Winkel  $\theta_i$ , der größer als der Grenzwinkel

$$\Theta_k = \sin^{-1} \left[ \frac{n_2}{n_1} \right] \quad (2.3)$$

ist, auf den Übergang vom dichteren ( $n_1$ ) zum dünneren ( $n_2$ ) Medium, kommt es zur Totalreflexion. Zum besseren Anschauung dient Abbildung (2.1) Dabei sind  $n_1$  und  $n_2$  die

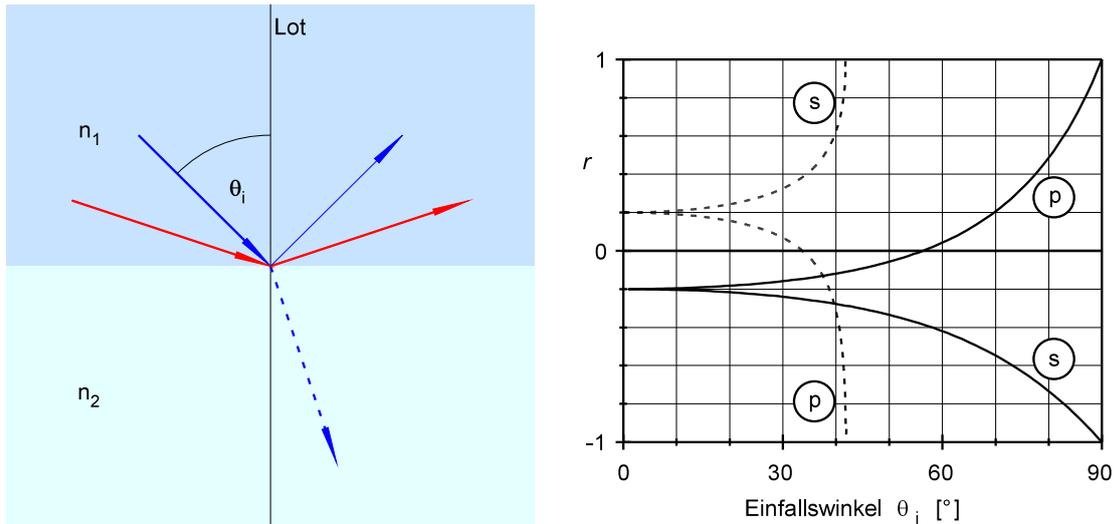


Abbildung 2.1: Links: Zwei Lichtstrahlen, die am Übergang vom dichten ( $n_1$ ) zum dünnen ( $n_2$ ) Medium Reflexion erfahren. Während ein Strahl (blau) teilweise transmittiert (gestrichelt) wird, erfährt der andere mit kleinerem Einfallswinkel (rot) Totalreflexion. Rechts: Der Amplitudenreflexionskoeffizient  $r$  für senkrechte (s) und parallele (p) Polarisation bezüglich einer Luft-Glas Grenzfläche. Für den Übergang von Glas nach Luft (gestrichelt) wird  $r$  bei etwa  $\Theta_i = 42^\circ$  gleich eins, es ist der Winkel der Totalreflexion. Die durchgezogene Linie gilt für den Übergang Luft-Glas.

Brechungsindizes der Medien, wobei  $n_1 > n_2$  gilt.

Die größten Gütefaktoren von  $Q \approx 10^{11}$  konnten bisher in Flüstergaleriemodenresonatoren aus  $\text{CaF}_2$  erzielt werden [26]. In Mikrokugeln aus Quarzglas erreichen die Gütefaktoren etwa  $Q \approx 10^{10}$  [27]. Das ist nur mit relativ großen Modenvolumina erreichbar, um die evaneszenten Felder des Resonators klein zu halten. Sie erhöhen sonst die intrinsischen Verluste durch den stärkeren Einfluß von Oberflächeninhomogenitäten des Resonators [28].

Die kleinsten Modenvolumina liegen im Bereich weniger Kubikwellenlängen  $(\lambda_0/n)^3$  und werden in photonischen Kristallen (engl. *photonic crystal*, kurz *PC*) erreicht [2, 29]. Mit ihnen kann Licht gespeichert werden, indem man lithographisch für Photonen bestimmter Frequenz verbotene Aufenthaltsbereiche (*voids*) in einen Kristall schreibt [16]. In den voids kann sich das Licht nicht fortbewegen, da sie eine photonische Bandlücke für bestimmte Wellenlängen herbeiführen. Defekte im photonischen Kristall haben eine verschobene Bandlücke und erlauben so die Lichtleitung oder fungieren als Mikrohohlraumresonator. Diese Techniken ermöglichen den Bau von kleinsten Wellenleitern, Resonatoren und sog. *photonischen Kristallfasern* [30, 31, 32]. Die Güte ist allerdings mit  $Q \approx 10^6$  schlechter als bei anderen monolithischen Resonator Konzepten [29, 33].

Der eindimensionale Sonderfall der photonischen Bandlücke ist die Bragg-Reflexion. Sogenannte *Mikrosäulen* basieren auf diesem Prinzip. Durch abwechselndes Aufdampfen unterschiedlicher Materialien auf einen Halbleiterwafer entsteht eine Sandwichstruktur. Mit geeigneten lithografischen Verfahren und anschließendem Ätzen bleiben säulenförmige

Strukturen mit Schichtaufbau auf dem Wafer stehen. Diese Mikrosäulen speichern Licht in Form einer Stehwelle senkrecht zur Waferoberfläche durch Reflexion zwischen zwei Bragg-Reflektoren aus alternierenden dielektrischen Schichten [34].

## 2.2 Der Fabry-Pérot-Resonator

Eines der am häufigsten verwendeten Resonatorkonzepte ist der 1897 von den französischen Physikern Charles Fabry und Alfred Pérot entwickelte Fabry-Pérot-Resonator. Er besteht aus zwei sich gegenüberstehenden Spiegeln mit hoher Reflektivität  $R$ , Transmittivität  $T = 1 - R$  und festem Abstand  $L$ . Zwischen diesen Spiegeln baut sich eine Stehwelle auf, wenn das durch einen der Spiegel eingekoppelte Licht mit Vakuumwellenlänge  $\lambda_0$  die Resonanzbedingung

$$p \cdot \frac{\lambda_0}{2n} = L, \quad p = 1, 2, 3, \dots \quad (2.4)$$

erfüllt (vgl. Abbildung (2.2)). Heute werden aus Stabilitätsgründen fast ausschließlich konkave Spiegel verwendet, da schon kleine Verkippungen bei planparallelen Spiegeln zu starken Verlusten führen.

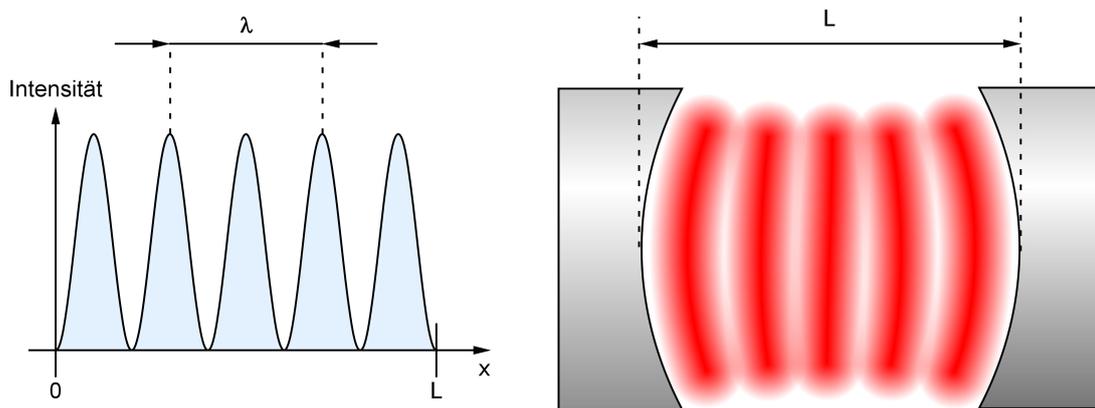


Abbildung 2.2: Links: Angedeutete Intensitätsverteilung in einem Fabry-Pérot-Resonator. Rechts: ein Fabry-Pérot-Resonator aus zwei spärigen Spiegeln mit schematisch angelegter Intensitätsverteilung.

Der Frequenzabstand  $\Delta\nu_{FSR}$  zweier benachbarter Moden ( $\Delta p = 1$ ) wird als *freier Spektralbereich* (*FSR*) bezeichnet und entspricht:

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c_0}{2nL}. \quad (2.5)$$

Die Größe  $c_0$  ist die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Zur weiteren Charakterisierung des Resonators definiert man die *Finesse*  $\mathcal{F}$ . Sie ist der Quotient zwischen freiem Spektralbereich  $\Delta\nu_{FSR}$  und Halbwertsbreite  $\delta\nu$  der lorentzförmigen Transmissionsspitzen (vgl. Abbildung (2.3)). Unter der Näherung  $R \approx 1$  und einer

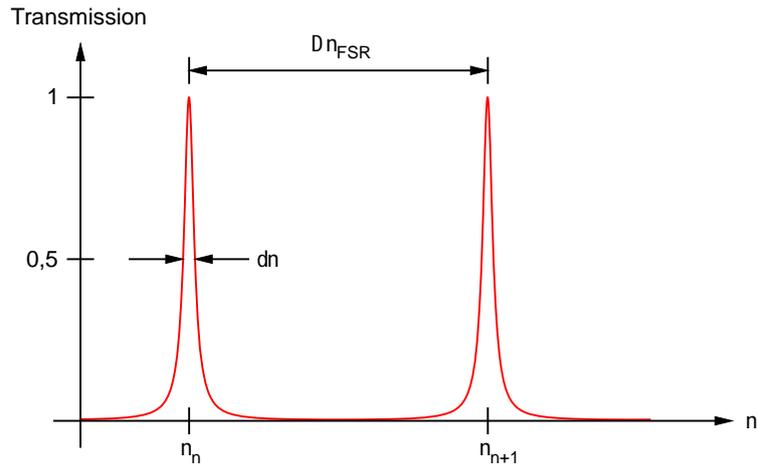


Abbildung 2.3: Die Skizze zeigt zwei lorentzförmige Transmissionsspitzen durch einen Fabry-Pérot-Resonator. Die Transmission ist auf eins normiert.

Dämpfung allein durch Auskoppelverluste, lässt sich die Finesse durch die Reflektivität ausdrücken:

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\delta\nu} \approx \frac{\pi \cdot \sqrt{R}}{1 - R}. \quad (2.6)$$

Sie gibt anschaulich die durchschnittliche Umlaufzahl der Photonen an, bevor sie den Resonator durch aufgrund der Spiegeltransmission verlassen [16].

### 2.2.1 Der Fabry-Pérot-Resonator als Frequenzmaßstab

Häufig werden Fabry-Pérot-Resonatoren auch als Frequenzlineal verwendet. Kennt man den Spiegelabstand  $L$  genau, dient es zur Kalibrierung einer unbekanntenen Frequenzskala. Man spricht dann von einem *Fabry-Pérot-Etalon* (kurz *FPE*).

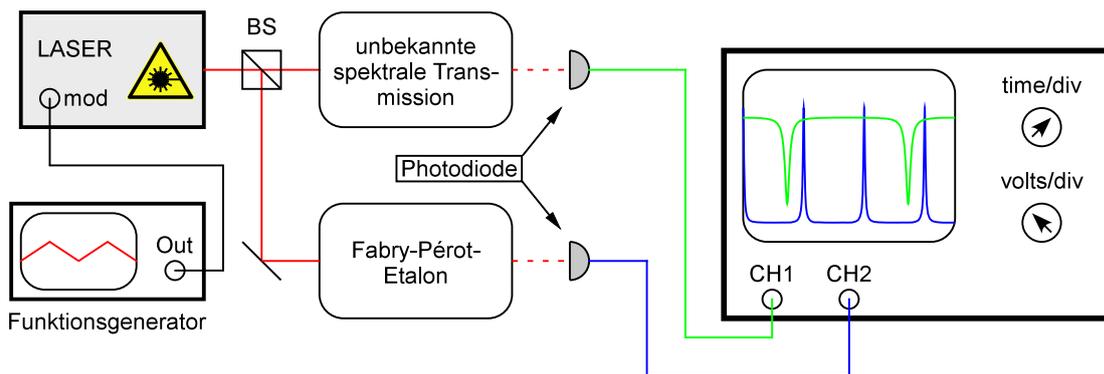


Abbildung 2.4: Ein typischer Aufbau, zur Umrechnung eines zeitaufgelösten Spektrums mittels Fabry-Pérot-Etalon. Die Laserfrequenz wird moduliert und der Laserstrahl im Strahlteiler (BS) geteilt. Beide Signale werden zeitaufgelöst aufgezeichnet.

Spektrale Transmissionseigenschaften optischer Elemente werden mit durchstimmbaren Lasern ermittelt. Das transmittierte Signal des durchgestimmten Lasers wird von einer Photodiode detektiert und zeitaufgelöst in einem Oszilloskop aufgenommen. Gleichzeitig wird die Transmission durch ein Etalon bekannter Länge aufgezeichnet. Das zeitaufgelöste Spektrum kann anhand der äquidistanten Transmissionsspitzen des Etalons, die in Abbildung (2.3) skizziert sind, in ein frequenzabhängiges Spektrum umgerechnet werden. Ein solcher Aufbau ist in Abbildung (2.4) skizziert.

## 2.3 Flüstergaleriemodenresonatoren

Ihren Namen verdanken die Flüstergaleriemodenresonatoren ihrem akustischen Analogon, welches Lord Rayleigh 1910 in der St. Paul's Cathedral zu London entdeckte. In der Galerie der Kuppel konnte er ein an der Wand entlang geflüstertes Wort hinter sich wahrnehmen. Der Schall wurde an der Wand der kreisförmigen Galerie reflektiert und gelangte so zu seinem Ausgangsort zurück. Aufgrund der Ähnlichkeit leitet sich der Name für das optische Analogon *Flüstergaleriemodenresonator* ab. Seine Moden werden naheliegender als Flüstergaleriemoden (engl. *whispering gallery modes*, kurz *WGM*) bezeichnet.

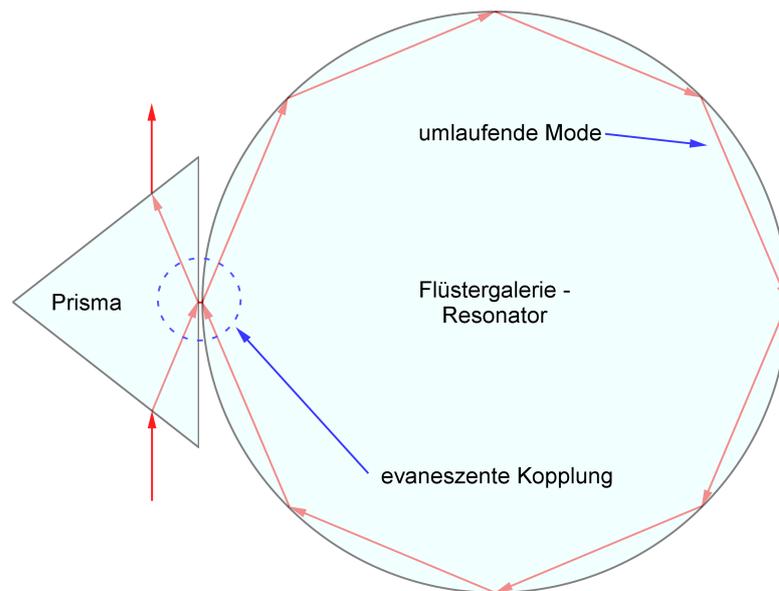


Abbildung 2.5: Ein zweidimensionaler Flüstergaleriemodenresonator. Schematisch dargestellt ist eine umlaufende Mode im Strahlenbild. Die Einkopplung erfolgt in diesem Beispiel nicht über eine ultradünne Glasfaser, sondern über das evaneszente Feld einer Prismenrückseite. Das Licht tunnelt teilweise durch den Luftspalt in den Resonator, was als *frustrierte Totalreflexion* bekannt ist.

WGM-Resonatoren sind dielektrische rotationssymmetrische Körper. In ihnen wird das Licht durch kontinuierliche Totalreflexion nahe der Oberfläche geführt (vgl. Abbildung (2.5)). Diese ist meist zusätzlich in axialer Richtung gekrümmt. Das sorgt für eine ständige

Refokussierung, da sonst das Lichtbündel divergiert.  
Der resonante Fall tritt auf, wenn der optische Weg

$$L_{opt} = L \cdot n_{eff} \quad (2.7)$$

für einen Umlauf ein ganzzahliges Vielfaches  $m$  der Lichtwellenlänge  $\lambda$  entspricht:

$$m \cdot \lambda = L_{opt}, \quad m = \mathcal{N}. \quad (2.8)$$

Die Konstante  $n_{eff}$  steht für den in Abschnitt (1.1.1) eingeführten effektiven Brechungsindex. Die Zahl  $m$  wird *azimutale Quantenzahl* genannt. Eine Flüstergaleriemode ist bei gegebenem Resonatorradius durch  $m$  vollständig charakterisiert. Prinzipiell kann  $m$  jede natürliche Zahl sein, dennoch muss die Bedingung der Totalreflexion an der Grenzfläche zwischen Resonator und umgebenden Medium erfüllt sein. Andernfalls sind die Verluste pro Umlauf zu groß. Analog zu Moden einer Glasfaser, tragen Flüstergaleriemoden aufgrund der Rotationssymmetrie einen zeitlich konstanten Drehimpuls [35].

Flüstergaleriemodenresonatoren gehören zu den Laufwellenresonatoren. Im Resonator baut sich eine Welle auf, die im Resonator umläuft. Im Gegensatz dazu gehören zum Beispiel Fabry-Pérot-Resonatoren zu den Stehwellenresonatoren. Sie beruhen auf Vielstrahlinterferenz gegenläufiger Lichtwellen und haben ortsfeste Intensitätsknoten. In WGM-Resonatoren ist die Anregung einer Stehwelle unter bestimmten Voraussetzungen möglich. Dazu bedarf es zweier gegenläufiger Moden gleicher Amplitude und Wellenlänge. Dieser spezielle Fall wird in Abschnitt (3.1) in Verbindung mit der Modenkopplung genauer untersucht.

Der azimutale freie Spektralbereich der Flüstergaleriemodenresonatoren  $\Delta\nu_m$  ist definiert als der Frequenzabstand zweier Moden, die sich um  $\Delta m = 1$  unterscheiden. Es ergibt sich ein Spektrum äquidistanter Resonanzfrequenzen, analog dem Fabry-Pérot-Resonator.

### Abstimbarkeit von Flüstergaleriemodenresonatoren

Mikroresonatoren besitzen durch ihre kleinen Abmessungen einen großen freien Spektralbereich. Das macht es grundsätzlich schwierig eine Abstimmung über einen gesamten freien Spektralbereich zu erreichen.

Fast allen monolithischen Flüstergaleriemodenresonatoren ist gemein, dass sie daher nur eine begrenzte Abstimbarkeit besitzen. Um die Resonanzfrequenz einer Mode zu verschieben, muss die Länge ihres optischen Wegs verändert werden. Das kann durch eine Änderung der Resonatorgeometrie oder des Brechungsindex passieren. Einfache Mittel zur Verstimmung sind Temperaturänderung oder elastische Deformation.

Mikroscheiben und Mikrotori ruhen auf einem Haltestamm, der auf dem Halbleitersubstrat verwurzelt ist. Sie lassen aufgrund ihrer Geometrie nur thermische Verstimmung zu. Elastische Deformation bietet sich bei faserbasierten Mikrokugeln oder Flaschenresonatoren an. Sie verfügen über zwei gegenüberliegende Faserstämme, an denen gezogen werden kann. Diese Methode macht sich die Änderung des Brechungsindex von Glas unter mechanischer Beanspruchung zunutze. Der Einfluss der Zugspannung auf die Resonatorgeometrie ist ein vergleichsweise kleiner Effekt. Eine mechanische Verstimmung über 400 GHz einer 80  $\mu\text{m}$  dicken Mikrokugel konnte gezeigt werden. Der Abstimmbereich war durch die

mechanische Zerstörschwelle der Flüstergaleriestruktur limitiert und entsprach etwa 50 % ihres freien Spektralbereichs [36].

## 2.4 Flaschenresonatoren

Der Name *Flaschenresonator* leitet sich von der Bewegung der Photonen im Inneren des Resonators ab. Im Strahlenbild ist die Bahn eines Photons in einem solchen Resonator der eines Ions in einer magnetischen Flasche sehr ähnlich. Axial bewegt sich das Ion zwischen zwei Umkehrpunkten hin und her, welche es aufgrund der Drehimpulsbarriere nicht übertreten kann. Der radiale Einschluss geschieht durch die Lorentzkraft, die das Ion auf eine Kreisbahn zwingt. Daraus resultiert eine spiralförmige Bewegung zwischen den Umkehrpunkten [18].

Der Flaschenresonator nimmt eine besondere Stellung unter den monolithischen Flüstergaleriemodenresonatoren ein. Er wird aus einer handelsüblichen optischen Glasfaser gefertigt und hat eine annähernd parabolische Dickenvariation entlang der Faserachse.

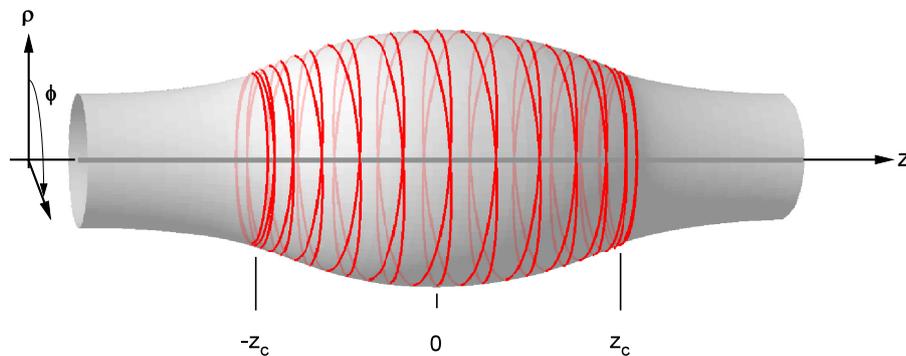


Abbildung 2.6: Gezeigt ist ein Flaschenresonator (grau) und der Strahlweg der Photonen einer Mode (rot). Die Umkehrpunkte liegen bei  $\pm z_c$ . Ihr Abstand ist abhängig von der angeregten Mode und beträgt in der Regel wenige zehn  $\mu\text{m}$ . Der Bauchdurchmesser bei  $z = 0$  beträgt etwa  $30 - 40 \mu\text{m}$ .

Das Licht wird nicht wie bei anderen WGM-Resonatoren auf einen flachen äquatorialen Ringbereich konzentriert. Es kann zusätzlich, wie in Abbildung (2.6) dargestellt, zwischen zwei Umkehrpunkten, den sogenannten *Kaustiken*, in axialer Richtung hin- und herpendeln. Der Strahlweg, den das Licht auf Höhe der Kaustiken beschreibt, hat die Länge  $m\lambda_0 n_{\text{eff}}$ . Die äquatoriale Quantenzahl  $m$  legt aufgrund der speziellen Modenstruktur eine Mode nicht mehr eindeutig fest. Zur Charakterisierung der axialen Modenstruktur dient zusätzlich die *axiale Quantenzahl*  $q$ . Sie gibt die Anzahl der Intensitätsknoten entlang der Resonatorachse an. Höhere axiale Moden ( $q \geq 1$ ) können auch in Mikrotori oder Mikrokuugeln auftreten. Abbildung (2.7) zeigt Moden eines Flaschenresonators mit unterschiedlicher axialer Quantenzahl  $q$ .

Die Moden im Flaschenresonator ( $m, q$ ) werden naheliegend als *Flaschenmoden* (engl. *bottle modes*) bezeichnet. Eine detaillierte theoretische Behandlung der Flaschenmoden findet

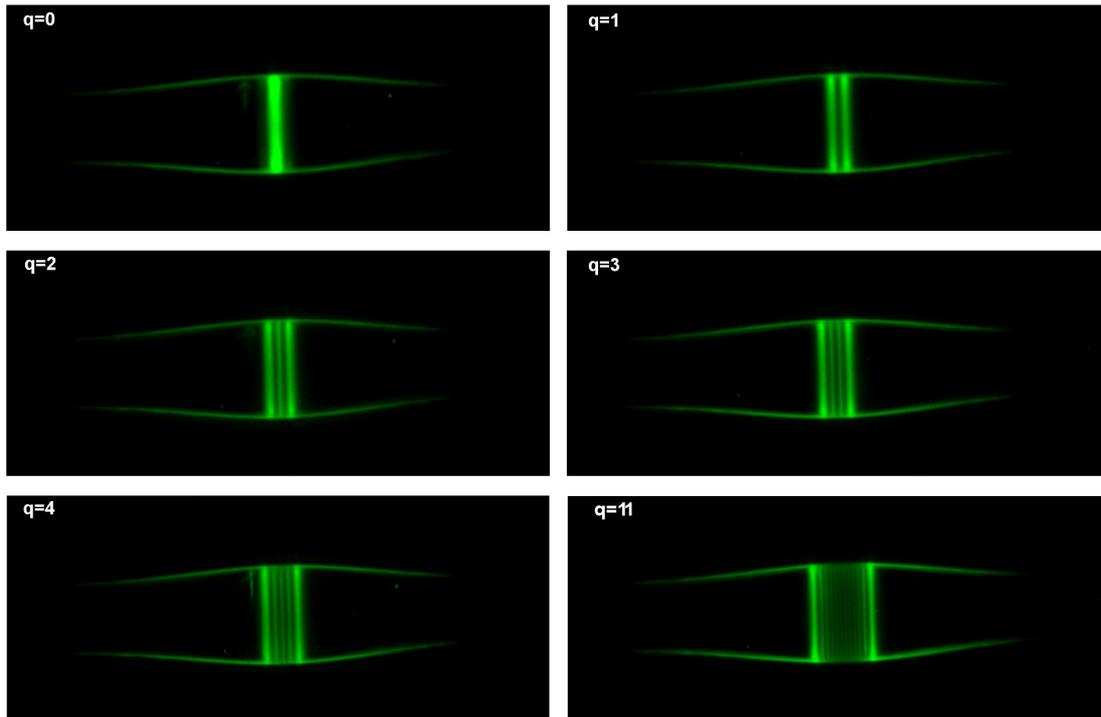


Abbildung 2.7: Das Bild zeigt einen Flaschenresonator mit unterschiedlichen angeregten Axialmoden. Es wurde infrarotes Licht mit  $\lambda = 852 \text{ nm}$  eingekoppelt. Die Aufnahmen entstanden mit einem Erbium-dotierten Resonator. Die  $\text{Er}^{3+}$ -Ionen im Glas regen Zweiphotonen-Prozesse an und emittieren dadurch das sichtbare grüne Licht.

sich im Anhang (A). Die Moden sind aufgrund der Rotationssymmetrie zweifach entartet. Eine Mode kann entweder in oder gegen den Uhrzeigersinn umlaufen, Kapitel (3) behandelt detailliert die Aufhebung dieser Entartung.

Die besondere Eigenschaft eines Flaschenresonators ist seine große Abstimmbarkeit. Diese hat er seiner besonderen Modenstruktur zu verdanken. Zu jeder äquatorialen Mode mit einem FSR von  $\Delta\nu_m$  existieren höhere axiale Moden, die einen viel kleineren FSR  $\Delta\nu_q$  haben. Der Flaschenresonator besitzt bei einem festen Durchmesser mehr Moden als ein normaler WGM-Resonator mit gleichem Durchmesser. Um den Flaschenresonator auf eine beliebige Frequenz abzustimmen, muss er nun nicht über einen FSR von  $\Delta\nu_m$ , sondern über eine kleinere Frequenz von  $\Delta\nu_q$  verstimmt werden.

Der Resonator reagiert mit einer elastischen Deformation auf Zug an den Faserenden. Die induzierte Änderung des Brechungsindex ermöglicht eine Abstimmbarkeit über weit mehr als einen freien Spektralbereich. Eine Verstimmung über das 1,7-fache eines FSR konnte demonstriert werden [15]. Dabei musste die Glasfaser weniger als 0,1 % gedehnt werden, ohne den Resonator dabei zu zerstören.

Die freie Abstimmbarkeit wird benötigt, um die Resonanzfrequenz des Resonators auf eine vorgegebene Frequenz abzustimmen. Das ist zum Beispiel eine Voraussetzung für cavity-QED-Experimente, wie sie in Abschnitt 2.1.1 erwähnt sind. Dabei muss man die Resonanzfrequenz des Resonators auf die festgelegte Frequenz eines atomaren Übergangs,

wie etwa die D2-Linie ( $\lambda = 852,34 \text{ nm}$  [37]) von Cäsium, abstimmen. Die Kopplung zwischen Atom und Resonator beeinflusst dabei maßgeblich deren relative Verstimmung zueinander.

### 2.4.1 Herstellung von Flaschenresonatoren

Handelsübliche optische Glasfasern reichen als Ausgangsmaterial für Flaschenresonatoren aus, da ihr Glas ausreichend rein ist. Bei der in dieser Arbeit verwendeten Faser handelt es sich um monomodalen-Stufenindex-Glasfasern für eine zentrale Wellenlänge von  $820 \text{ nm}$  (Firma Newport, Typ F-SF). Die Faser wird zunächst von ihrer äußeren Polycarbonat-Schutzhülle (Buffer) befreit (vgl. Abbildung (1.1)). Sie verhindert im normalen Gebrauch ein Brechen der Faser. Danach folgt eine Reinigung mit hochreinem Aceton, um Reste des Buffers vollständig zu entfernen. Anschließend wird die so vorbehandelte Faser in die Glasfaserziehmaschine, vorgestellt in Abschnitt (1.1.2), eingelegt und gespannt. Eine so präparierte und gesäuberte Faser mit einem Manteldurchmesser von  $125 \mu\text{m}$  zeigt Abbildung (2.8a).

Mit dem Strahl eines fokussierten  $\text{CO}_2$ -Lasers (Firma Synrad,  $30 \text{ W}$  Maximalleistung) wird das Glas auf einer Länge von etwa  $250 \mu\text{m}$  bis zum Glühen erhitzt. Der Laser emittiert Licht bei  $\lambda = 10,6 \mu\text{m}$  und ist mit einer Meniskuslinse aus Zinkselenid ( $\text{ZnSe}$ ) und der Brennweite  $f = 48 \text{ mm}$  auf die Faser fokussiert. Der Strahl erhitzt das Glas zwar nur einseitig, aber die Thermalisierung geschieht auf einer Mikrosekunden-Zeitskala und damit so schnell, dass die Faser ein homogenes Temperaturprofil aufweist [15]. Nun wird die Glasfaser während des Erhitzens auf den gewünschten maximalen Durchmesser des Flaschenresonators dünnegezogen. Dies geschieht analog zur Herstellung ultradünner Glasfasern, nur dass hier der Laser und nicht der Brenner der Erhitzung der Faser dient. Es entsteht ein mehrere Millimeter langer verjüngter Bereich mit einem homogenen Durchmesser von circa  $35 \mu\text{m}$ , wie Abbildung (2.8b) zeigt. Die Oberflächenspannung der zähflüssigen Glasmasse gewährleistet eine sehr glatte Oberfläche mit niedriger Rauigkeit.

Während des Ziehens muss die Leistung des Lasers dem Durchmesser der Faser angepasst werden, da das  $\text{CO}_2$ -Laserlicht im Volumen der Faser absorbiert, aber die deponierte Wärme über seine Oberfläche dissipiert. Das bedeutet, dass sich das Verhältnis aus Volumen und Oberfläche bei geringer werdendem Durchmesser zugunsten der Dissipation verändert.

Nach dem Ziehen wird die Faser mit dem  $\text{CO}_2$ -Laser an zwei um mehrere hundert Mikrometer separierten Stellen erhitzt und um wenige zehn Mikrometer in die Länge gezogen. Es entstehen zwei kleine Taillen in der Faser, die sogenannten Mikrotailen (*microtaper*) die gut in Abbildung (2.8c) zu sehen sind. Der verdickte Bereich zwischen den Mikrotailen weist in seinem Zentrum eine näherungsweise parabolische Dickenvariation der Form

$$r(z) = \frac{r_0}{\sqrt{1 + (\Delta kz)^2}} \approx r_0 \left( 1 - \frac{1}{2}(\Delta kz)^2 \right) \quad (2.9)$$

auf. Dieser Bereich dient als Flaschenresonator. Seine dickste Stelle hat den Radius  $r_0$  am Ort  $z = 0$ . Zu beiden Seiten hin fällt der Radius mit einer konstanten Krümmung  $\Delta k$  ab. Sie bestimmt den späteren freien Spektralbereich der axialen Flaschenmoden mit Quantenzahl  $q$ . Der Einfluss der Krümmung auf  $\Delta\nu_q$  ist in Abschnitt (2.4.2) beschrieben. Die Krümmung lässt sich gezielt durch Erhitzung des Flaschenresonators selbst weiter

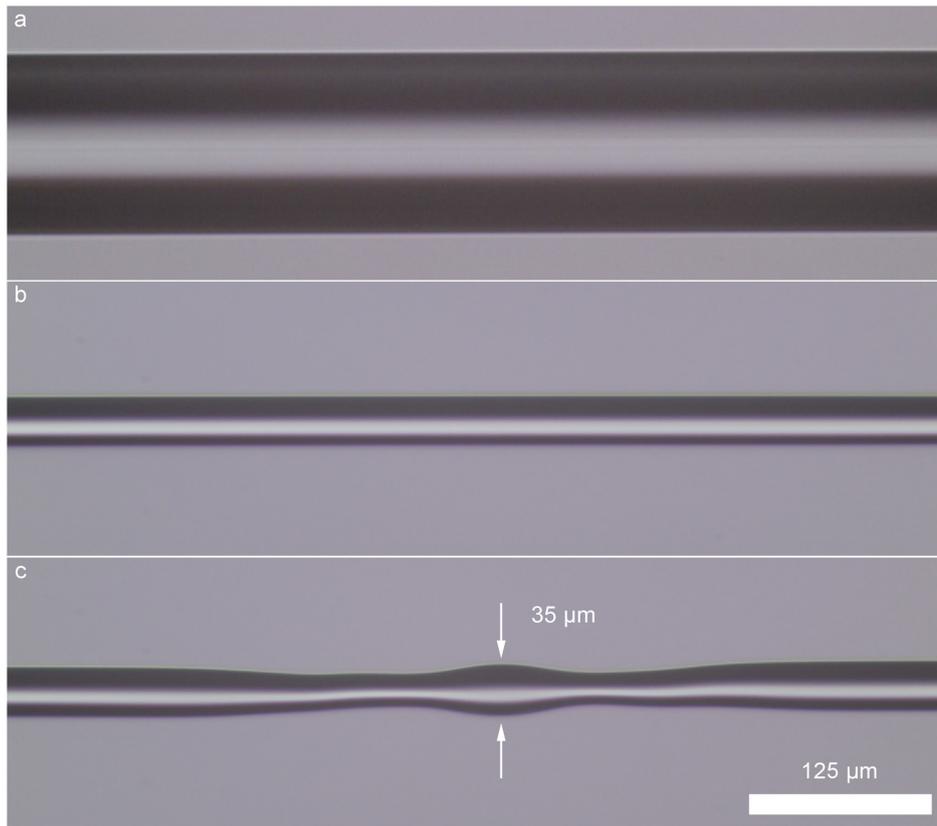


Abbildung 2.8: Herstellungsschritte eines Flaschenresonators: (a) Vom Buffer befreite und gereinigte Glasfaser. In ihrer Mitte zeichnet sich unscharf der dünne Faserkern mit circa  $5 \mu\text{m}$  Durchmesser ab. (b) Eine mit dem Laser auf circa  $35 \mu\text{m}$  verjüngte Faser. (c) Eine Mikrostrukturierte Faser, in der Mitte der fertige Flaschenresonator.

steigern. Die Oberflächenspannung des zähflüssigen Glases sorgt dafür, dass sich  $\Delta k$  entsprechend der Dauer der Hitzeeinwirkung vergrößert. Ist die gewünschte Endform erreicht, folgt eine Analyse des Dickenprofils.

Die Rechtfertigung für die Annahme einer Dickenvariation nach Gleichung (2.9) liefert Abbildung (2.9). Der gemessene Dickenverlauf stimmt sehr genau mit dem parabolischen Profil aus Formel (2.9) im zentralen Bereich überein.

### Vermessung des Resonatorprofils

Um Krümmung und Durchmesser des Resonators zu vermessen, wird mit dem Ziehanlagen-Mikroskop (Objektiv: Firma Mitutoyo, 10x M Plan Apo; CCD-Sensor: Firma Pixelink, PLA-776) ein Bild von der mikrostrukturierten Faser aufgenommen. Ein Computerprogramm ermittelt die Umrisse des Resonators im Bild [15]. Die Bildpixelgröße wurde durch eine Vergleichsmessung mit einer unbehandelten Faser bekannten Durchmessers ermittelt. Die Auflösung des Mikroskops und die Bildunschärfe begrenzen dabei die Messgenauigkeit. Die Genauigkeit der Vermessung des Radius wird auf etwa  $\Delta r = \pm 2 \mu\text{m}$  abgeschätzt und der Fehler in der Berechnung der Krümmung beläuft sich auf  $\Delta(\Delta k) = \pm 0,001 \mu\text{m}^{-1}$  [38].

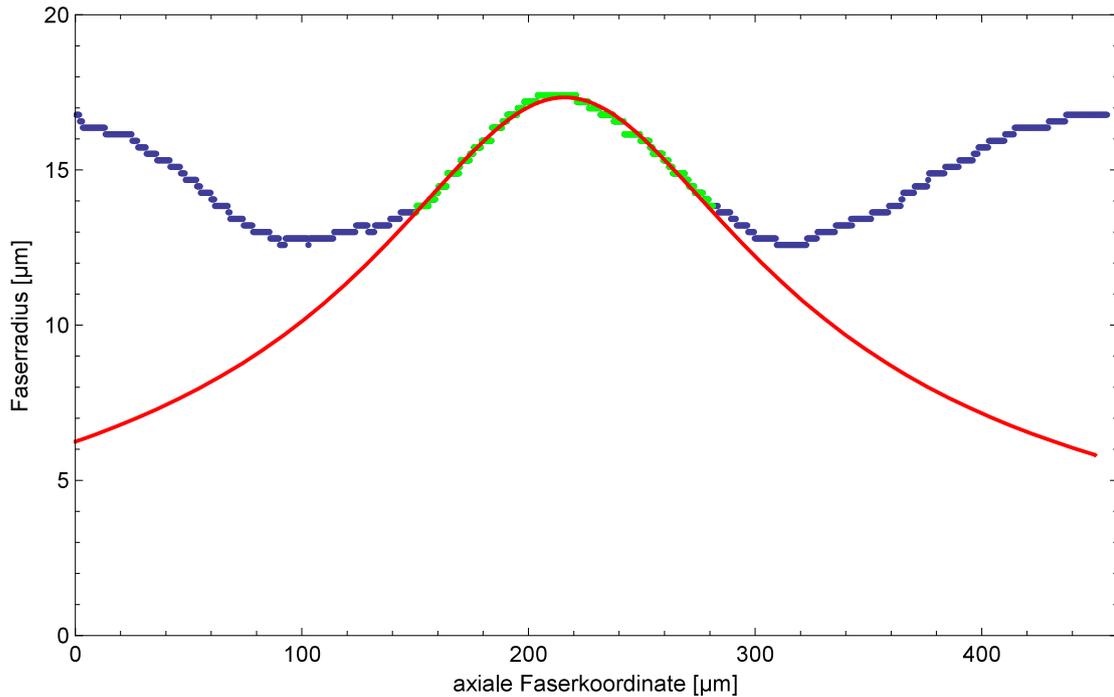


Abbildung 2.9: Das aus einem Bild ermittelte Profil eines Flaschenresonators (blaue und grüne Punkte). Der zentrale Bereich (grün) wurde mit einem Profil nach Formel (2.9) gefittet (rot). Die Parameter betragen:  $r_0 = (17,38 \pm 0,01) \mu\text{m}$  und  $\Delta k = (0,0122 \pm 0,0001) \mu\text{m}^{-1}$ . Das Bestimmtheitsmaß beträgt  $R^2 = 0,96$  und bestätigt eine gute Übereinstimmung.

Typische Resonatoren werden mit einem Durchmesser von  $2r_0 = 30 - 40 \mu\text{m}$  und einem Abstand zwischen den Taillenmitten von ca.  $200 \mu\text{m}$  produziert. Die Krümmung beträgt etwa  $\Delta k = 0,010 - 0,015 \mu\text{m}^{-1}$ . Abbildung (2.9) zeigt ein ermitteltes Resonatorprofil, das mit dem oben beschriebenen Verfahren ausgewertet ist.

## 2.4.2 Abstimmung von Flaschenresonatoren

Nach der Strukturierung eines Flaschenresonators in die Glasfaser wird sie auf einen Haltebügel mit piezoelektrischen Biegeaktoren (Firma Physik Instrumente, PL 112.11) geklebt. Diese verbiegen sich durch eine angelegte Spannung und ziehen die Faser und auch den Resonator in die Länge. Das Glas reagiert elastisch und dehnt sich folglich in Richtung der wirkenden Kraft, was den Brechungsindex der gesamten Faser verändert. Die Änderung der Resonatorgeometrie ist dabei vernachlässigbar klein.

Aus der in der resultierenden Formel (A.23) lassen sich die freien Spektralbereiche der axialen und äquatorialen Moden abschätzen. Für die Werte des in Abbildung (2.9) analysierten Resonators ergibt sich mit dem Brechungsindex von Silikatglas ( $n = 1,467$ ) für benachbarte azimutale Moden ( $\Delta m = 1$ ) ein FSR von:

$$\Delta\nu_m \approx \frac{c}{2\pi n r_0} \approx 1,9 \text{ THz}. \quad (2.10)$$

Das entspricht in etwa dem freien Spektralbereich der äquatorialen Moden einer Mikrokugel mit dem gleichen Durchmesser [35]. Eine Verstimmung von Flüstergaleriemodenresonatoren aus Glas um diesen Betrag konnte bisher nicht erreicht werden, ohne dabei die Belastungsgrenze des Materials zu überschreiten. Sie ist etwa um einen Faktor vier kleiner als der FSR benachbarter axialer Moden ( $\Delta q = 1$ ):

$$\Delta\nu_q \approx \frac{c\Delta k}{2\pi} \approx 570 \text{ GHz.} \quad (2.11)$$

Nach Formel (2.11) und (2.10) hängen beide freien Spektralbereiche von der Resonatorgeometrie ab. Bei der Herstellung lassen sich die Abmessungen praktisch frei wählen. Der Resonator ist damit auf jede festgelegte Frequenz zwischen zwei benachbarten azimuthalen Moden  $m$  und  $m + 1$  durch die geeignete Wahl der axialen Mode  $q$  abstimbar.

Die große Verstimmbarkeit eines schwächer gekrümmten Flaschenresonators über 120 GHz wurde in [15] gezeigt, was in diesem Fall dem 1,5-fachen des FSR der axialen Moden  $\Delta\nu_q$  entsprach. Die mechanische Spannung der Faser lag im Maximum nur bei 8% der Bruchspannung von Silikatglas.

Die Ergebnisse zeigen, dass der Resonator innerhalb seines gesamten Spektrums gezielt auf jede beliebige Frequenz abstimbar ist, ohne ihn an die Zerstörschwelle zu führen. Das macht das Konzept des Flaschenresonators für ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anwendungen interessant.

## 2.5 Kopplung der Flaschenresonatoren an ultradünne Fasern

### 2.5.1 Anregung der Flaschenmoden

Damit verschiedene Moden des elektromagnetischen Felds miteinander koppeln und ein Energieaustausch möglich wird, müssen drei Bedingungen erfüllt sein:

1. Die Moden müssen räumlich überlappen
2. Die Wellenvektoren beider Moden müssen in Betrag und Richtung übereinstimmen (*Phasenanpassung*)
3. Die Polarisation beider Moden darf nicht senkrecht zueinander stehen, sie muss möglichst gut übereinstimmen (*Polarisationsanpassung*)

Die Reichweite der evaneszenten Felder außerhalb ultradünner Glasfasern und monolithischer Mikroresonatoren ist auf wenige hundert Nanometer begrenzt. Ihre räumliche Überlappung macht also eine präzise Positionierung von Resonator und Wellenleiter zueinander erforderlich. Die Stärke der Kopplung von Resonator und Faser ist dann jedoch frei durch den Abstand einstellbar.

Aus Gründen der Impulserhaltung müssen die Propagationskonstanten von Faser  $\beta$  und Resonator  $k$  übereinstimmen. Während  $k$  durch die Geometrie des Resonators festgelegt ist, ist  $\beta$  durch die Dicke der Koppelfaser bestimmt. Die lässt sich bei der Herstellung berücksichtigen.

Eine Resonatormode hat neben ihren charakteristischen Quantenzahlen auch eine festgelegte Polarisation an den Grenzflächen des Resonators. Sie kann transversal-elektrisch (TE)

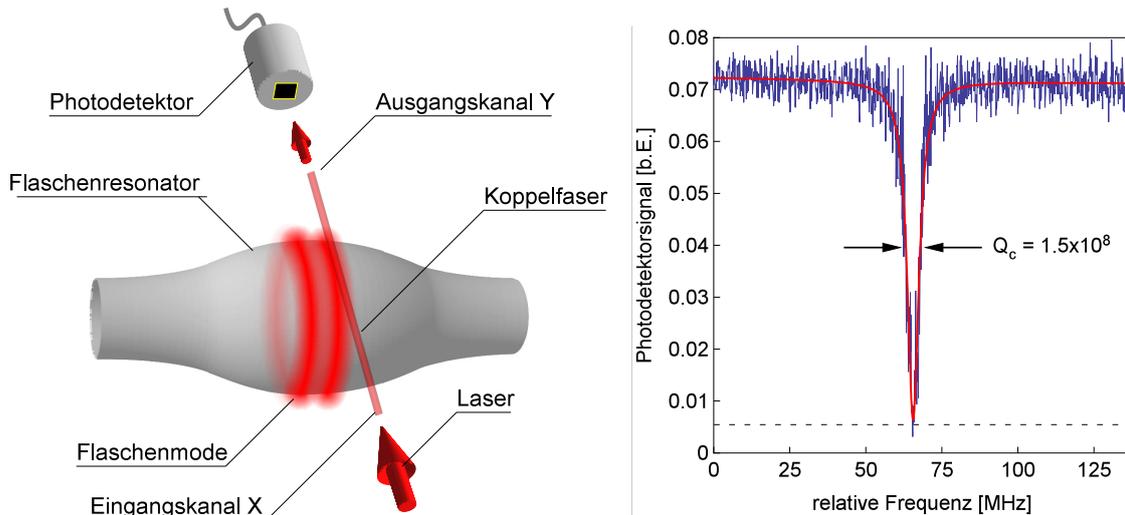


Abbildung 2.10: Links: Schematischer Aufbau zur Messung der Moden eines Flaschenresonators. Rechts: Eine angeregte Flaschenmode zeigt sich durch einen drastischen Einbruch der Transmission durch eine angekoppelte ultradünne Faser. Die gestrichelte Linie markiert das Offset des Photodetektors.

oder transversal-magnetisch (TM) sein. Die anregende Fasermode muss die entsprechende Polarisation aufweisen, damit ein Energietransfer möglich wird. Durch die Einstrahlung einer geeigneten Polarisation in die Koppelfaser ist eine perfekte Polarisationsanpassung möglich.

Ein Lichttransfer in monolithische Resonatoren ist prinzipiell mit Hilfe aller Wellenleiter möglich, welche die Erfüllung obiger Bedingungen erlauben. Dazu zählen zum Beispiel auch Wellenleiter mit rechteckigem oder pilzförmigen Querschnitt, wie sie im Bereich der integrierten Mikrooptik Verwendung finden [39]. Bisweilen dienen auch Koppelprismen mit hoher Brechzahl als Quellen des evaneszenten Felds [36].

Die Kopplung von Flüstergaleriemoden an einen externen Wellenleiter geschieht heute meist nach einer Methode, die in [40] vorgestellt ist. Dabei koppeln Resonatormoden und Moden einer ultradünnen Faser zylindrischen Querschnitts durch eine Überlappung ihrer evaneszenten Felder miteinander. Abbildung (2.10, links) zeigt den schematischen Aufbau dieser Methode in Verbindung mit einem Flaschenresonator. Die angeregte Flaschenmode zeigt sich durch einen Einbruch in der Transmission durch die Faser, was Abbildung (2.10, rechts).

Die maximal mögliche Einkopplung in den Resonator ist durch Fehlanpassung der Polarisation sowie der beteiligten Wellenvektoren begrenzt. Durch eine Vergrößerung der räumlichen Überlappung, also durch Verringerung des Abstands, lassen sich solche Fehlanpassungen kompensieren. Allerdings stört die Koppelfaser bei kleinen Abständen den Resonator, sie wirkt wie ein Streuzentrum für das gespeicherte Licht. Dieser Aspekt ist für die später beschriebene Kopplung zwischen unterschiedlichen Resonatoren besonders wichtig, da Streuverluste ihre Kopplung untereinander herabsetzt.

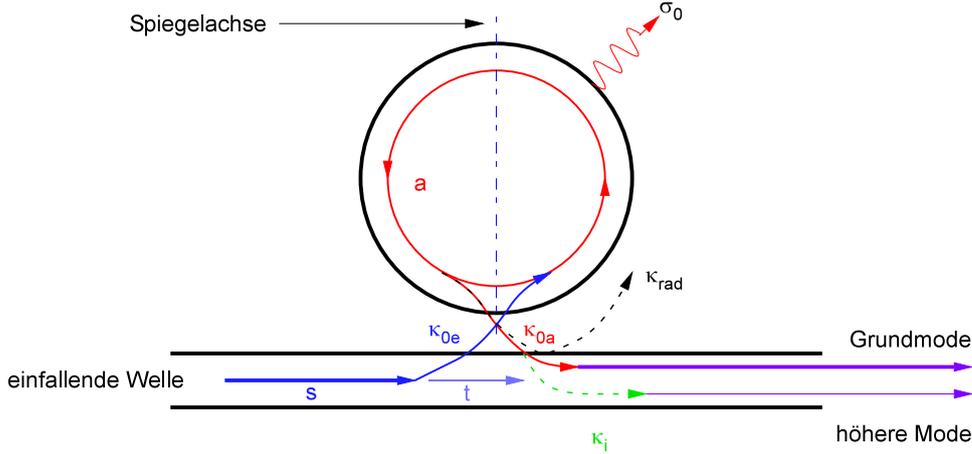


Abbildung 2.11: Die beteiligten Amplituden  $a$ ,  $s$ ,  $t$  und die Kopplungsfaktoren bei der Interaktion von einer Wellenleitermode und einer Resonatormode.

Um den Begriff *Kopplung* näher zu charakterisieren und den Effekt der Faser auf die Streuverluste zu untersuchen, ist eine theoretische Behandlung nötig. Im allgemeinen Fall *mehrerer* angeregter Resonatormoden ist die Behandlung aufwändiger, da sie untereinander koppeln. Die Beschreibung einer solchen Situation folgt in Kapitel (3) im Rahmen der Kopplung von Flaschenmoden untereinander. Das System aus Wellenleiter und *einer* Resonatormode folgt einem einfacheren Modell, das in Abbildung (2.11) verdeutlicht ist. Es berücksichtigt alle Verluste und Verstärkungen in einer Ratengleichung [41]:

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^N \kappa_i^2 + \kappa_{\text{rad}}^2 + \sigma_0^2 + \kappa_{0a}^2 \right)}_{\text{Energieverlustamplitude } \kappa^2} A + i\kappa_{0e}S. \quad (2.12)$$

Diese Formel ist gültig, wenn das eingekoppelte Licht resonant zur Flüstergaleriemode ist.

Die Resonatormode mit der Energieamplitude  $A = |a|^2$  bekommt durch die Grundmode des Wellenleiters der Amplitude  $S = |s|^2$  mittels einer Kopplungskonstanten  $\kappa_{0e}$  Energie zugeführt. Die Energieverlustamplitude  $\kappa^2$  repräsentiert die Energieverluste der Resonatormode. Sie unterteilt sich in zwei Hauptbeiträge, die Dämpfung der Resonatoramplitude pro Umlauf  $\sigma_0^2$  und die Auskopplung in die Wellenleitergrundmode  $\kappa_{0a}^2$ . Die Dämpfung der Resonatoramplitude  $a$  geschieht gemäß einer zeitabhängigen Exponentialfunktion. Das spiegelt die Güte in Verbindung mit der optischen Frequenz  $Q = \omega\tau$  wider. Da die Lichtgeschwindigkeit im Medium konstant ist, entspricht die zeitabhängige Dämpfung einer Dämpfung des Lichts pro zurückgelegtem Weg. Bei festgelegtem Resonatordurchmesser legitimiert das die Wahl einer hier verwendeten Dämpfungskonstante  $\sigma_0$  pro Umlauf.

Zu den Hauptverlustmechanismen addieren sich kleine Beiträge durch Auskopplung in (eventuell vorhandene)  $N$  höhere Wellenleitermoden  $\kappa_i^2$  und durch Streuung an der Koppelfaser induzierte Verluste  $\kappa_{\text{rad}}^2$ . Die Dicke der Koppelfaser ist meist so gewählt, dass die Phasen Anpassung optimal ist, wobei prinzipiell aber höhere Koppelfasermode auftreten können. Bei den in dieser Arbeit verwendeten Fasertailendicken von 500 nm ist die

Phasen Anpassung sehr gut. Bei diesen Durchmessern unterliegen höhere Fasermoden der Abschneidebedingung. Es gilt also  $\kappa_i^2 = 0$ . Der Vorfaktor  $1/2$  der Energieverlustrate dient der Normierung.

Die Verlustamplituden in  $\kappa^2$  haben in diesem Modell die Einheit  $s^{-1}$ . Daher lassen sie sich alternativ durch eine charakteristische Zeitkonstante  $\kappa^2 = 1/\tau$  ausdrücken. Sie beschreibt anschaulich die Zeit, die vergehen muss bis die Resonatoramplitude auf  $1/e$  abgefallen ist. Die physikalische Einheit von  $A$  ist in diesem Modell *Energie*, daraus folgt für  $S$  die Einheit  $[Energie]/\sqrt{s}$ .

Die Ein- und Auskopplung auf Resonanz hat für die Phase des Lichts jeweils eine Phasenverschiebung von  $\pi/2$  zur Folge. Der rechte Term in Gleichung (2.12) ist daher imaginär, was einem gesamten Phasenfaktor von  $\exp(i\pi)$  entspricht. Das aus dem Resonator zurückgekoppelte Licht interferiert daher mit dem teilweise transmittierten Licht mit der Amplitude  $t$  destruktiv.

Handelt es sich um einen Resonator ultrahoher Güte, so sind die Verluste für das zirkulierende Licht pro Umlauf  $\sigma_0^2$  sehr klein. Ist der Abstand der Koppelfaser und damit die Kopplung an den Resonator zudem nicht allzu groß, ist auch  $\kappa_{\text{rad}}^2$  klein gegenüber den Auskoppelverlusten. Bei diesen sehr kleinen dissipativen Termen resultiert eine Zeitumkehrinvarianz. Das vereinfacht die Gleichung (2.12) insofern, als dass die eingekoppelte Leistung gleich der ausgekoppelten Leistung ist. Es gilt unter dieser Näherung  $\kappa_{0a}^2 = \kappa_{0e}^2 = \kappa_0^2$  [42]. Um die Diskussion der Symmetrieeigenschaften zu vervollständigen sei erwähnt, dass ein gekoppelter Flüstergalerieresonator einer Spiegelsymmetrie unterliegt. Die Spiegelachse ist in Abbildung (2.11) eingezeichnet, sie ist senkrecht zur Koppelfaser orientiert. Diese Eigenschaft ist bei der Betrachtung des Resonators als Transferelement für elektromagnetische Wellen in Abschnitt (3.2.2) hilfreich.

Im Gleichgewichtszustand<sup>1</sup> sind die Energieverluste gleich der zugeführten Energie  $|i\kappa S|^2$ , d.h.  $\frac{dA}{dt} = 0$ . Die normierte Leistung, die das System aus Faser und Resonator passiert und die die Photodiode am Faserende detektiert, beträgt dann:

$$T = \left| t_0 + i\kappa_0 \frac{A}{S} \right|^2. \quad (2.13)$$

Das Verhältnis aus Einkopplung  $\kappa_0^2$  und allen Verlusten ist als *Kopplungsstärke* oder *Kopplungsfaktor*  $K$  definiert [41, 43]:

$$K = \frac{\kappa_0^2}{\sum_{i=1}^N \kappa_i^2 + \kappa_{\text{rad}}^2 + \sigma_0^2}. \quad (2.14)$$

Die Leistungstransmission  $T$  modifiziert sich entsprechend:

$$T = \left( \frac{1 - K}{1 + K} \right)^2. \quad (2.15)$$

---

<sup>1</sup>Der anregende Laser muss so langsam durchgestimmt werden, dass die Verlustzeitkonstanten  $\tau$  klein gegenüber der Überlappungszeit von Laserlinienbreite und Resonanzkurvenbreite des Resonators ist. Davon kann bei einer typischen Repetitionsfrequenz der Laserverstimmung von 1 kHz und Resonanzlinienbreiten von mehreren MHz bei nahinfrarotem Licht gerade noch ausgegangen werden.

Nach Gleichung (2.15) kommt die Transmission durch den Wellenleiter auf Resonanz  $T_R$  vollständig zum Erliegen ( $T = 0$ ), wenn  $K = 1$  ist. Diesen Fall nennt man *kritische Kopplung*. Dann ist die aus dem Resonator ausgekoppelte Lichtleistung  $A\kappa_0^2$  gleich dem Anteil  $t$  des Lichts, der nicht eingekoppelt wird. Durch die relative Phasenverschiebung von  $\pi$  des ein- und ausgekoppelten Lichts kommt es zu einer vollständig destruktiven Interferenz und die Transmission ist gleich null. Es gilt dann  $\kappa_0^2 = \sigma_0^2 + \kappa_{rad}^2$ . Abbildung (2.10, rechts) zeigt die Transmission einer kritisch gekoppelten Flaschenmode ultrahoher Güte. Die Transmission auf Resonanz ist fast vollständig unterdrückt. Die verbleibende Transmission folgt aus einer Polarisationsfehlانpassung. Wird ein größerer Anteil des Lichts in den Resonator eingekoppelt, als den Koppelpunkt passiert, so ist  $K > 1$ . Dann ist der Resonator *überkoppelt*. Im Gegensatz dazu spricht man von einem *unterkoppelten* Resonator, wenn  $K < 1$  ist. Es wird dann weniger Licht in den Resonator eingekoppelt, als den Koppelpunkt passiert.

Durch Invertierung von Gleichung (2.15) folgt der Zusammenhang:

$$K = \left( \frac{1 \pm \sqrt{T_R}}{1 \mp \sqrt{T_R}} \right). \quad (2.16)$$

Der Koppelfaktor ist somit allein durch die normierte minimale Transmission  $T_R$  festgelegt. In Gleichung (2.16) gilt das obere Vorzeichen für den überkoppelten Bereich und das untere Vorzeichen im unterkoppelten Bereich.

Um ein Maß zu definieren, wie nahe die Kopplung zwischen Fasermode und Resonatormode einer perfekten Kopplung zwischen nur zwei Moden kommt, definiert man die *Idealität*  $I$  (engl. *Ideality*) [41]:

$$I = \frac{\kappa_0^2}{\sum_{i>1}^N \kappa_i^2 + \kappa_{rad}^2} = \frac{1}{1 + K_P^{-1}}. \quad (2.17)$$

Eine Idealität von  $I = 1$  bedeutet eine perfekte Kopplung zwischen Resonator- und Fasermode, ohne dass der Koppelmechanismus selbst zusätzliche Verluste  $\kappa_{rad}$  oder  $\kappa_i$  einbringt. Sie ist das Verhältnis der intrinsischen Verluste zu den Verlusten des Koppelmechanismus. Der Koppelfaktor  $K$  unterteilt sich bei dieser Betrachtung in zwei normierte Beiträge, die sich wie parallel auftretende Verluste reziprok addieren:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_p} + \frac{1}{K_I}. \quad (2.18)$$

Der Anteil

$$K_p = \frac{\kappa_0^2}{\sum_{i=1}^N \kappa_i^2 + \kappa_{rad}^2} \quad (2.19)$$

beschreibt die *parasitäre Kopplung* in unerwünschte höhere Wellenleitermoden und Strahlungsmoden des elektromagnetischen Felds. Die Kopplung in die gewünschte Wellenleitergrundmode wird durch den Anteil

$$K_I = \frac{\kappa_0^2}{\sigma_0^2} \quad (2.20)$$

ausgedrückt.

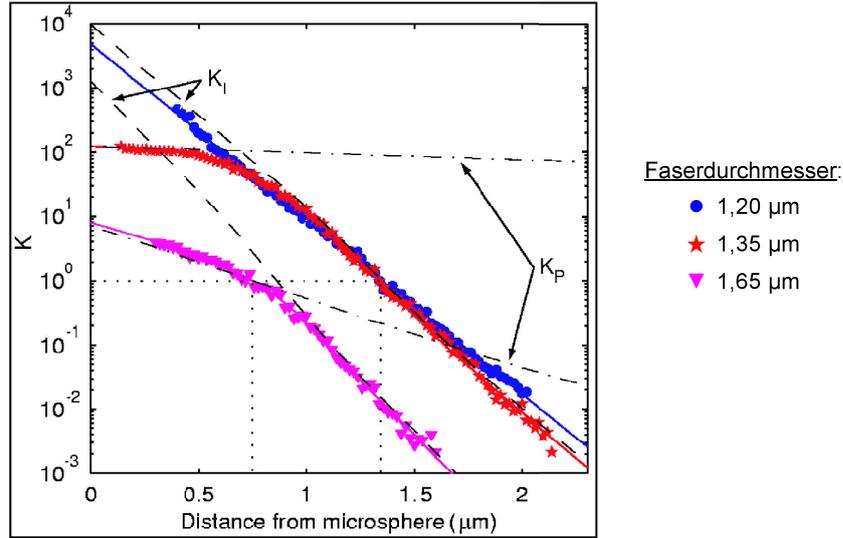


Abbildung 2.12: Der Koppelfaktor ist in diesem Bild logarithmisch gegen die Koppeldistanz aufgetragen. Gemessen wurde die Kopplung an einer  $67 \mu\text{m}$  dicke Mikrokugel mit unterschiedlichen Koppelfaserdurchmessern. Die rote Kurve zeigt einen deutlichen Knick, der durch Streuung induzierte parasitäre Verluste verursacht ist (*roll-off*). Dagegen hat eine dünnere Faser keinen messbaren parasitären Einfluss. In einer dickeren Faser kommt es durch höhere Moden zu einer allgemeinen Beeinträchtigung der Kopplung. (Adaptiert aus [41].)

Der Koppelfaktor  $K$  ist bei großen Distanzen von Faser und Resonator durch  $K_I$  bestimmt, während  $K_p$  im Fall einer monomodalen Koppelfaser ( $\kappa_i^2 = 0$ ) vernachlässigbar klein ist. Bei kleinen Koppelabständen können die Streuverluste jedoch die intrinsischen Resonatorverluste überwiegen, dieser Bereich ist in der Literatur auch als *roll-off* bekannt [41]. Der Grund für diese Benennung spiegelt sich wider, wenn der Koppelfaktor logarithmisch gegen die Koppeldistanz aufgetragen wird, wie in Abbildung (2.12) gezeigt. Es ergibt sich eine Gerade die abknickt, sobald parasitäre Verluste nicht mehr vernachlässigbar klein gegenüber den Auskoppelverlusten sind.

Neben der Erhöhung des Koppelfaktors hat die Erniedrigung des Koppelabstands auch eine Verschlechterung der Güte zur Folge. Der Grund liegt darin, dass die Koppelfaser der angeregten Mode Verluste zusätzlich durch Auskopplung  $\kappa_0^2$  zufügt [41]. Ist der Resonator völlig ungekoppelt, so besitzen seine Moden die *intrinsische Güte*

$$Q_0 = \frac{2\pi c}{\lambda\sigma_0^2} = \frac{2\pi\tau_0}{T_{\text{opt}}}. \quad (2.21)$$

Die intrinsische Güte ist nicht direkt messbar. Es ist dazu immer ein angekoppelter Wellenleiter nötig, der die Güte zu

$$Q = \frac{2\pi c}{\lambda(\sigma_0^2 + \kappa_0^2)} \quad (2.22)$$

modifiziert. Aus der Tatsache, dass bei kritischer Kopplung  $\sigma_0^2 \approx \kappa_0^2$  gilt folgt eine Abschätzung für die intrinsische Güte:

$$Q_0 \approx \frac{Q_c}{2}. \quad (2.23)$$

Ist die Idealität geringer, so stellt Gleichung (2.23) eine untere Abschätzung für  $Q_0$  dar.

### 2.5.2 Der Koppelaufbau

Da das evaneszente Feld ultradünner Glasfasern nur einige hundert Nanometer in das umgebende Medium hineinragt, ist eine präzise relative Positionierung von Resonator und Koppelfaser unerlässlich.

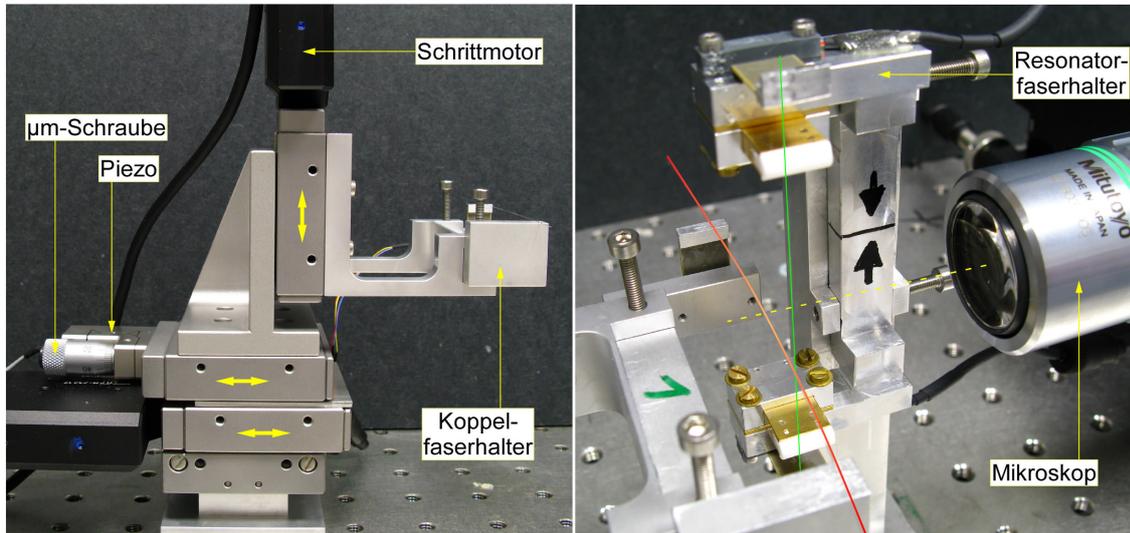


Abbildung 2.13: Links: Koppelaufbau zum Positionieren der Koppelfaser. Der unterste Positionierer dient der Verschiebung entlang der Koppelfaser (unterer Positionierer, Bewegung aus der Bildebene heraus). Rechts: Nahaufnahme des Koppelbereichs von Koppelfaser (rot) und Resonatorfaser (grün). Der Resonator selbst befindet sich in etwa auf Höhe der Mikroskopachse (gelb gestrichelt).

Die Faser, in die der Resonator einstrukturiert ist (*Resonatorfaser*), und die Koppelfaser sind auf ihren Haltebügeln mit UV-härtendem Klebstoff fixiert. Der Resonatorfaserhalter selbst ist an einem unbeweglichen Haltepfosten befestigt, der mit dem optischen Tisch verschraubt ist. Die Resonatorfaser ist senkrecht zur Tischebene orientiert (vgl. Abbildung (2.13)).

Relativ zum Resonator wird die Koppelfaser positioniert. Der eigentliche Kopplungsaufbau besteht aus einer Kombination von vier einachsigen Positioniereinheiten (Firma Physik Instrumente, M-105) und einer Halterung für den Koppelfaserhalter, der die Koppelfaser horizontal zur Tischebene hält. Die Anordnung des Aufbaus zeigt Abbildung (2.13). Um die Koppelfaser entlang der Faserachse zu verschieben, genügt eine Positioniereinheit mit Mikrometerschraube. Sie hat eine Einstellgenauigkeit von  $1 \mu\text{m}$ . Der ultradünne Teil der Koppelfaser mit etwa 3 mm Länge muss nur grob mittig zum Resonator platziert werden. Zur Abstandseinstellung werden daher zwei der insgesamt vier Positionierer verwendet. Der Untere verfügt über einen hochauflösenden Servomotor mit einer kleinsten Schrittweite von 100 nm (Firma Physik Instrumente, M-232). Da auch das noch zu ungenau ist und er nur diskrete Schritte zulässt, ist eine feinere stufenlose Abstandseinstellung erforderlich. Ein zweiter darauf verschraubter Positionierer mit kombiniertem Piezoaktuator-

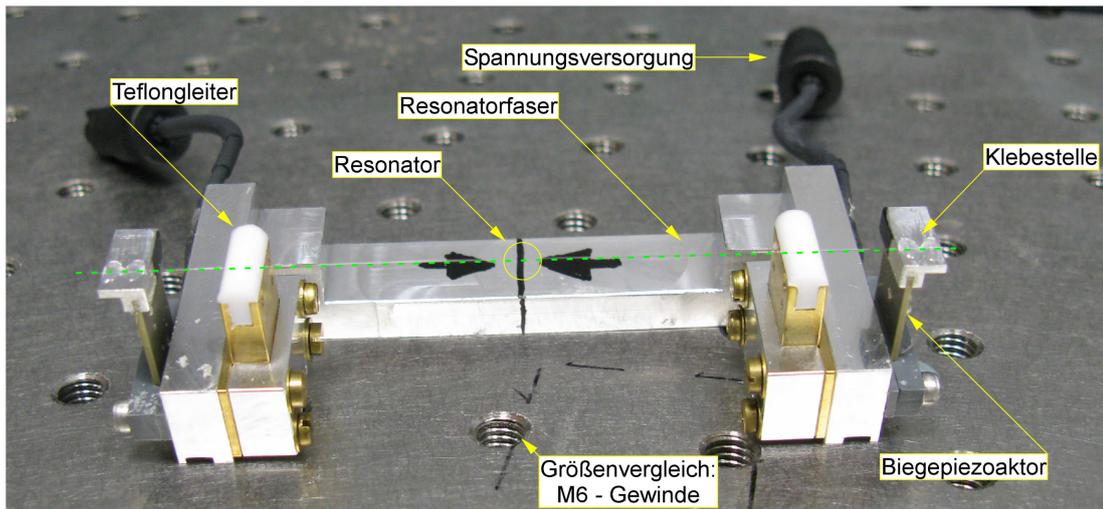


Abbildung 2.14: Ein Resonatorfaserhalter mit beidseitigen piezoelektrischen Biegeaktoren und Teflongleitern. In die Resonatorfaser ist der Flaschenresonator einstrukturiert (grün gestrichelt), sie ruht auf den Teflongleitern und wird durch die Biegeaktoren gespannt.

Mikrometerschraubenantrieb gestattet feinere Schrittweiten (Firma Physik Instrumente, P-854.00). Seine Mikrometerschraube ist nur für grobe Einstellungen geeignet. Sie ist in einem Festkörpergelenk montiert, welches den piezoelektrischen Aktuator beherbergt. Er hat eine theoretische Auflösung von 1 nm über einen maximalen Stellweg von 25  $\mu\text{m}$ . Die Betriebsspannung beträgt 0 – 100 V [44] und wird vom dazugehörigen Verstärkermodul (Firma Physik Instrumente, E-503.00) bereitgestellt. Die Spannung lässt sich manuell per Stellschraube oder durch einen analogen externen Steueranschluss einstellen.

Für eine Verschiebung der Koppelfaser entlang des Resonators reicht die kleinere Genauigkeit eines Servomotors aus.

Einmal auf ihren Halter festgeklebt, verändern Koppel- und Resonatorfaser ihre Position nicht. Die Koppelfaser ist an einer Seite auf einen piezoelektrischen Biegeaktuator und an der gegenüberliegenden Seite direkt auf den Haltebügel geklebt. Durch eine Auslenkung des Biegeaktuators spannt sich die Koppelfaser.

Um bei Verstimmung des Flaschenresonators nicht die empfindliche Kopplung durch einseitigen Zug zu stören, wird dafür ein spezieller Haltebügel mit beidseitigem Biegeaktuator benutzt. Dieser ist in Abbildung (2.14) dargestellt. Befindet sich der Resonator genau in der Mitte zwischen den Klebestellen und ist die Auslenkung beider Biegepiezos für eine angelegte Spannung gleich, so ändert sich die Resonatorposition entlang der Faser nicht. Zusätzlich tritt bei Bewegung der Biegeaktoren immer ein Versatz in radialer Richtung der Resonatorfaser auf. Da die Biegeaktoren ähnlich eines Bimetallstreifens bei angelegter Spannung nur ihre Krümmung, aber jedoch nicht ihre Länge ändern, kommt es senkrecht zur Faserachse zu einer kleinen Auslenkung. Deshalb befinden sich auf dem verwendeten Halter beidseitig Teflongleiter. Die Faser ist darauf reibungsarm geführt und kann auch bei Auslenkung der Biegeaktoren ihre radiale Position nicht ändern.

Die Biegeaktoren werden von einem Treibergerät mit konstanter Spannung (Firma Physik

Instrumente, E-650.00) gesteuert. Dieses hat einen Anschluss für externe Modulation, über die die Biegepiezos präzise einstellbar sind. Da der Resonator sehr empfindlich auf kleinste Spannungsschwankungen in den Biegepiezos reagiert, wird das Treibergerät bei externer Modulation nur durch einen Isolationsverstärker angesteuert. Er schützt die Biegepiezos vor störenden Brummspannungen, wie sie zum Beispiel durch Massenschleifen auftreten, durch eine galvanische Trennung. Zusätzlich erniedrigt er ein eingehendes Signal um das zehnfache, sodass das Signal-zu-Rausch-Verhältnis bei Verwendung höherer Eingangssignalpegel auf der Ausgangsseite besser ist. Das Rauschen wird jedoch nicht vollständig unterdrückt, ist aber im Vergleich zu anderen Störfaktoren klein.

Ein Mikroskop dient der Beobachtung von Koppelfaser und Resonator. Das verwendete Objektiv hat einen Arbeitsabstand von 32 mm, eine Tiefenschärfe von  $3,5 \mu\text{m}$  und eine zehnfache Vergrößerung (Firma Mitutoyo, M Plan Apo 10x). Wahlweise steht ein Objektiv mit einem Arbeitsabstand von 30,5 mm und einer Tiefenschärfe von ebenfalls  $3,5 \mu\text{m}$  bei 20-facher Vergrößerung zur Verfügung (Firma Mitutoyo, M Plan Apo 20x SL). Beide limitieren die Auflösung auf  $1 \mu\text{m}$ . Jeweils eines der Objektive ist über einen Tubus (Firma Infinity Photo-Optical, Infinitube) mit einem monochromen CMOS-Kamera (Firma Allied Vision Technologies, Marlin F-131B) verschraubt. Der Infrarotfilter des Bildsensors wurde entfernt, um das Streulicht des Resonators im nahen Infrarot-Wellenlängenbereich ( $\lambda = 852 \text{ nm}$ ) aufnehmen zu können. Zur Fokussierung des Mikroskops auf die Koppelposition ist der Tubus an eine dreiachsige Positioniereinheit (Firma Thorlabs, PT3/M) angeschraubt, die mit dem optischen Tisch verbunden ist. Zur Befestigung des Tubus dienen spezielle Halteklammern für Tubussysteme. Die Beleuchtung der Fasern leistet eine weiße Leistungsleuchtdiode (Firma Lumileds, Luxeon Maximalleistung 3 Watt), die durch eine dimmbare Stromquelle gespeist wird. Licht emitierende Dioden entwickeln im Vergleich zu herkömmlichen Lichtquellen weniger Abwärme, wodurch Störungen des Resonators durch Konvektion ausbleiben.

Der gesamte Koppelaufbau und die Beleuchtung sind in einer Staubschutzkiste untergebracht, um Verschmutzungen der Resonatoren und der Koppelfasern zu vermeiden. Das Mikroskopobjektiv ist durch eine Gummimebran in die Kiste eingeführt. Zusätzlich verfügt die Kiste über einen Gasanschluss, um sie bei dem Einbau der Fasern mit staubfreiem Stickstoff zu fluten. Während der Messungen ist die Stickstoffspülung nicht möglich, da die Resonanzfrequenzen sehr empfindlich auf Luftverwirbelungen reagieren. Eine Verschmutzung der Fasern muss während der Messung in Kauf genommen werden.

### 2.5.3 Optische Komponenten

Neben der mechanischen Positionierung der Koppel- und Resonatorfaser zueinander, ist auch ein treibendes Lichtfeld zur Anregung der Flaschenmoden nötig. Es ist in Abbildung (2.15) dargestellt. Die einzelnen Baugruppen des optischen Aufbaus sind im Folgenden vorgestellt.

#### Die Laserstrahlquelle

Die spektrale Vermessung der Resonatormoden geschieht mit einem DFB-Diodenlaser schmaler Linienbreite (Firma Toptica DL100-DFB,  $\lambda_{LD} = 852 \text{ nm}$ , 25 mW). Die Abkürzung *DFB* steht für *Distributed Feedback*. In die aktive Zone des Laserkristalls ist

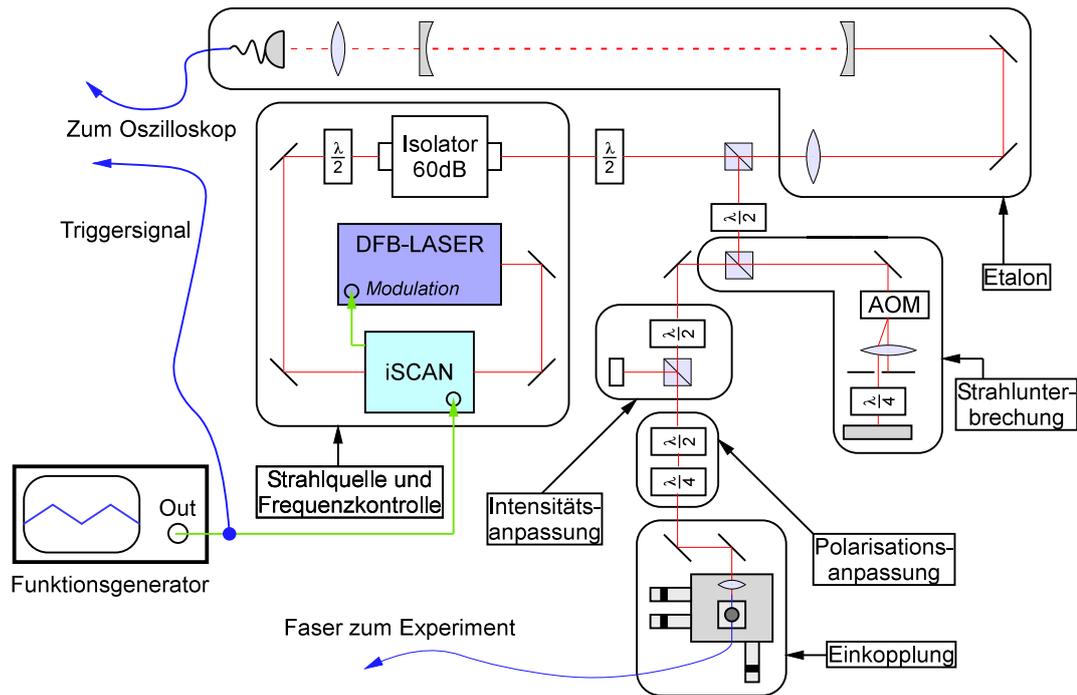


Abbildung 2.15: Aufbau des Lasersystems zur Anregung der Flaschenmoden, mit den wesentlichen Baugruppen: Strahlquelle, Etalon, Strahlunterbrechung, Intensitäts- und Polarisationsanpassung, Einkopplung.

auf ganzer Länge in Emissionsrichtung eine periodische Struktur eingearbeitet. Sie stellt einen über die gesamte Länge des Laserkristalls verteilten Bragg-Reflektor für das Laserlicht dar. Die DFB-Struktur wirkt somit wie ein schmalbandiger frequenzselektiver Spiegel. Das ersetzt die polierten Endflächen herkömmlicher Diodenlaserkristalle, die bei der DFB-Technik meist antireflex-beschichtet sind. Der Vorteil von DFB-Lasern besteht in der schmalen Linienbreite und einem modensprungfreien Durchstimmverhalten. Der Laser kann per Peltier-Element mittels der Temperatur oder dem Strom durch die aktive Zone durchgestimmt werden. Beides stimmt die Resonanzfrequenz der Diode durch. Während die Temperatur die Periode des Bragg-Reflektors verschiebt, ändert der Strom durch die aktive Zone den Brechungsindex des Kristalls. Die Linienbreite beträgt  $\delta\nu = 429$  kHz, und wurde in früheren Experimenten über eine Heterodynmessung mit einem Referenzlaser kleinerer Linienbreite bestimmt [15]. Die ermittelte spektrale Breite ist der Mittelwert von sieben Einzelmessungen mit einer Integrationszeit von je  $5 \mu\text{s}$ .

Um während der Messung ein Driften des Lasers auszuschließen und um den Laser definiert verstimmen zu können, befindet sich direkt hinter dem Laser ein Stabilisierungsinterferometer (Firma TEM-Messtechnik, *iScan*). Es besteht aus einem Messkopf und einer Mikrocontrollereinheit. Der Messkopf enthält ein Referenzinterferometer, das den zeitlichen Frequenzverlauf des Laserslichts ermittelt. Er liefert ein *Ist*-Signal an den Mikrocontroller, der es mit einem Referenzsignal aus einer externen Quelle vergleicht und den Laser entsprechend nachregelt. Zusätzlich enthält der Mikrocontroller einen PID-Regelkreis, der Driften sowie Hystereseeffekte des Lasers verhindert und die freie Wahl des Durchstimm-

bereichs ermöglicht.

Ein Funktionsgenerator stellt ein Referenzsignal bereit. Er steuert den iScan mit einem Dreieckssignal der Repetitionsfrequenz von  $f = 1$  kHz. Obwohl die Modulation des Lasers mit einem Dreieckssignal erfolgt, reagiert die Laserfrequenz aufgrund von thermischer Trägheit der Laserdiode mit einer sinusförmigen Modulation. Ist der Durchstimmbereich jedoch groß genug und wird zwischen den Umkehrpunkten der Modulation gemessen, ist die Verstimmung hinreichend linear. Der optische Isolator (Firma Linos, 60 dB) schützt Laser und iScan vor störenden Rückreflexen aus dem optischen Aufbau. Diese könnten die Funktion des iScan beeinträchtigen und sogar den Laser zerstören.

### Einkopplung, Polarisations- und Leistungsanpassung

Der Strahl wird mittels einer Halbwellenplatte ( $\lambda/2$ -Platte) und einem polarisierenden Strahlteilerwürfel aufgeteilt. Einer der Teilstrahlen wird dem Fabry-Pérot-Etalon mit 1 m Länge zugeführt. Zur Modenanpassung des Strahls an das FPE ist eine Linse (Firma Thorlabs,  $f = 1,5$  m) vor dem ersten Resonatorspiegel aufgestellt. Hinter dem FPE sammelt eine Linse das transmittierte Licht und fokussiert es auf eine Photodiode. Ein digitales Speicheroszilloskop (Firma Agilent, MSO6104A) liest die Photodiodenspannung aus. Der FSR des Etalons ist genau bekannt. Das Signal des FPE dient somit der Bestimmung relativer Frequenzabstände aus dem zeitaufgelösten Oszilloskopsignal.

Das verbleibende Licht tritt durch einem akusto-optischen Modulator (AOM) in Doppelpass-Konfiguration. Diese schaltet bei Bedarf den Strahl ein und aus. Die Zeit, in der die Transmission von 90% bis auf 10% des Ausgangswertes abfällt, beträgt 20 ns. Die Doppelpasskonfiguration besteht aus einem polarisierenden Strahlteilerwürfel, einer  $\frac{\lambda}{4}$ -Wellenplatte, einer Blende und einem Spiegel. Die nullte und erste Beugungsordnung passiert die Linse. Die dahinter stehende Blende ist so eingestellt, dass nur die erste Beugungsordnung in die Viertelwellenplatte fällt. Dahinter steht ein Spiegel, der den Strahl in sich zurück reflektiert und ihn ein zweites Mal durch Viertelwellenplatte und AOM leitet. Der Strahlteiler transmittiert das Lichtbündel, da die Polarisation durch den zweifachen Durchtritt durch die Viertelwellenplatte um  $90^\circ$  gedreht wird. Der Vorteil eines Doppelpass-AOM-Aufbaus ist, dass der Strahl nicht einem modulationsfrequenzabhängigen Versatz unterliegt, der die Einkopplung in die Faser beeinflussen würde.

Hinter dem AOM folgt eine Intensitätsanpassung bestehend aus einer Halbwellenplatte und einem Strahlteilerwürfel. Es ist wichtig, dass den Flaschenresonator nicht zu hohe Intensitäten erreichen. Die Feldstärken im Resonator steigen sonst so hoch an, dass nicht-lineare Effekte und Erwärmung des Glases seine Resonanzfrequenz verschieben (*optische Bistabilität*) [45]. Beobachtbar ist dieser Effekt bei Leistungen in der Faser bereits ab etwa  $P > 50 \mu\text{W}$  und Güten oberhalb von  $Q > 5 \cdot 10^7$ .

Die im Experiment verwendeten nicht-polarisationserhaltenden Fasern verändern eine eingestrahlte Polarisation durch temperatur- und spannungsinduzierte Doppelbrechung in einer unbekanntem Weise. Hinter der Intensitätsanpassung kann aus diesem Grund mit einer  $\lambda/2$ - und einer  $\lambda/4$ -Platte (Polarisationskontrolle) jede beliebige Polarisation am Koppelpunkt präpariert und so der störende Effekt der Faserstrecke kompensiert werden. Der Strahl wird hinter der Polarisationskontrolle über ein Spiegelpaar und eine angepasste asphärische Linse (Firma Thorlabs,  $f = 6$  mm) mittels einer Faserkopplungseinheit (Firma Thorlabs, Modell NanoMax) in die Glasfaser eingekoppelt.

Das transmittierte Signal der resonatorgekoppelten Faser detektiert eine schnelle Photodiode (Firma Osram, BP-104S), verstärkt durch eine Verstärkerplatine (angefertigt von der Elektronikwerkstatt des Instituts). Das Oszilloskop protokolliert die Photodiodenspannung zeitaufgelöst.

#### 2.5.4 Datenverarbeitung

Die aus dem Experiment gewonnenen Daten sind so umfangreich, dass sie nur computer-gestützt auswertbar sind. Das macht eine digitale Aufnahme unausweichlich.

Das verwendete digitale Speicheroszilloskop hat eine maximale Auflösung von  $10^9$  Datenpunkten pro Sekunde und Kanal. Das ist ausreichend, um auch schmalste Resonanzkurven des Flaschenresonators mit ausreichender Auflösung aufzunehmen. Der gleiche Funktionsgenerator, der den iScan ansteuert, versorgt dabei das Oszilloskop mit einem Triggersignal. Es wird nach jedem vollständigen Durchfahren des Durchstimmbereichs ausgelöst.

Über eine USB-Schnittstelle ist das Oszilloskop mit einem Computer verbunden. Eine Steuerungssoftware (Firma National Instruments, Signal Express) steuert das Oszilloskop, liest die einzelnen Kanäle nach einem Triggerpuls aus und speichert die aufgenommenen Signale. Um einzelne Parameter des Experiments, wie die Spannung der Biege- und Abstandspiezoaktuatoren, zu variieren, verfügt der Computer zusätzlich über eine Digital-Analog Wandlerkarte (Firma National Instruments), welche ebenfalls durch die Aufnahmesoftware angesteuert wird.

Die Analyse der aufgenommenen Datenreihen erfolgt mit einem Computeralgebra-Programm (Firma Wolfram Research, Mathematica 6). Die zeitabhängig aufgenommenen Signale werden zunächst eingelesen und anhand der Maxima des FPE-Signals in frequenzabhängige Signale umgerechnet. Danach folgt die grafische Darstellung der aufgenommenen Datenpunkte. Eine Programmroutine analysiert die Datensätze und berechnet anschließend gewünschte Größen, wie zum Beispiel die Güte oder Kopplung einer Mode.

#### 2.5.5 Bestimmung der Güte einer Flüstergaleriemode

Der oben beschriebene Aufbau gestattet nun die vollständige Charakterisierung der Transmissionseigenschaften einer Resonatormode. Die Güte ist dabei eine der wichtigsten Größen. Um sie zu bestimmen, sind zwei unterschiedliche Methoden üblich, die sich in ihrer Genauigkeit und apparativen Aufwand unterscheiden.

##### Bestimmung der Güte über das Modenabklingverhalten

Die gespeicherte Energie eines jeden gedämpften Oszillators nimmt nach dem Abschalten der äußeren Anregung exponentiell mit der Zeit gemäß

$$I(t) = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (2.24)$$

ab. Wie alle Resonatoren zeigen optische Resonatoren auch dieses charakteristisches Verhalten.

Im Experiment übernimmt ein akusto-optischer Modulator das Abschalten der äußeren Anregung, in dem er den Laserstrahl abschaltet. Das im daran angekoppelten Resonator gespeicherte Lichtfeld klingt ab und verlässt den Resonator durch die Koppelfaser. Eine

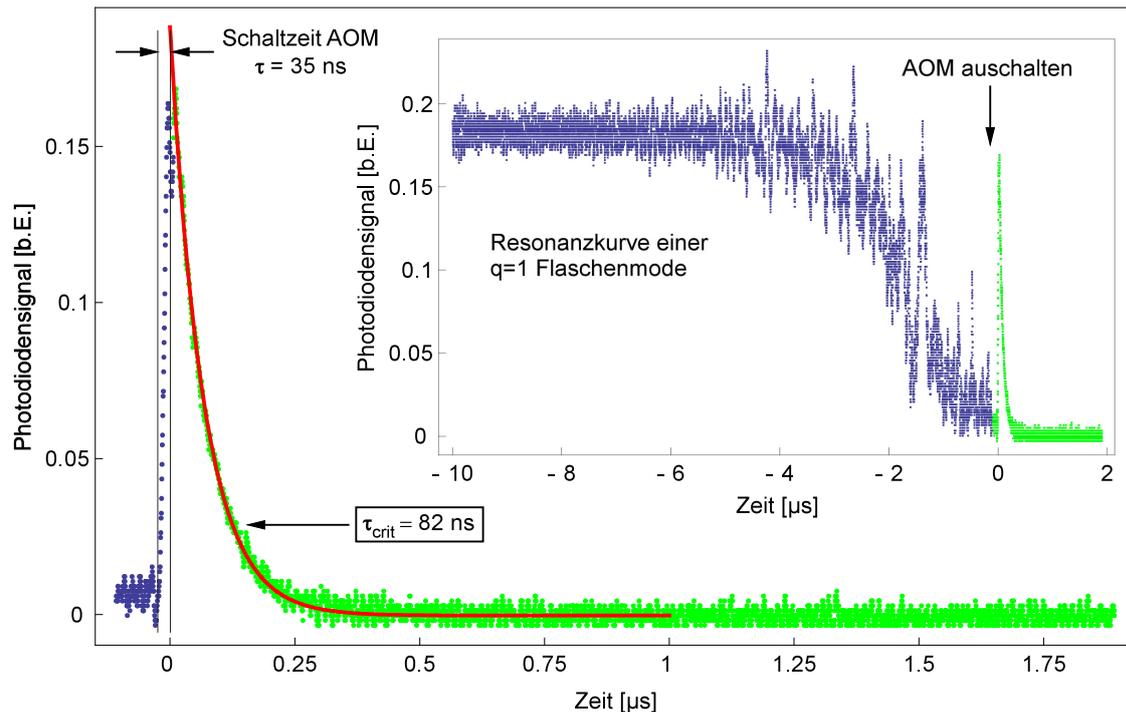


Abbildung 2.16: Eine Messung nach der ring-down Methode. Der Exponentialfit (rot) liefert eine Zeitkonstante  $\tau_{\text{crit}} = 80 \mu\text{s}$  der kritisch gekoppelten Flaschenmode eines  $35 \mu\text{m}$  dicken Flaschenresonators. Die Zeitkonstante entspricht bei einer Wellenlänge  $\lambda \approx 850 \text{ nm}$  einer intrinsischen Güte von  $Q_0 \approx 2 \cdot Q_c = 3,6 \cdot 10^8$ . Eingesetzt: Gesamter Transmissionskurvenverlauf der kritisch gekoppelten Flaschenmode. Bei  $t = 0$  schaltete der AOM den Laser aus. Die grünen Punkte wurden für die Messung von  $\tau_{\text{crit}}$  herangezogen.

Photodiode misst am Faserende die ausgekoppelte Lichtleistung. Aus der gemessenen Photodetektorspannung in Abhängigkeit von der Zeit ist direkt eine Zeitkonstante ablesbar. Nach der Formel  $Q = \omega\tau$  bestimmt sich dann bei bekannter Laserfrequenz die Güte  $Q$ . Sie hängt nach wie vor von der Kopplung des Resonators an die Koppelfaser ab. Die typische Schaltzeit eines AOMs ist mit wenigen zehn Nanosekunden deutlich kleiner, als die Zeitkonstante eines gedämpften Mode ultrahoher Güte eines Flaschenresonators ( $\tau \approx 100 \text{ ns}$ ) und daher vernachlässigbar. Abbildung (2.16) veranschaulicht diese Messmethode. Diese Art der Messung ist auch unter der Bezeichnung *ring-down*-Spektroskopie bekannt und ist eine sehr präzise Messmethode zur Bestimmung der Güte.

### Bestimmung der Güte mittels Linienbreitenmessung

Diese Methode der Gütemessung ist im Gegensatz zur genannten ring-down-Spektroskopie mit einem kleineren apparativem Aufwand verbunden, da kein schnelles Schalten nötig ist. Allerdings ist die Bestimmung der Güte weniger genau. Die Breite und Position der Resonanzkurve fluktuiert durch akustische Störungen und Luftverwirbelungen im Resonatorumfeld.

Die Transmissionskurve des gekoppelten Flaschenresonators hat ein lorentzförmiges Profil

[46] gemäß

$$G_L(\nu) \propto \frac{\frac{\Delta\nu}{2}}{\left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2 + (\nu - \nu_0)^2}. \quad (2.25)$$

Ein Kurvenfit mit obiger Formel liefert die Linienbreite  $\Delta\nu$ , die bei bekannter Laserwellenlänge einer Güte

$$Q = \frac{\nu}{\Delta\nu} \quad (2.26)$$

entspricht.

### 2.5.6 Experimentelle Charakterisierung der Kopplung

Die Transmission durch eine ultradünne Koppelfaser wurde in Abhängigkeit ihres Abstands zu einem Flaschenresonator untersucht. Die Fasertaille hatte eine Dicke von 500 nm bei 3 mm Länge. Mit dem piezoelektrischen Aktuator des Koppelaufbaus wurde der Koppelabstand in einer vollautomatischen Messung schrittweise erniedrigt. Nach jedem Schritt detektierte das Oszilloskop eine zeitaufgelöste Transmissionskurve. Die aufgenommenen Datenpunkte sind in Abbildung (2.17) farblich markiert dargestellt. Die in die Koppelfaser eingestrahlte Leistung betrug etwa  $2 \mu\text{W}$ .

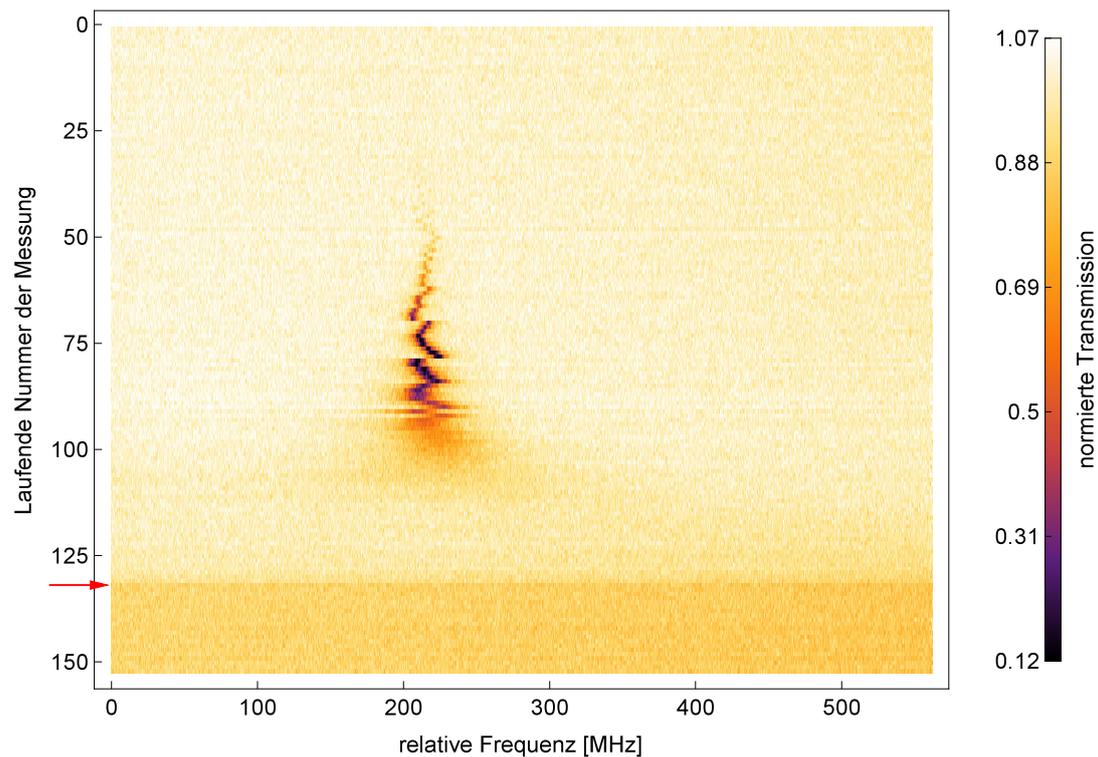


Abbildung 2.17: Einfluss des Koppelabstands auf die Resonanzkurve einer Flaschenmode. Der Abstand verringert sich mit aufsteigender Nummer der Messung ( $y$ -Achse). Er ist gegen die relative Frequenz des Lasers aufgetragen ( $x$ -Achse). Die Transmission auf Resonanz variiert mit dem Abstand, bis die Koppelfaser den Resonator berührt (roter Pfeil).

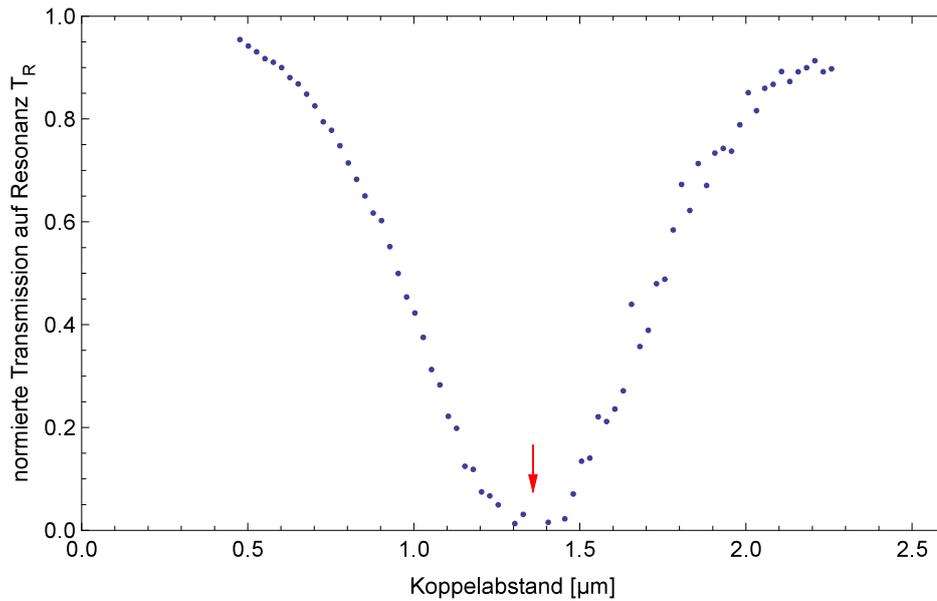


Abbildung 2.18: Minimale normierte Transmission auf Resonanz  $T_R$ , gegen den Koppelabstand aufgetragen. Der Fehler des Abstands ist zur Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet. Das Minimum kennzeichnet den Punkt kritischer Kopplung bei etwa  $1,35 \mu\text{m}$  (roter Pfeil).

Zur Auswertung der genommenen Datenreihen wurde jede Einzelmessung mit einem Lorentzprofil gefittet und aus Formel (2.16) der Koppelfaktor  $K$  bestimmt. Die Messungen, bei denen kein Fit möglich war, sind in den folgenden Abbildungen ausgelassen. Bei sehr großen und sehr kleinen Koppelabständen ( $K \ll 1$  bzw.  $K \gg 1$ ) ist das Rauschen des Photodiodensignals viel größer als die Tiefe der Transmissionskurve der Resonatormode. Ein Fit ist in diesen Bereichen nicht möglich.

Sehr deutlich erkennbar in Abbildung (2.17) ist die Veränderung der Transmission durch die Koppelfaser mit dem Abstand. Die Kopplung steigt mit der Nummer der Messung weiter an, bis sich die Fasern berühren.

In Abbildung (2.18) ist jeweils die minimale normierte Transmission der Resonanzkurve gegen den Abstand aufgetragen. Die Datenpunkte sind auf die mittlere Transmission bei starker Verstimmung der Resonanzfrequenz normiert. Deutlich ist mit sinkendem Abstand eine Abnahme der Transmission erkennbar. Der Resonator ist folglich unterkopplert. Das Minimum kennzeichnet den Punkt kritischer Kopplung bei einem Abstand von etwa  $1,3 \mu\text{m}$ . Noch kleinere Abstände führen zu einer Überkopplung des Resonators und die Transmission steigt erneut an, bis schließlich die Koppelfaser den Resonator berührt. Sind beide Fasern in Kontakt, haften sie aneinander. Die Trennung von Koppelfaser und Resonator hat eine Beschädigung der Faseroberflächen zur Folge, was die Güte mindern kann.

Die Abstände von Resonator und Koppelfaser wurden aus der angelegten Spannung an den Abstandspiezoaktuator gewonnen. Wichtig bei dieser Reskalierung ist, dass produktionsbedingt der maximale Stellweg des piezoelektrischen Aktuators mit einem Fehler von  $\pm 20\%$  variiert. Da er nicht über eine aktive Rückkopplung verfügt, zeigt er zudem ein

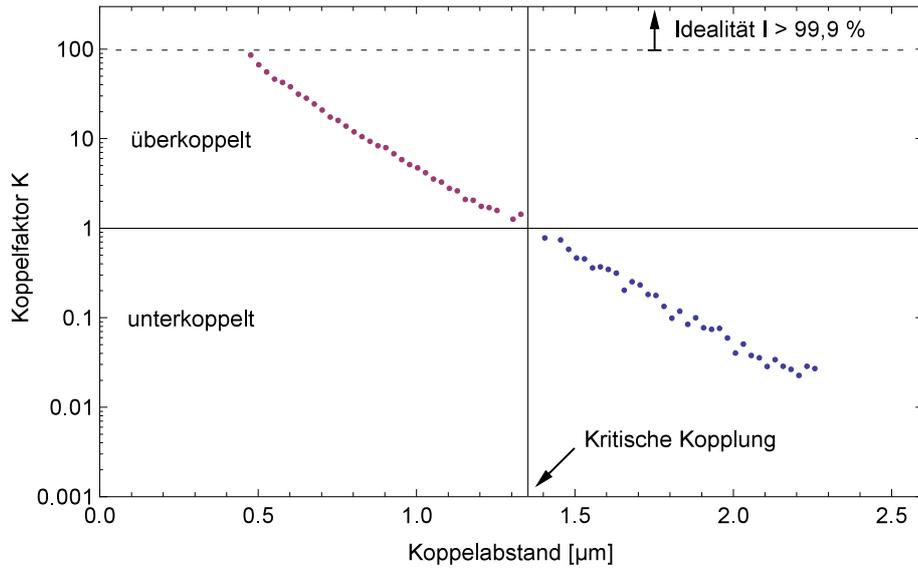


Abbildung 2.19: Der Koppelfaktor gegen Koppelabstand aufgetragen. Die ermittelte Idealität beträgt  $I \geq 99,9\%$ . Der Fehler des Abstands ist zur Übersichtlichkeit nicht eingezeichnet.

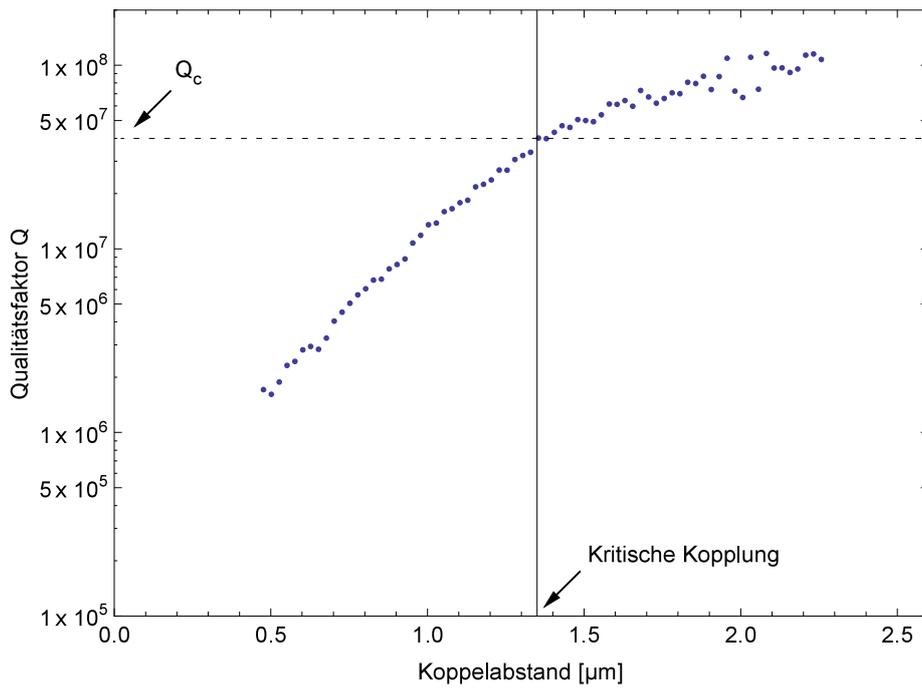


Abbildung 2.20: Die Abnahme des Gütefaktors bei kleiner werdendem Koppelabstand durch Erhöhung der Auskoppelverluste. Die Güte bei kritischer Kopplung beträgt circa  $Q = 4 \cdot 10^7$ .

starkes Drift- und Hystereseverhalten, was seine absolute Einstellgenauigkeit weiter reduziert. Eine Aussage über die relative Entfernung von Koppelfaser zum Resonator, mittels angelegter Piezospannung, ist damit nur bedingt möglich. Laut Herstellerangaben lässt der Piezoantrieb einen Rückschluss seiner Auslenkung über die angelegte Spannung mit einem maximalen Fehler von  $\pm 35\%$  zu.

Bei der obigen Messung diente ein standardisierter Messablauf zur Verringerung der Hysterese- und Drifteffekte. Vor jeder Messung wurde der piezoelektrische Aktuator voll ausgelenkt anschließend seine Betriebsspannung auf die Hälfte reduziert. Erst nach einer Wartezeit von etwa fünf Minuten startete die Messung, um das Driftverhalten zu verbessern. Vernachlässigt man die Hystereseeffekte und Driften während der Messung, so folgt ein systematischer Fehler von  $\Delta x_p = \pm 20\%$ .

Bei sehr kleinen Koppelabständen berührt die Koppelfaser den Resonator aufgrund von Vibrationen oder elektrostatischer Anziehung, wie in Abbildung (2.17) zu sehen ist. Die Messung ist dadurch bis zu einem gewissen Minimalabstand limitiert. Dies erhöht den Fehler des Abstands um einen weiteren systematisch bedingten Anteil. Er wird auf  $\Delta x_k = \pm 500$  nm abgeschätzt. Der Fehler  $\Delta x$  geht bei den folgenden Messungen nicht ein, und wird daher nicht näher berechnet.

Aus der normierten minimalen Transmission folgt die Kopplungskonstante nach Formel (2.16), Abbildung (2.19) zeigt die Messpunkte. Der funktionale Zusammenhang zwischen Abstand und Koppelfaktor zeichnet sich trotz des großen Fehlers in der Abstandssache sehr deutlich ab. Aus dem Punkt mit dem höchsten Wert für  $K$  folgt die Idealität der Kopplung.

Bei noch niedrigeren Abständen, als für die eingetragenen Messpunkte, erwartet man den in Abschnitt (2.5.1) beschriebenen roll-off Effekt durch parasitäre Kopplung. Das ist in Abbildung (2.19) nicht zu sehen, da die Koppelfaser schon vor Eintreten des roll-off den Resonator berührt. Die Abbildung liefert jedoch eine untere Grenze für die Idealität von  $I \geq 99,9\%$ . Das zeigt eine fast ideale Kopplung zweier Moden ohne nennenswerte Verluste durch den Kopplungsmechanismus selbst.

Neben dem Koppelfaktor verändert sich durch verstärkte Auskoppelverluste auch die Güte der Mode. Die Reduzierung der Güte im Zusammenhang mit kleiner werdendem Koppelabstand manifestiert sich in den aufgenommenen Messwerten in Abbildung (2.17) durch eine deutliche Linienverbreiterung. Aus der Linienbreite folgt nach Formel (2.26) direkt der Gütefaktor. Den Zusammenhang des Gütefaktors mit dem Koppelabstand zeigt Abbildung (2.20). Die starke Streuung der Messwerte bei großen Koppelabständen erklärt sich ebenfalls durch das Rauschen des Photodiodensignals. Die Transmissionskurve ist bei kleinen Abständen nicht markant genug, um die Breite zuverlässig zu bestimmen. Daher rühren die starke Abweichungen bei größeren Abständen. Die erwartete Abnahme der Güte zeigt sich jedoch deutlich. Der Gütefaktor bei kritischer Kopplung beträgt  $Q_c \approx 4 \cdot 10^7$ . Das entspricht somit einer intrinsischen Güte von etwa  $Q_0 \approx 2 \cdot Q_c = 8 \cdot 10^7$ , was sich ebenfalls im Kurvenverlauf widerspiegelt.



### 3 Kopplung von Resonatormoden

Koppelt eine Flüstergaleriemode an eine Wellenleitermode, so unterteilt man die Kopplung in einen überkoppelten und einen unterkoppelten Bereich. Die beteiligten Energieverlust- und Energiegewinnraten, die die Resonatormode erfährt, entsprechen dabei charakteristischen Zeitkonstanten. Ist die Zeitkonstante  $\tau_{\text{Koppel}}$  der Kopplung kleiner, als die Zeitkonstante der intrinsischen Verluste  $\tau_{\text{Verlust}}$ , spricht man von Überkopplung. Anschaulich ist die Zeit, die bis zur Auskopplung eines Photons vergeht, im Mittel kleiner als die Zeit, die bis zu seiner Vernichtung durch intrinsische Verluste verstreicht. Entsprechendes gilt umgekehrt für den unterkoppelten Bereich.

Eine ähnliche Einordnung trifft man auch bei gekoppelten Resonatormoden. Ihre Wechselwirkung führt ebenfalls zu einem Energieaustausch, der gewissen Verlustfaktoren unterliegt. Auch hier lassen sich die Energieverlust- und Energiegewinnamplituden der Moden mit charakteristischen Zeitkonstanten ausdrücken. Ist die Zeitkonstante des Energieaustauschs  $\tau_{\text{Koppel}}$  viel kleiner, als die Zeitkonstante der Verlustamplitude  $\tau_{\text{Verlust}}$ , so spricht man vom Bereich der *starken Kopplung*. Anschaulich heißt das, dass das Licht mehrfach zwischen den Moden ausgetauscht wird, bevor es durch Dämpfung oder Streuung verloren geht.

Damit es überhaupt zu einer Kopplung kommt, müssen selbstverständlich die Bedingungen aus Abschnitt (2.5.1) erfüllt sein. Neben der Polarisation und dem räumlichen Überlapp müssen die Wellenvektoren beider Moden übereinstimmen (*Phasenanpassung*). Insbesondere muss das ausgetauschte Licht resonant für beide Moden sein, wenn es zu einer Kopplung kommen soll.

Die Resonanzfrequenz ist jedoch keine diskrete Größe, sondern besitzt eine spektrale Breite. Diese ist durch die Güte der Mode und damit durch die entsprechende Zeitkonstante der intrinsischen Verluste bestimmt. Die Kopplung hängt folglich vom Überlapp der Resonanzkurven beider Moden ab. Sind sie nicht gegeneinander verstimmt, ist die Bedingung der Phasenanpassung bestmöglich erfüllt.

Für die gekoppelten Resonatormoden lassen sich genauso, wie für die Kopplung einer Resonator- und einer Wellenleitermode in Gleichung (2.12), Energiebilanzgleichungen aufstellen. Es resultiert ein System aus zwei Ratengleichungen, die durch eine Energieaustauschamplitude  $1/\gamma$  verknüpft sind. Es handelt sich um ein System aus zwei gekoppelten Differentialgleichungen. Aus der Lösung dieses Gleichungssystems, ergeben sich zwei neue Normalmoden für das gekoppelte System, die bezüglich ihrer Frequenz aufgespalten sind. Je stärker die Kopplungskonstante beider Moden ist, umso größer ist auch die Aufspaltung. Die spektrale Breite der beiden Normalmoden bestimmen nach wie vor die Zeitkonstante der intrinsischen Verluste, die die Moden erfahren.

Im Fall starker Kopplung ist die spektrale Breite der Resonanzkurven viel kleiner, als die Aufspaltung. Mit größerem Überlapp, zum Beispiel durch eine gezielte Abstimmung der Moden, erhöht sich deren Kopplung. Das steigert jedoch wiederum die Aufspaltung der

Moden, die immer mehr den Charakter eines stark gekoppelten Systems annehmen. Dieser Effekt ist so stark, dass sich die Resonanzkurven beider Moden nie vollständig überlagern. Dieses Phänomen ist als vermiedene Kreuzung (engl. *Anticrossing*) bekannt und ist ein hinreichendes Indiz für die Existenz einer starken Kopplung.

Davon unterscheidet sich der Bereich der *schwachen Kopplung*, in dem es nicht zu einem solchen Effekt kommt. Die Verlustzeitkonstante der Moden ist kleiner als die Zeitkonstante der Kopplung. Das Licht geht also schneller verloren, als es zwischen den Moden ausgetauscht wird. Eine Kopplung kommt daher nicht zu Stande und ein Anticrossing ist nicht beobachtbar.

### Methoden der Modenkopplung

Es gibt unterschiedliche Methoden, verschiedene Moden miteinander wechselwirken zu lassen. Dabei kann es sich um Moden innerhalb eines einzelnen Resonators handeln, oder um Moden unterschiedlicher Resonatoren.

Innerhalb eines Resonators führen kohärente Streuprozesse zur Kopplung unterschiedlicher Moden. Dabei unterscheidet man zwei Fälle:

- Die Kopplung gegenläufiger Moden gleicher Quantenzahlen durch kohärente Rückstreuung an Inhomogenitäten der Resonatoroberfläche und des Resonatormaterials [43].
- Die Kopplung von Moden unterschiedlicher Polarisierung und Quantenzahl durch nicht-polarisationserhaltende Streuung [47].

Während diese beiden Kopplungsmechanismen auf den inhärenten Eigenschaften des verwendeten Materials beruhen, muss die Kopplung unterschiedlicher Resonatoren durch eine geeignete Anordnung der Resonatoren geschehen. Auch hier existieren zwei unterschiedliche Möglichkeiten:

- Die transmittive Kopplung von Resonatormoden.
- Die reflektive Kopplung durch Nutzbarmachung der kohärenten Rückstreuung innerhalb eines Resonators.

Im Folgenden werden die unterschiedlichen Kopplungsmechanismen zunächst theoretisch untersucht und mit experimentell ermittelten Ergebnissen verglichen.

## 3.1 Modenkopplung im einzelnen Flüstergalerieresonator

### 3.1.1 Modenkopplung gegenläufiger Moden

Allen Flüstergalerie-Resonatoren ist gemein, dass sie einer Rotationssymmetrie bezüglich der Resonatorachse unterliegen. Aufgrund dieser Symmetrie gibt es eine zweifache Entartung einer Resonatormode, welche durch die Quantenzahlen  $(m, q)$  festgelegt ist. Sie kann gegen oder mit dem Uhrzeigersinn in einem Resonator umlaufen. Um eine Mode vollständig zu beschreiben, bedarf es also neben den Quantenzahlen  $(m, q)$  einer zusätzlichen Festlegung des Umlaufsinn. Gegen den Uhrzeigersinn laufende Moden tragen die

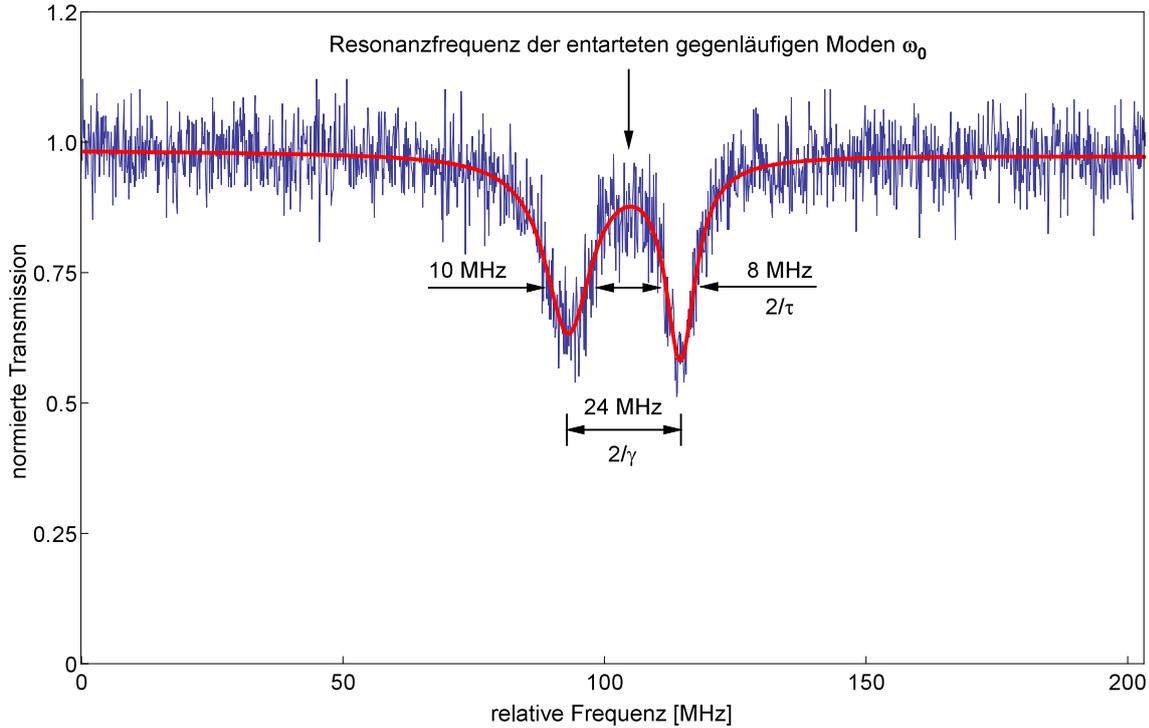


Abbildung 3.1: Eine durch Kopplung gegenläufiger Moden aufgesplante Resonanzkurve eines Resonators mit einem Durchmesser von  $2r_0 = 35 \mu\text{m}$ , gekoppelt an eine Koppelfaser mit  $500 \text{ nm}$  Durchmesser. Die intrinsische Güte der angeregten Moden beträgt etwa  $Q_0 \approx 5 \cdot 10^7$  und wurde aus der Linienbreite bestimmt. Die ungleiche spektrale Breite der Moden erfolgt aufgrund einer unterschiedlichen Intensitätsverteilung beider Moden.

Bezeichnung *ccw* (engl. counterclockwise) und mit dem Uhrzeigersinn laufende Moden heißen *cw* (engl. clockwise) [43].

Beide Moden  $(m, q, cw)$  und  $(m, q, ccw)$  sind Eigenfunktionen (Normalmoden) der Helmholtzgleichung (1.7). Sie unterliegen dem Superpositionsprinzip und beeinflussen sich deswegen gegenseitig nicht. Die Rotationssymmetrie des Resonators schreibt ihnen gleiche Eigenfrequenzen zu.

Um diese Entartung aufzuheben bedarf es entweder einer Symmetriebrechung<sup>1</sup>, der Aufhebung des Superpositionsprinzips durch Nichtlinearitäten oder durch Kopplung der gegenläufigen Moden. Die Kopplung lässt die Symmetrie des Resonators unberührt, verbindet aber die beiden Moden zu einem Gesamtsystem. Existiert eine starke Kopplung, führt das zu zwei neuen Normalmoden mit jeweils neuen Eigenfrequenzen. Diese sind gegenüber der ursprünglich entarteten Resonanzfrequenz beider ungekoppelter Moden symmetrisch aufgespalten. Abbildung (3.1) zeigt die typische Doppelstruktur eines stark gekoppelten Systems zweier gegenläufiger Moden. Es handelt sich um das Transmissionssignal einer verjüngten Faser, die an den Resonator gekoppelt wurde.

<sup>1</sup>Eine Rotation des Gesamtsystems aus Resonator und Koppelfaser um die Resonatorachse bricht z.B. die Symmetrie, indem sie den Moden eine unterschiedliche Umlaufzeit aufprägt. Das führt zu einer verschobenen Resonanzbedingung, abhängig vom Umlaufsinn.

Ein Flaschenresonator weist stets Unregelmäßigkeiten der Oberfläche und Inhomogenitäten des Resonatormaterials auf. Diese haben typischerweise eine Ausdehnung, die kleiner als die Wellenlänge des im Resonator zirkulierenden Lichts ist [43]. Sie verursachen zunächst Streuung und Dämpfung, die einer Mode Verluste zufügen und so die Güte mindern. Ein gewisser Anteil des gestreuten Lichts wird jedoch kohärent in die gegenläufige Mode zurück gestreut [43], was schließlich zur Kopplung führt.

Um die Wechselwirkung zweier gekoppelter Moden zu modellieren, wird analog zu (2.12) eine Bilanzgleichung der komplexwertigen Amplituden angesetzt [48]. Die Kopplung an die Koppelfaser  $\kappa_0$  wird als unabhängig vom Umlaufsinn angenommen, wie in Abschnitt (2.5.1) begründet ist. Die intrinsischen Verluste fasst die Konstante  $\sigma_0$  zusammen. Anstatt den Kopplungamplituden  $\kappa_0$  und  $\sigma_0$  sind hier die korrespondierenden Zeitkonstanten eingesetzt. Dabei gelten die folgenden Entsprechungen:

$$\frac{1}{\sigma_0^2} = \tau_{\text{ex}}, \quad (3.1)$$

$$\frac{1}{\kappa_0^2} = \tau_0. \quad (3.2)$$

Die Bilanzgleichungen lauten somit wie folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} a_{cw} &= i\Delta\omega \cdot a_{cw} - \left( \frac{1}{2\tau_0} + \frac{1}{2\tau_{\text{ex}}} \right) \cdot a_{cw} + \frac{1}{2\gamma_{12}} \cdot a_{ccw} + \kappa_0 \cdot s, \\ \frac{d}{dt} a_{ccw} &= i\Delta\omega \cdot a_{ccw} - \left( \frac{1}{2\tau_0} + \frac{1}{2\tau_{\text{ex}}} \right) \cdot a_{ccw} + \frac{1}{2\gamma_{21}} \cdot a_{cw}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

In diesem Modell werden stattdessen der Energieamplitude  $A$  die komplexwertigen Amplituden  $a_{cw}$  und  $a_{ccw}$  der im und gegen den Uhrzeigersinn laufenden Moden benutzt. Das treibende Lichtfeld des Lasers ist gegenüber der Resonanzfrequenz  $\omega_0$  der entarteten Resonatormoden um  $\Delta\omega$  verstimmt. Die Variable  $s$  repräsentiert die Feldamplitude der Wellenleitermode,  $S = |s|^2$  ist die normierte propagierende Leistung.

Die durch kohärente Rückstreuung induzierte Kopplung zwischen den gegenläufigen Moden wird mit der Konstante  $\gamma$  festgesetzt, wobei die Indizes  $12$  und  $21$  die Start- und Endmode angeben. Die Zeitkonstanten  $\tau_{\text{ex}}$  und  $\tau_0$  unterscheiden sich von  $\gamma$  dahingehend, dass sie tatsächliche dissipative Verluste beschreiben, die beiden Moden Energie entziehen. Die Konstante  $\gamma$  lässt die Gesamtenergie des Systems unverändert und beschreibt einen Energietransfer zwischen den Moden. Man fasst daher die dissipativen Verluste in einer gesamten Verlustzeitkonstante zusammen:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} + \frac{1}{\tau_{\text{ex}}} \quad (3.4)$$

zusammen.

Die Differentialgleichungen (3.3) können weiter vereinfacht werden, wenn der Energieerhaltungssatz vorausgesetzt wird, aus dem sich zwei Aussagen ableiten lassen:

- Die Gesamtverluste werden durch Auskopplung, Streuung oder Dämpfung verursacht.

- Die Streuung in die jeweils gegenläufige Mode lässt die Gesamtenergie unverändert.

Daraus lassen sich die folgenden zwei Ausdrücke konstruieren [43]:

$$\frac{d}{dt} \left( |a_{cw}|^2 + |a_{ccw}|^2 \right) + \left( |a_{cw}|^2 + |a_{ccw}|^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{2\tau_0} + \frac{1}{2\tau_{ex}} \right) = 0, \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{2\gamma_{12}} a_{ccw} a_{cw}^* + \frac{1}{2\gamma_{12}^*} a_{ccw}^* a_{cw} + \frac{1}{2\gamma_{21}^*} a_{cw}^* a_{ccw} + \frac{1}{2\gamma_{21}} a_{cw} a_{ccw}^* = 0. \quad (3.6)$$

Aus beiden Gleichungen leiten sich die Bedingungen  $\gamma_{12} = -\gamma_{21}^*$  und  $\gamma_{21} = -\gamma_{12}^*$  ab. Das ist dann der Fall, wenn  $\gamma_{21}$  und  $\gamma_{12}$  rein imaginär und betragsmäßig gleich sind. Die Konstanten  $\gamma_{12}$  und  $\gamma_{21}$  sind frei wählbar, daher wird  $\gamma_{21} = -i \cdot \gamma$  gesetzt.

Interessant dabei ist, dass ein Phasenfaktor  $\phi = \pi/2$  mit  $e^{i\phi} = i$  beim Übergang zwischen den Moden die Phase des Lichts verschiebt. Das ist analog zu der Kopplung zwischen Faser- und Resonatormoden in Abschnitt (2.12), wobei ebenfalls eine solche Phasenverschiebung beteiligt ist.

Auf die vollständige Lösung der Gleichungen (3.3) wird hier verzichtet und nur die Gleichgewichtslösung ( $da/dt = 0$ ) aus Referenz [43] angegeben:

$$a_{cw} = \kappa s \cdot \frac{i\Delta\omega + \frac{1}{\tau}}{-\Delta\omega^2 - \gamma^2 + \frac{1}{\tau^2} + i\Delta\omega \cdot \frac{1}{\tau}}, \quad (3.7)$$

$$a_{ccw} = \kappa s \cdot \frac{-2i\gamma}{-\Delta\omega^2 - \gamma^2 + \frac{1}{\tau^2} + i\Delta\omega \cdot \frac{1}{\tau}}. \quad (3.8)$$

Die neuen Normalmoden setzen sich nun aus symmetrischen und antisymmetrischen Superpositionen der ursprünglich entarteten Eigenmoden des ungekoppelten Falles zusammen:

$$u_s = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{cw} + a_{ccw}), \quad (3.9)$$

$$u_{as} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_{cw} - a_{ccw}). \quad (3.10)$$

Löst man nach den Eigenfrequenzen der neuen Normalmode auf, so erhält man zwei Lösungen unterschiedlicher Eigenfrequenz, welche symmetrisch um die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  verteilt liegen. Man findet [43]:

$$\omega = \omega_0 \pm \frac{1}{\gamma}. \quad (3.11)$$

Die neuen Resonanzfrequenzen haben jeweils eine Breite von  $1/\tau$ , da die Kopplungszeitkonstante  $\gamma$  die Energie für das Gesamtsystem erhält. Die Koppelamplitude hebt die Entartung der gegenläufigen Moden auf und ruft eine Aufspaltung um  $1/\gamma$  hervor. Die dissipativen Gesamtverluste beider Moden sind nach wie vor durch die Auskoppel- und Dämpfungsverluste  $\kappa^2 = 1/\tau$  der beteiligten Moden begründet.

Diese theoretische Betrachtung gibt die experimentellen Befunde nicht vollständig wieder, da sie die Asymmetrie der Kurvenbreiten in Abbildung (3.1) nicht erklären. Die Moden  $u_s$  und  $u_{as}$  entsprechen zueinander orthogonalen Stehwellen, deren azimuthale Wellenfunktion durch  $(\sin(m\phi), \cos(m\phi))$  beschrieben ist. Beide sind um  $\pi/2$  phasenverschoben, somit ist die Intensitätsverteilung beider Moden ebenfalls phasenverschoben. Die ungleichmäßig verteilten Streuzentren im Resonator fügen den Moden unterschiedlich starke Umlaufverluste  $\sigma$  zu. So erklären sich die unterschiedlichen Resonanzkurvenbreiten.

### Rückreflexion durch Kopplung gegenläufiger Moden

Die Kopplung des Resonators an einen externen Wellenleiter ist unabhängig von der Umlaufrichtung seiner Moden, da das System einer Spiegelsymmetrie unterliegt. Das hat zur Folge, dass eine durch Streuung angeregte gegenläufige Mode ebenfalls in den Wellenleiter auskoppelt. Im Wellenleiter läuft diese dann der anregenden Fasermode entgegen. Die Kopplung gegenläufiger Moden führt so zu einer teilweisen Reflexion des in den Resonator eingekoppelten Lichts. Der an den Wellenleiter gekoppelte Resonator kann als eine Art Spiegel mit frequenzabhängigen Reflexionskoeffizient  $R$  angesehen werden. Von dieser Eigenschaft wird im Rahmen der reflektiven Kopplung von Moden unterschiedlicher Resonatoren in Abschnitt (3.2.3) Gebrauch gemacht.

Die Reflexion führt zu einer modifizierten Bedingung für kritische Kopplung. Das reflektierte Licht propagiert in einer der anregenden Fasermode entgegengesetzten Mode. Es kann nicht mehr destruktiv mit dem nicht in den Resonator eingekoppelten Anteil  $t$  interferieren. Damit es zu einer Auslöschung der gesamten Transmission kommt, muss dieser Verlust durch eine stärkere Kopplung kompensiert werden.

Eine Formel für die Intensitätsreflexion findet sich in Referenz [43]. Um die Berechnung der Rückreflexion zu erleichtern, führt man den normierten Kopplungsparameter  $\Gamma$  ein:

$$\Gamma = \frac{\tau_0}{\gamma}. \quad (3.12)$$

Der Koppelparameter  $K$  aus Gleichung (2.14) lässt sich statt mit den Kopplungsamplituden mit Hilfe der entsprechenden Zeitkonstanten ausdrücken:

$$K = \frac{\tau_{ex}}{\tau_0}. \quad (3.13)$$

Mit Hilfe dieser beiden Definitionen und der normierten Frequenzverstimmung  $\Delta\varpi = \Delta\omega\tau_0$  ergibt sich der Intensitätstransmissions- und Intensitätsreflexionskoeffizient zu:

$$T(\Delta\varpi, \Gamma, K) = \left| \frac{\Gamma^2 + (1 - K)(1 + K) - \Delta\varpi^2 + 2i\Delta\varpi}{\Gamma^2 + (1 + K)^2 + 2i\Delta\varpi} \right|^2, \quad (3.14)$$

$$R(\Delta\varpi, \Gamma, K) = \left| \frac{2\Gamma K}{\Gamma^2 + (1 + K)^2 + 2i\Delta\varpi} \right|^2. \quad (3.15)$$

Kritische Kopplung zeichnet sich durch eine verschwindende Transmission bei Resonanz aus ( $T(\Delta\varpi = 0) = T_R = 0$ ). Die ursprünglich angeregte Mode (ccw) verliert aber durch die Modenkopplung Energie in die gegenläufige Mode (cw), die in entgegengesetzter Richtung zur ursprünglichen Fasermode auskoppelt. Der Punkt kritischer Kopplung verschiebt sich und ist nicht mehr durch  $K = 1$  gekennzeichnet. Aus Gleichung (3.14) folgt eine modifizierte Bedingung für kritische Kopplung:

$$K_{\text{crit,mod}} = \sqrt{1 + \Gamma^2}. \quad (3.16)$$

Der Punkt kritischer Kopplung koinzidiert mit einer maximalen Rückreflexion. Es ergibt sich bei kritischer Kopplung ( $K = K_{\text{crit}}$ ) auf dem Zentralwert der Resonanzkurve ( $\Delta\varpi = 0$ ) ein maximaler Leistungsreflexionskoeffizient von:

$$R_{\text{max}} = \left( \frac{\Gamma}{1 + \sqrt{1 + \Gamma^2}} \right)^2. \quad (3.17)$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Rückstreuung eine zwingende Voraussetzung für Reflexion ist. Ein idealer Resonator ( $\Gamma = 0$ ) reflektiert kein Licht, sondern dissipiert es bei kritischer Kopplung vollständig. Für den Grenzfall sehr großer Modenkopplung ( $\Gamma \gg 1$ ) strebt die Intensitätsreflexion gegen Eins.

### 3.1.2 Kopplung von Moden unterschiedlicher Polarisation

Von allen Streuverlusten, die eine Mode erfährt, macht die kohärente Rückstreuung nur einen gewissen Anteil aus. Der restliche Teil des Lichts wird in andere Raumrichtungen gestreut, unter anderem auch in Vorwärtsrichtung. Solche Prozesse müssen nicht polarisationserhaltend sein, was die Kopplung von Moden unterschiedlicher Polarisation erlaubt. Die theoretische Behandlung der Flaschenmoden im Anhang (A) berücksichtigt nur die transversal-elektrische Polarisation (*TE-Polarisation*). Jedoch existiert auch jeweils für die transversal-magnetische Polarisation (*TM-Polarisation*) eine Lösung der Helmholtz-Gleichung (A.2). Sind dabei die Bedingungen für Modenkopplung in Abschnitt (2.5.1) erfüllt, so stellt sich durch Streuung zwischen Moden unterschiedlicher Polarisation ebenfalls eine Kopplung ein.

Mechanische Spannung führt in Glas zu einer Veränderung des Brechungsindex. In Flüstergalerieresonatoren, die durch mechanische Spannung abgestimmt werden, ist die Brechzahl entsprechend der Zugspannung anisotrop. Das führt zu einem polarisationsabhängigen effektiven Brechungsindex, den eine Mode erfährt. Die relative Änderung des Brechungsindex bei veränderlicher Zugspannung ist somit ebenfalls polarisationsabhängig. Die Moden reagieren demnach unterschiedlich stark auf mechanische Abstimmung.

Dieser Effekt lässt sich gezielt ausnutzen, um einen Überlapp der Resonanzlinien zweier unterschiedlich polarisierter Moden herbeizuführen. Die Kopplung ist also im Gegensatz zur Kopplung gegenläufiger Moden durch die angelegte mechanische Spannung einstellbar.

Die Kopplung unterschiedlich polarisierter Flüstergaleriemoden wurde bereits im Zusammenhang mit Mikrokugel-Resonatoren beschrieben [36]. Die beobachteten unterschiedlich polarisierten Moden verstimmten sich wie erwartet verschieden stark mit steigender Zugspannung, die eine Vergrößerung der Doppelbrechung zur Folge hatte [49].

Um diese Art der Modenkopplung in Flaschenresonatoren zu erreichen, wurde im Rahmen dieser Arbeit ein vergleichbares Experiment durchgeführt. Moden eines Flaschenresonators wurde mit einer Koppelfaser angeregt und der Einfluß der Polarisation auf die Kopplung der Moden untersucht.

Das Modenspektrum des Flaschenresonators verändert sich mit Drehung der Polarisation des in die Koppelfaser eingestrahlten Lichts. Bei geeigneter Wahl der Polarisation lassen sich einzelne Moden bei unverändertem Koppelabstand in ihrer Anregung vollständig unterdrücken oder noch effizienter anregen. Daraus folgt, dass analog zu Mikrokugeln Moden unterschiedlicher Polarisation vorliegen müssen. Eine Polarisationsfehlانpassung führt zu einer Unterdrückung der Kopplung.

Mit dem in Abbildung (2.14) vorgestellten Resonatorhalter wurde durch die Zugspannung der Resonatorfaser so weit verstimmt, bis sich eine Kreuzung der Resonanzkurven zweier Moden zeigte. Ein Funktionsgenerator diente als variable Präzisions-Konstantspannungsquelle, um den Kreuzungspunkt zweier Moden über die Spannung der piezoelektrischen

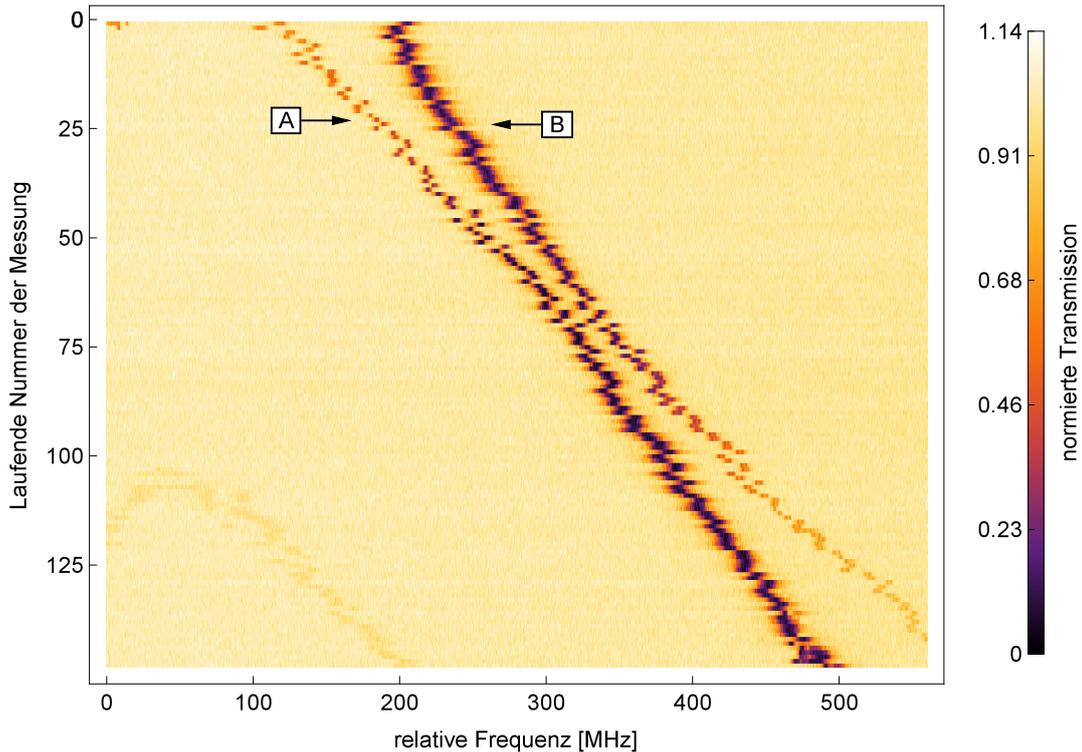


Abbildung 3.2: Zwei koppelnde Moden unterschiedlicher Polarisation. Mit steigender Nummer der Messung ( $y$ -Achse) wurde die auf den Resonator wirkende Zugspannung erhöht. Die  $x$ -Koordinate zeigt die Verstimmung des anregenden Lasers relativ zur Mitte des Verstimmbereichs. Die Resonanzen laufen zunächst mit steigender mechanischer Spannung zusammen, um dann wieder ihren Abstand zu vergrößern. An der Kopplungsstärke und Linienbreite ist jede Mode eindeutig bestimmbar. Erkennbar ist, dass sie sich überkreuzt haben müssen.

Biegeaktoren einzustellen. Einige der beobachteten Moden zeigten ein Anticrossing ihrer Resonanzkurven, was ein eindeutiger Beweis für eine starke Kopplung ist.

Abbildung (3.2) zeigt die Aufnahme zweier Moden unter dem Einfluß einer mechanischen Verstimmung, die eine starke Kopplung eingehen. Ihre Polarisation ist unterschiedlich, was durch eine Veränderung der eingestrahelten Polarisation überprüft wurde. Während die Polarisationsdrehung die Kopplung der einen Mode verstärkt, erniedrigt sie die Kopplung der anderen. Die Polarisation wurde bewusst so gewählt, dass beide Moden damit unterschiedlich stark angeregt sind. Nur dann kann die spektrale Position beider Moden mittels einer Kurvenanpassung eindeutig bestimmt werden. Dies ist jedoch keine zwingende Voraussetzung für eine starke Kopplung. Wäre eine Mode aufgrund unpassender Polarisation nicht angeregt, so würde sie beim Überlapp mit einer angeregten Mode im Transmissionssignal der Faser sichtbar, sofern beide Moden eine starke Kopplung eingehen.

Die Spannung der Biegeaktoren erhöhte sich bei dem durchgeführten Experiment in 150 Schritten mit einem zeitlichen Abstand von etwa einer Sekunde um insgesamt 100 mV. Das in den vorher durchgeführten Experimenten verwendete Oszilloskop diente ebenfalls

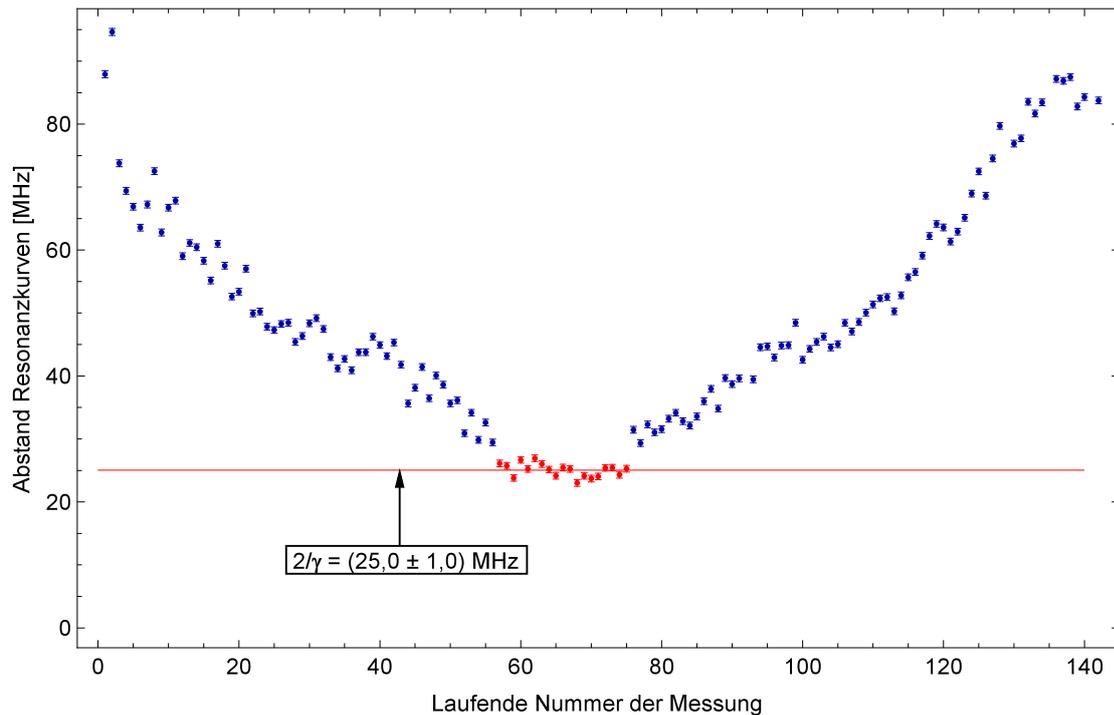


Abbildung 3.3: Ermittelte Abstände der Resonanzkurvenminima aus Abbildung (3.2). Deutlich ist ein Anticrossing erkennbar, das auf eine starke Kopplung hinweist. Der aus den roten Punkten berechnete Mittelwert ergibt eine Kopplung von  $2/\gamma = (25,0 \pm 1,0) \text{ MHz}$ .

zum Auslesen der Photodiodenspannung. Jede Messung enthält jeweils  $10^4$  Datenpunkte. Die Resonanzkurven der Moden wurde mit Hilfe der in Abschnitt (2.5.4) beschriebenen Computeralgebrasoftware ausgewertet. Jede Einzelmessung wurde mit einer Kurvenanpassungsroutine ausgewertet und damit die Breite und Position der Resonanzkurven bestimmt. Die berechneten Güten belaufen sich auf  $Q_A \approx 10^8$  und  $Q_B \approx 3 \cdot 10^7$ , der Unterschied liegt in der unterschiedlich starken Kopplung begründet. Die Polarisationsanpassung beider Moden ist unterschiedlich gut und der räumliche Überlapp mit der Fasermode verschieden groß. Während Mode A unterkoppelt ist, ist Mode B in etwa kritisch gekoppelt.

Den gemessenen Verlauf des Abstands der Resonanzkurvenzentren zeigt Abbildung (3.3). Es ist deutlich erkennbar, dass der Abstand der Resonanzen ein Minimum zeigt. Das beweist eine starke Kopplung beider Moden.

Die Fehler der einzelnen Datenpunkte ergeben sich aus der begrenzten Messgenauigkeit der Etalonlänge ( $\Delta L = 2 \text{ mm}$ ) und dem Fehler der Kurvenanpassung.

Die kleinsten gemessenen Frequenzabstände dienen zur Ermittlung des Mittelwerts von  $\Delta\nu = (25,0 \pm 1,0) \text{ MHz}$ .

## 3.2 Modenkopplung räumlich getrennter Flaschenresonatoren

Der vorangegangene Abschnitt behandelt die Kopplung zweier Moden innerhalb eines einzelnen Resonators durch Streuung. Die Stärke der Streuung und damit die Kopplung ist

durch die Eigenschaften des Resonatormaterials, des Herstellungsprozesses und der Resonatorgeometrie festgelegt. Sie lässt sich aus diesem Grund nicht direkt beeinflussen. Lediglich der spektrale Überlapp zweier Moden kann durch Abstimmung des Resonators gezielt herbeigeführt werden. Der räumliche Überlapp der Moden und deren gegenseitige Polarisationsanpassung ist festgelegt. Bei der Kopplung separierter Flaschenresonatoren unterliegt man nicht mehr diesen Einschränkungen. Da unterschiedliche Resonatoren einzeln abstimmbare und positionierbar sind, ist die Kopplungsstärke durch den räumlichen und spektralen Überlapp der Moden frei wählbar. Je nach Aufbau lässt sich die Polarisationsanpassung zusätzlich optimieren.

Es gibt zwei verschiedene Methoden, Resonatoren untereinander zu verbinden, entweder unmittelbar oder indirekt über einen Wellenleiter. Bei der unmittelbaren Kopplung sind die Resonatoren so dicht aneinander platziert, dass die Moden über ihre evaneszenten Felder wechselwirken. Die Stärke der Kopplung lässt sich durch den Spalt zwischen den Resonatoren frei einstellen. Solche Konstellationen wurden bereits theoretisch und experimentell intensiv untersucht [50, 51, 52, 53]. Besonders interessant sind dabei Ketten aus aneinandergeschlossenen Flüstergalerieresonatoren, die unter dem Namen *CROW* (*coupled resonator optical waveguides*) bekannt sind.

Es existieren auch Hybridsysteme aus unterschiedlichen Resonatortypen, die direkt aneinandergeschlossen sind. In [54] wurde zum Beispiel die Kopplung zwischen einem Mikrotorus und einem in der Mitte verzögerten faserbasierten Fabry-Pérot-Interferometer gezeigt. Ein solches FPI verfügt über zwei Bragg-Reflektoren, die mit lithografischen Methoden direkt in die Faser geschrieben sind. Die Faserstrecke dazwischen wurde in diesem Experiment verzögert und diente der Ankopplung einer Flüstergaleriemode eines Mikrotorus.

Auch Systeme, deren Resonatoren über einen verbindenden Wellenleiter geschaltet sind, finden sich in der Literatur, wurden aber bisher vorwiegend theoretisch untersucht [39, 55]. Wellenleiter, an die mehrere äquidistante Resonatoren seitlich geschaltet sind, heißen *SCISSOR* (*side coupled integrated spaced sequence of resonators*) [56]. Sie bieten unterschiedlichste Transmissionscharakteristika, die von den jeweiligen Eigenschaften und der Kopplungsstärke an die Resonatoren abhängt.

Es gibt bei der indirekten Modenkopplung zwei komplementäre Anordnungen. Die Kopplung kann in Vorwärtsrichtung (transmittiv) oder durch Ausnutzung der Reflexionseigenschaften der Resonatoren (reflektiv) erfolgen.

Diese Arbeit behandelt ausschließlich die indirekte Kopplung zweier Flaschenresonatoren. Sowohl die transmittive, als auch die reflektive Kopplung wird im Folgenden untersucht.

### 3.2.1 Transmittive Kopplung

In dieser Anordnung dienen allein die Transmissionseigenschaften eines Resonators zur Kopplung zweier Moden über einen gemeinsamen Wellenleiter. Ein bidirektionaler Energieaustausch zweier Moden ist nur dann möglich, wenn der gemeinsame Wellenleiter ringförmig geschlossen ist. Im Folgenden fungiert eine Glasfaser als verbindender Wellenleiter.

Der Glasfaserring selbst ist ein Laufwellenresonator, der ähnliche Eigenschaften wie ein WGM-Resonator besitzt. Wenngleich die äußere Ankopplung des Rings ebenfalls evaneszent geschieht, dient dazu jedoch keine ultradünne Koppelfaser, sondern ein bidirektionaler Faserkoppler. Er besteht aus zwei optischen Glasfasern, deren Kerne in einem kleinen Be-

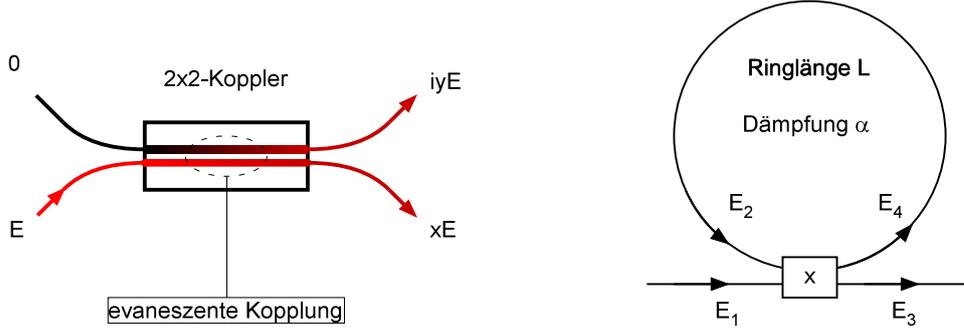


Abbildung 3.4: Links: Bidirektionaler Richtkoppler mit jeweils zwei Faserenden pro Seite ( $2 \times 2$ -Koppler). Das Licht teilt die Teilamplituden entsprechend des Teilungsverhältnisses ( $x:y$ ) auf. Rechts: Aufbau eines Faserringresonators mit einem  $2 \times 2$ -Koppler.

reich dicht aneinanderliegen. Das in einer der Fasern propagierende Licht teilt sich im Koppler mit einem festen Teilungsverhältnis zwischen beiden Fasern auf. Das verdeutlicht Abbildung (3.4, links). Der Koppler verfügt in dieser Konfiguration somit auf jeder Seite über zwei Faserenden und wird daher als  $2 \times 2$ -Koppler bezeichnet.

Ein Faserringresonator entsteht, wenn zwei der insgesamt vier Fasern verbunden werden. Die freibleibenden Enden dienen der Ankopplung des Rings. Das in den Faserring eingekoppelte Licht läuft um und koppelt teilweise wieder aus. Die Interferenz zwischen ausgekoppeltem und anregendem Lichtfeld bestimmt die spektralen Transmissionseigenschaften. Die Transmissionsfunktion eines solchen Faserringsystems ist der eines an einen Wellenleiter angekoppelten Flüstergalerieresonators äquivalent.

Um die Transmissionscharakteristik des Faserrings herzuleiten, wird eine Bilanzgleichung aufgestellt [19, 51, 57]:

$$E_3 = xE_1 + iyE_2, \quad (3.18)$$

$$E_4 = iyE_1 + xE_2. \quad (3.19)$$

Die Größen  $E_i$  sind die Teilamplituden in den entsprechenden Faserenden aus Abbildung (3.4, rechts). Durch die Faserschleife stehen  $E_4$  und  $E_2$  miteinander in Verbindung. Der Ring verursacht eine Phasenverschiebung und eine Dämpfung der Feldamplitude:

$$E_2 = e^{-\alpha L} e^{i\beta L} E_4 \equiv a e^{i\phi} E_4. \quad (3.20)$$

Die Dämpfung der Faser  $\alpha$  lässt sich bei bekannter Ringlänge in einen Dämpfungsfaktor  $a$  überführen. Die Propagationskonstante  $\beta(\nu)$  wird mit der Ringlänge zu einer Phase  $\phi(\nu) = L\beta(\nu)$  kombiniert. Die Phasenlage des Lichts nach einem Umlauf ist entscheidend für die Amplitudentransmission  $t = E_3/E_1$  durch die freien Enden des  $2 \times 2$ -Kopplers:

$$\frac{E_3}{E_1} = e^{i(\pi+\phi)} \frac{a - x e^{-i\phi}}{1 - x a e^{i\phi}}. \quad (3.21)$$

Das Betragsquadrat daraus ergibt die Intensitätstransmission  $T(\nu)$ . Bei Resonanz ist die Phase des Lichts für einen Umlauf gerade

$$\phi = 2\pi \cdot q, \quad q \in \mathbb{N}. \quad (3.22)$$

Es kommt zu einer Resonanzüberhöhung, sodass die im Ring zirkulierende Leistung die einfallende Leistung am Eingangskanal 1 um ein Vielfaches übersteigen kann [19]. Der Koppler prägt dem umlaufenden Licht eine zusätzliche Phasenverschiebung von  $\pi/2$  gegenüber dem anregenden Lichtfeld  $E_1$  auf, was zu einer destruktiven Interferenz am Ausgangskanal 3 führt. Ist die ausgekoppelte Leistung genau gleich der direkt von 1 nach 3 transmittierten Leistung, ist der Ring kritisch gekoppelt und die Transmission ist auf Resonanz gleich null. Die resultierende Transmissionsfunktion ist somit eine Abfolge äquidistanter lorentzförmiger Einbrüche in der Transmission (*Dips*). Deren freier Spektralbereich (*FSR*) durch die optische Länge  $nL$  des Rings

$$\Delta\nu_{FSR} = \frac{c}{nL} \quad (3.23)$$

bestimmt ist.

Analog zu einem Fabry-Pérot-Interferometer dient die Finesse

$$\mathcal{F} = \frac{\Delta\nu_{FSR}}{\delta\nu} \quad (3.24)$$

zur Beschreibung der Dämpfung innerhalb des Ringresonators.

### Polarisationskontrolle im Faserring

Nicht nur die aufgesammelte Phase des Lichts nach einem Umlauf im Ring ist entscheidend für eine Interferenz mit dem einfallenden Licht, sondern auch die Polarisation.

Um die Polarisation eines frei propagierenden Laserstrahls einzustellen wird üblicherweise je eine Viertel- und Halbwellenplatten benutzt (siehe Abschnitt (2.5.3)). Sie bestehen aus optisch anisotropen Medien, deren Brechzahl abhängig von der Polarisation und Propagationsrichtung des eingestrahlt Lichts ist (*Doppelbrechung*). Da das Licht innerhalb einer Faser nicht direkt zugänglich ist, muss auf die doppelbrechenden Eigenschaften der Faser selbst zurückgegriffen werden, um die Polarisation zu beeinflussen.

Dies geschieht mit einem Gerät zur faserbasierten Polarisationskontrolle, das im englischen Sprachraum als *bat-ear compensator* bekannt ist. Er besteht aus mindestens zwei gegeneinander verdrehbaren Platten, in die eine kreisförmige Furche eingelassen ist. Eine darin eingelegte Faser erfährt in der Plattenebene eine Doppelbrechung durch mechanische Spannung. Jede Platte wirkt sich wie eine Wellenplatte für das geführte Licht aus [20]. Die Doppelbrechung ist abhängig vom Fasermaterial, der Wicklungszahl und dem Biegeradius, den die Furche in der Platte vorgibt. Jede beliebige Polarisation ist durch die relative Verdrehung der Platten zueinander präparierbar.

Integriert man ein solches Gerät in einen Faserring, so lässt sich die Doppelbrechung des gesamten Rings so einstellen, dass die Polarisation des Lichts bei einem Umlauf erhalten bleibt.

### 3.2.2 Numerische Modellierung der transmittiven Kopplung

Voraussagen über das komplexe System zweier durch einen Faserring transmittiv gekoppelter Flaschenresonatoren sind nicht ohne eine Simulation möglich. Solch ein System besteht aus drei Resonatoren, deren Moden jeweils untereinander koppeln.

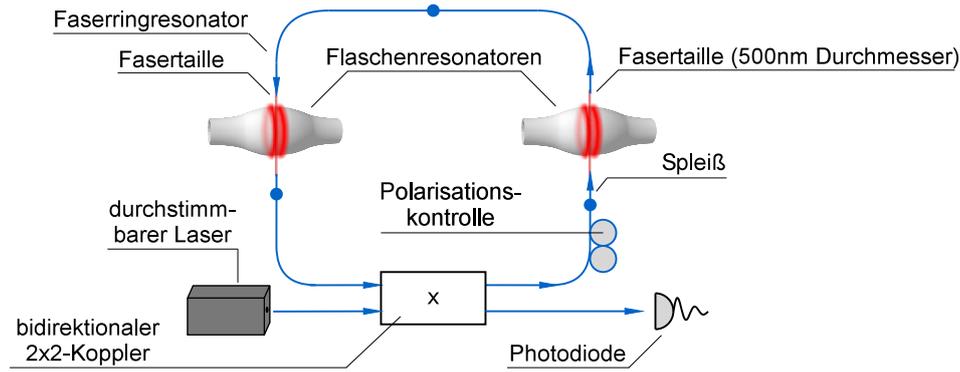


Abbildung 3.5: Aufbau zur transmittiven Kopplung zweier Flaschenresonatoren mittels eines Faserring-Resonators.

Den experimentellen Aufbau zur transmittiven Kopplung zweier Flaschenresonatoren zeigt Abbildung (3.5). Zwei Enden des  $2 \times 2$ -Kopplers sind mit je einem unverjüngten Ende der zwei Koppelfasern verbunden<sup>2</sup>, ihre Fasertailen dienen der Ankopplung der beiden Flaschenresonatoren. Die Koppelfasern sind ebenfalls miteinander verspleißt. Die Leistungstransmission  $T(\nu)$  durch die freibleibenden Faserenden des  $2 \times 2$ -Koppler wird mittels eines durchstimmbaren Lasers und einer Photodiode gemessen. Für die numerische Berechnung von  $T(\nu)$  eignet sich die Behandlung mit Hilfe des Wellentransfermatrizen-Formalismus.

### Wellentransfermatrizen-Formalismus

Die Photodiode im Experiment misst die auf ihr deponierte Lichtleistung, die mathematisch durch den Leistungstransmissionskoeffizienten  $T(\nu)$  repräsentiert ist. Er ist das Betragsquadrat aus dem Amplitudentransmissionskoeffizient  $t$ :

$$T(\nu) = |t|^2. \quad (3.25)$$

Der Koeffizient  $t$  leitet sich aus den Eigenschaften der  $N$  beteiligten optischen Elemente ab, die durch Wellentransfermatrizen ( $M$ -Matrizen)  $M_1, M_2, \dots, M_N$  dargestellt sind. Die Elemente einer solchen Matrix sind wie folgt definiert [1]:

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \frac{1}{t_{21}} \begin{pmatrix} t_{12}t_{21} - r_{12}r_{21} & r_{21} \\ -r_{12} & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

Dabei stehen  $t_{12}$  und  $r_{12}$  für den Amplitudentransmissions- und Amplitudenreflexionskoeffizienten einer von links in das Element einfallenden elektromagnetischen Welle. Entsprechend stehen  $t_{21}$  und  $r_{21}$  für die Transmission und Reflexion einer von rechts eintretenden Welle.

Die Wellentransfermatrix  $M$  des optischen Gesamtsystems ergibt sich durch Multiplikation der einzelnen Matrizen  $M_1, M_2, \dots, M_N$ :

$$M = M_N \cdot M_{N-1} \cdot \dots \cdot M_2 \cdot M_1. \quad (3.27)$$

<sup>2</sup>Das Verbinden zweier Glasfaserenden nennt man *spleißen*.

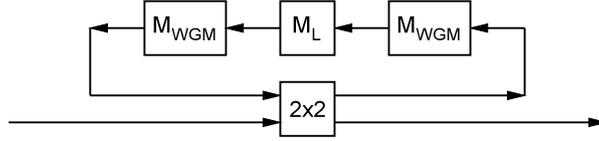


Abbildung 3.6: Vereinfachtes Modellsystem der experimentellen Anordnung aus Abbildung (3.5). Der Faserring lässt sich dabei durch entsprechende M-Matrizen darstellen.

Die Einträge der Matrix  $M$  enthalten die vollständige Beschreibung der reflektiven und transmittiven Eigenschaften eines optischen Systems gemäß der Definition (3.26).

Wesentliche Vereinfachungen ergeben sich durch die Symmetriebetrachtung der beteiligten optischen Elemente. Wie schon in Abschnitt (2.5.1) diskutiert, ist ein gekoppelter Flaschenresonator spiegelsymmetrisch. Die Transmissions- und Reflexionskoeffizienten beider Einfallsrichtungen sind gleich und es ergibt sich:

$$M = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} t^2 - r^2 & r \\ -r & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

In der Literatur sind die expliziten Matrizen für einzelne optische Komponenten angegeben. Die Wellentransfermatrix für eine Glasfaser mit Länge  $L$ , einer Dämpfung  $\alpha$  und Propagationskonstanten  $\beta$  lautet [39]:

$$M_L = \begin{pmatrix} e^{-i\beta L} e^{-\alpha L} & 0 \\ 0 & e^{-i\beta L} e^{-\alpha L} \end{pmatrix}. \quad (3.29)$$

Sie beschreibt eine Phasenverschiebung um  $\phi = \beta L$  und eine Dämpfung, die bei bekannter Faserlänge  $L$  als Konstante  $a = e^{-\alpha L}$  gewählt wird. Für einen fasergekoppelten Flüstergalerieresonator ist der Amplitudentransmissionskoeffizient  $t_R$  ebenfalls bekannt [39]:

$$t_{Rj} = \frac{t_r e^{i\beta 2\pi R_j} - \alpha_j}{e^{i\beta 2\pi R_j} - \alpha_j t_r}. \quad (3.30)$$

Der Index  $j$  steht für den  $j$ -ten Resonator mit Radius  $R$ . Die angeregte Moden erfahren die intrinsischen Verluste  $\alpha = 1 - \sigma_0$ . Die Flüstergaleriemode ist an die Koppelfaser mit der Konstanten  $t_r = \sqrt{1 - \kappa_0^2}$  unter Abwesenheit anderer Moden ( $I = 1$ ) gekoppelt. Für einen angenommenen idealen Flüstergalerieresonator entfällt zudem die kohärente Rückstreuung, die Reflexion ist dann vernachlässigbar ( $r = 0$ ). Für die M-Matrix gilt unter diesen Vereinfachungen:

$$M_{\text{WGM}} = \begin{pmatrix} t_R & 0 \\ 0 & \frac{1}{t_R} \end{pmatrix}. \quad (3.31)$$

Der Transmissionskoeffizient  $t_R$  berücksichtigt dabei nicht die besondere Modenstruktur eines Flaschenresonators. Dennoch reicht  $M_{\text{WGM}}$  zur Repräsentation eines Flaschenresonators aus, da im Folgenden nur eine einzige Mode pro Resonator in einem kleinen Frequenzintervall betrachtet wird.

Durch die Kombination der Matrizen (3.31) und (3.29) berechnet sich die Transmission durch eine Faserstrecke, an die zwei Flaschenresonatoren durch die enthaltenen ultradünnen Tailen gekoppelt sind. Das zugrunde liegende Modell, anhand dessen die Matrizen kombiniert werden, ist in Abbildung (3.5) dargestellt. Es folgt daraus gemäß Abbildung (3.6):

$$M = M_{\text{WGM}1} \cdot M_L \cdot M_{\text{WGM}2}. \quad (3.32)$$

Die Matrix  $M$  repräsentiert dabei den gesamten Faserring mit angekoppelten Flaschenresonatoren.

Die Faserstrecken zwischen den Flaschenresonatoren und dem  $2 \times 2$ -Koppler sind daher in einer einzigen Propagationsmatrix  $M_L$  gemäß (3.29) zusammengefasst. Zwei Matrizen  $M_{\text{WGM}}$  repräsentieren die Resonatoren ( $j = 1, 2$ ).

Die Propagationskonstante  $\beta$  der verjüngten Faser mit Länge  $l$  und die Wellenzahl der angeregten Resonatormode  $k_{mq}$  als identisch angenommen (ideale Phasen Anpassung). Der Faserring hat eine Gesamtlänge  $L$ , in ihm breitet sich das Licht mit der Propagationskonstanten  $k$  aus. Daraus resultiert für das in den Ring eingekoppelte Licht nach einem Umlauf die Phasenverschiebung  $\phi(\nu) = (L - 2l)k(\nu) + 2l\beta(\nu)$ . Da nur Diagonalmatrizen vorkommen, ist das Matrizenprodukt kommutativ. Es gilt daher  $M_{11} = t$ , damit wird Gleichung (3.20) modifiziert:

$$E_2 = M_{11}E_4. \quad (3.33)$$

Es folgt der Transmissionskoeffizient  $T(\nu)$  aus der Transmissionsfunktion für den Faserring (3.21):

$$\left| \frac{E_3}{E_1} \right|^2 = T(\nu) = \left| x - \frac{(1-x)t_{R1}t_{R2}ae^{-i\phi(\nu)}}{1-t_{R1}t_{R2}ae^{-i\phi(\nu)}} \right|^2. \quad (3.34)$$

Die Transmission durch das Gesamtsystem aus Ring und Koppler besitzt nach wie vor äquidistante Transmissionsdips, in denen der Faserring resonant zum einfallenden Licht ist. Zusätzlich hängt die Transmission des Faserrings von den Moden der Flaschenresonatoren ab. Auf Resonanz dämpfen sie das zirkulierende Licht, abhängig von ihrer Kopplung. Sind sie kritisch gekoppelt, verschwindet die Transmission des Faserrings bei der Resonanzfrequenz der jeweiligen Flaschenmode.

Die Werte, die bei der Simulation zugrunde gelegt wurden, entsprechen experimentell erreichbaren Rahmenbedingungen: Die Moden eines  $35 \mu\text{m}$  dicken Flaschenresonators mit einer Güte von  $Q = 10^8$  sind an einen Faserring ideal ( $I = 1$ ) und kritisch ( $K = 1$ ) gekoppelt. Jeweils nur eine der Moden wird verstimmt. Der Faserringresonator hat eine Finesse von  $\mathcal{F} \approx 24$  bei einer Faserlänge von  $L = 1 \text{ m}$  und dem Brechungsindex von Silikatglas  $n = 1,467$ . Davon entfallen  $l = 6 \text{ mm}$  auf die ultradünnen Tailen, die einen Brechungsindex von  $n_{\text{eff}} = 1,144$  bei einem Durchmesser von  $500 \text{ nm}$  haben. Das entspricht dem effektiven Brechungsindex einer Fasertaille mit  $500 \text{ nm}$  bei  $\lambda = 850 \text{ nm}$ . Da die Simulation ein real existierendes System wiedergeben soll, sind zusätzliche Verluste des Rings eingerechnet. Der Richtkoppler verfügt über Faserenden, die durch Fusionspleiße mit den zwei verjüngten Fasern verbunden sind. Um einen Ring zu formen, ist noch ein weiterer Spleiß nötig. Daraus ergeben sich die Verluste im Ring aus der Dämpfung von drei Fusionspleißen und zwei verjüngten Fasern mit je  $98,5 \%$  Transmission und der typischen Dämpfung einer im Experiment verwendeten Glasfaser ( $5 \text{ dB/km}$ ). Die Dämpfung der Spleiße und

der verjüngten Fasern stellt eine obere Abschätzung der Transmission dar. Die Polarisationskontrolle bleibt unberücksichtigt, sie führt keine zusätzlichen Verluste ein. Sie sei so eingestellt, dass die Polarisation für einen Umlauf im Ring erhalten bleibt und die Polarisationsanpassung für die Flaschenmoden optimal ist. Ansonsten müsste zusätzlich die Kopplung an Faserring-Moden einer anderen Polarisation in die Berücksichtigung einfließen.

In der Simulation wurde jeweils eine der beiden Flaschenmoden in ihrer Resonanzfrequenz linear gegenüber der Flaschenmode des anderen Resonators mit fester Resonanzfrequenz verstimmt. Bei der Diskussion der Ergebnisse muss zwischen zwei Extremfällen unterschieden werden. Die Resonanzfrequenzen des Faserrings und der unverstimmten Flaschenmode sind entweder identisch oder unterscheiden sich um einen halben FSR des Faserrings.

### Nichtresonanter Fall

In dieser Situation ist eine der Flaschenmoden gegenüber den Faserring-Resonanzen maximal verstimmt. Sie liegt mittig zwischen den Moden des Faserrings. Die andere Flaschenmode wird gegenüber der Mode fester Frequenz linear abgestimmt. Der berechnete Verlauf der Leistungstransmissionsfunktion  $T(\nu)$  ist in Abbildung (3.7) farblich markiert dargestellt. Aus der berechneten Transmissionsfunktion resultiert ein freier Spektralbereich der Faserringmoden von  $\Delta\nu \approx 210$  MHz.

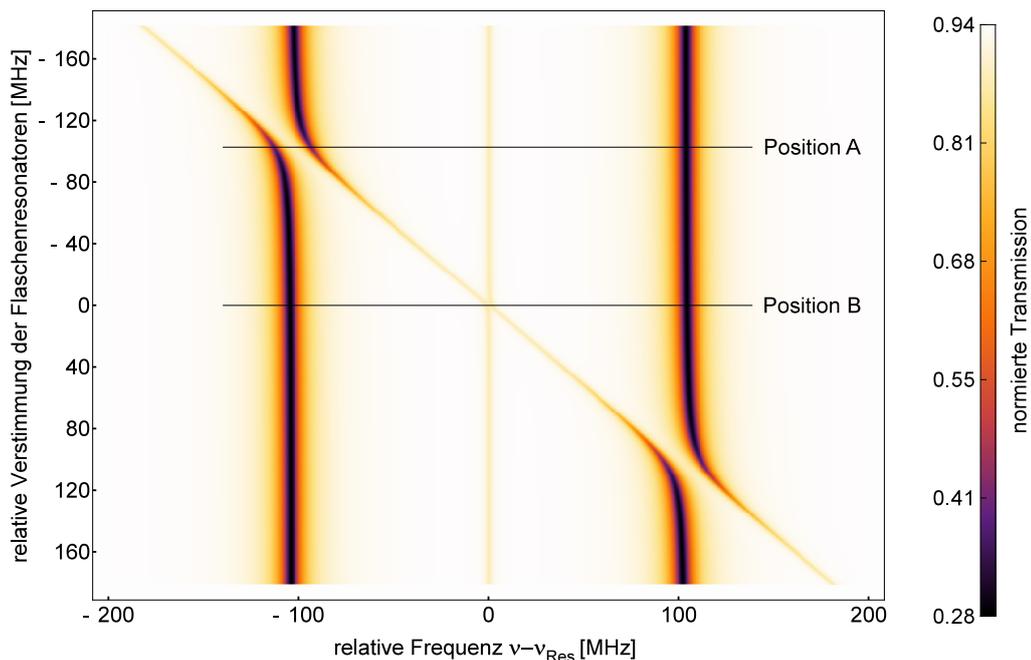


Abbildung 3.7: Numerisch berechnete Transmission eines Faserringresonators, gekoppelt an zwei kritisch gekoppelte Flaschenmoden mit  $Q = 10^8$ . Die  $x$ -Achse zeigt die relative Verstimmung des Lasers gegenüber dem unverstimmten Resonator. Erkennbar ist die Kopplung durch eine deutliche Abstoßung der Resonanzkurven (oben links und unten rechts). An den markierten Linien ist das Transmissionsprofil  $T(\nu)$  in Abbildung (3.8) gesondert dargestellt.

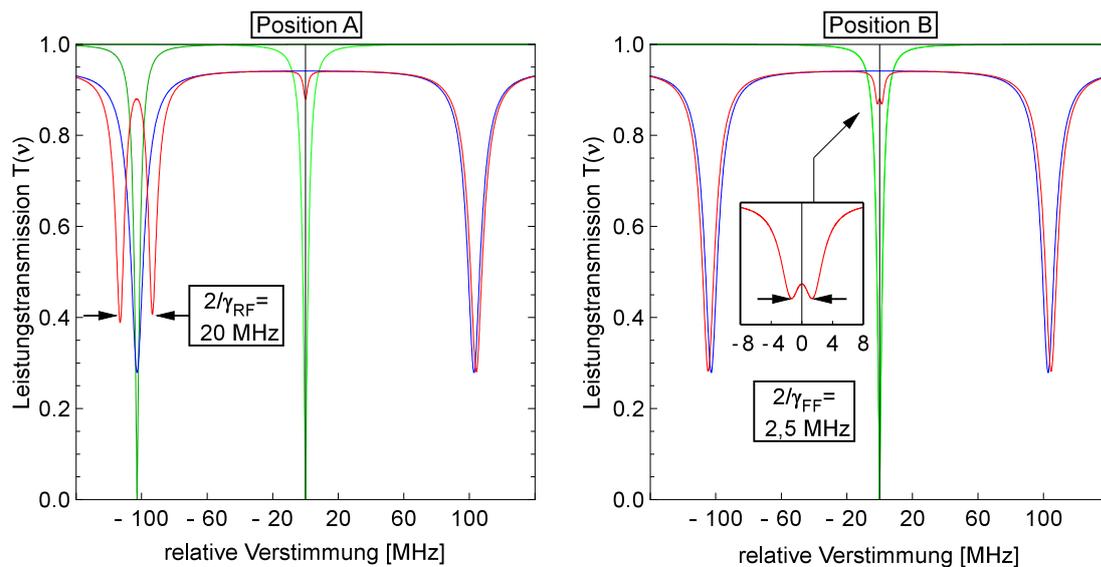


Abbildung 3.8: Aus Abbildung (3.7) entnommene Transmissionsspektren (rot). Links: Position *B*, Kopplung der gegeneinander unverstimmten Flaschenmoden mit einer Kopplungskonstante  $\gamma_{FF}^{sim} = 2,5$  MHz. Rechts: Position *A*, Kopplung von Flaschenmode und Faserringmode mit der Kopplungskonstante  $\gamma_{RF}^{sim} = 20$  MHz. Darüber sind jeweils die Transmissionsfunktionen der Flaschenresonatoren (grün) und des Faserrings (blau) eingezeichnet.

Dieser nichtresonante Fall enthält zwei markante Stellen, die in Abbildung (3.7) eingezeichnet sind. Sie zeigen jeweils eine starke Kopplung zweier Moden. Bei Position *A* kommt es zur starken Kopplung einer Flaschenmode mit einer Faserringmode, bei Position *B* koppeln beide Flaschenmoden aneinander.

Wie zu erwarten war, koppelt die durchgestimmte Flaschenmode in Abbildung (3.7) stark an den Faserring. Beide Moden zeigen ein Anticrossing, das an den beiden Kreuzungspunkten in der Abbildung deutlich sichtbar ist. Der minimale Abstand beider Moden entspricht dabei einer Kopplungskonstante von  $\gamma_{RF}^{sim} = 20$  MHz. Zur besseren Darstellung zeigt Abbildung (3.8, rechts) den Verlauf von  $T(\nu)$  im Fall der größten Kopplung beider Moden. Zu sehen ist, dass dort beide Resonanzen annähernd gleiche spektrale Breiten und Transmissionsminima aufweisen. Sie unterscheiden sich stark von den ungekoppelten Resonanzkurven von Flaschenmode und Ringresonatormode. Dies ist ein weiteres Indiz dafür, dass es sich um ein stark gekoppeltes System handelt.

Wesentlich schwächer, aber dennoch vorhanden ist das Anticrossing der Flaschenmoden untereinander. In diesem Fall sind die Flaschenmoden miteinander resonant. In Abbildung (3.8, links) ist eine Doppelstruktur in der resultierenden Transmissionsfunktion bei  $\nu - \nu_R = 0$  erkennbar. Der kleinste Abstand der Resonanzfrequenzen beträgt 2,5 MHz. Das ist ein Hinweis auf eine starke Kopplung der Flaschenmoden.

### Resonanter Fall

In diesem Fall ist die unverstimmte Flaschenmode mit dem Faserring resonant, das heißt einer der Flaschenresonatoren ist mit dem Faserring ständig stark gekoppelt. Daraus resultiert eine symmetrische Aufspaltung der Resonanzfrequenzen. Die zweite Flaschenmode wird bezüglich der Mode mit fester Resonanzfrequenz durchgestimmt. Die berechnete Transmissionscharakteristik zeigt Abbildung (3.9)

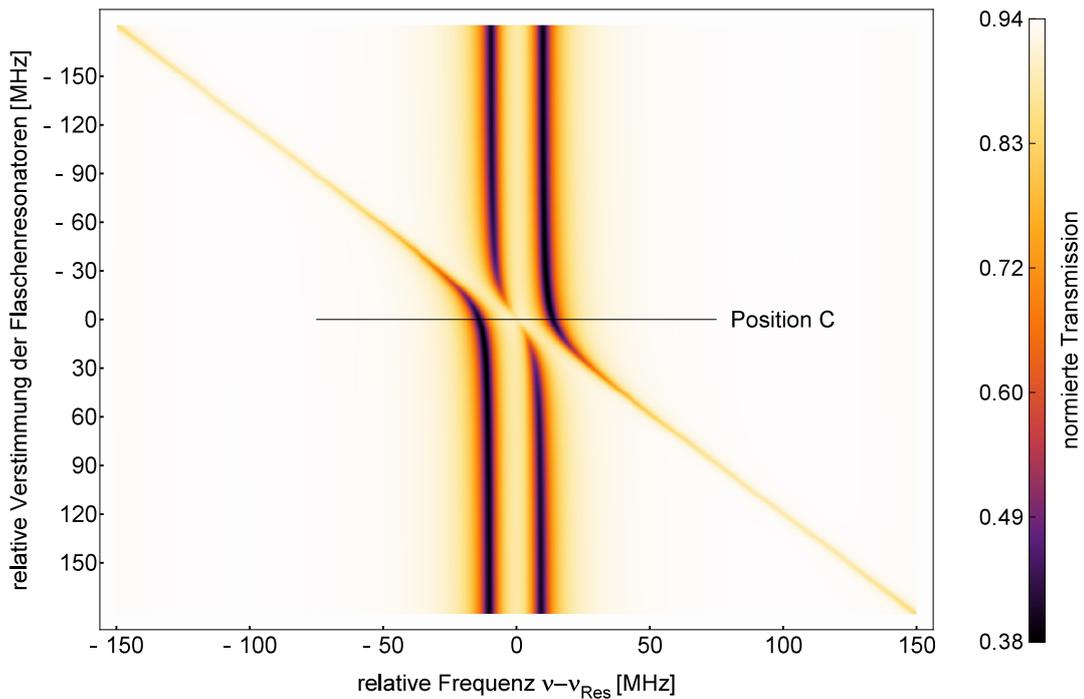


Abbildung 3.9: Numerisch berechnete Transmission eines zum Faserring unverstimmten Flaschenresonators. Diesbezüglich wird der zweite Flaschenresonator durchgestimmt. In der Bildmitte haben alle Resonatoren die gleiche Resonanzfrequenz. Die Linie markiert die Position des in Abbildung(3.10) gezeigten Spektrums.

In dieser Situation existiert nur ein ausgezeichnete Punkt, nämlich dort wo alle drei Resonatoren identische Resonanzfrequenzen besitzen. Sie ist in Abbildung (3.9) als Position *C* markiert. Diese Stelle zeigt eine dem nichtresonanten Fall unterschiedliche Charakteristik. Da drei Resonatoren mit drei Eigenfrequenzen aufeinandertreffen, erwartet man auch drei neue Eigenfrequenzen, wenn es sich um ein stark gekoppeltes System handelt. Tatsächlich enthält die Leistungstransmission  $T(\nu)$  in Abbildung (3.10) zwei deutliche Transmissionseinbrüche mit einer Kopplungskonstante von  $2/\gamma_c^{sim} = 28$  MHz. Sie spalten sich symmetrisch um die Mitte auf. Dazwischen deutet ein wesentlich kleinerer Dip die dritte Eigenfrequenz an. In diesem Fall kommt es also auch zu einer starken Kopplung aller drei Resonatoren untereinander.

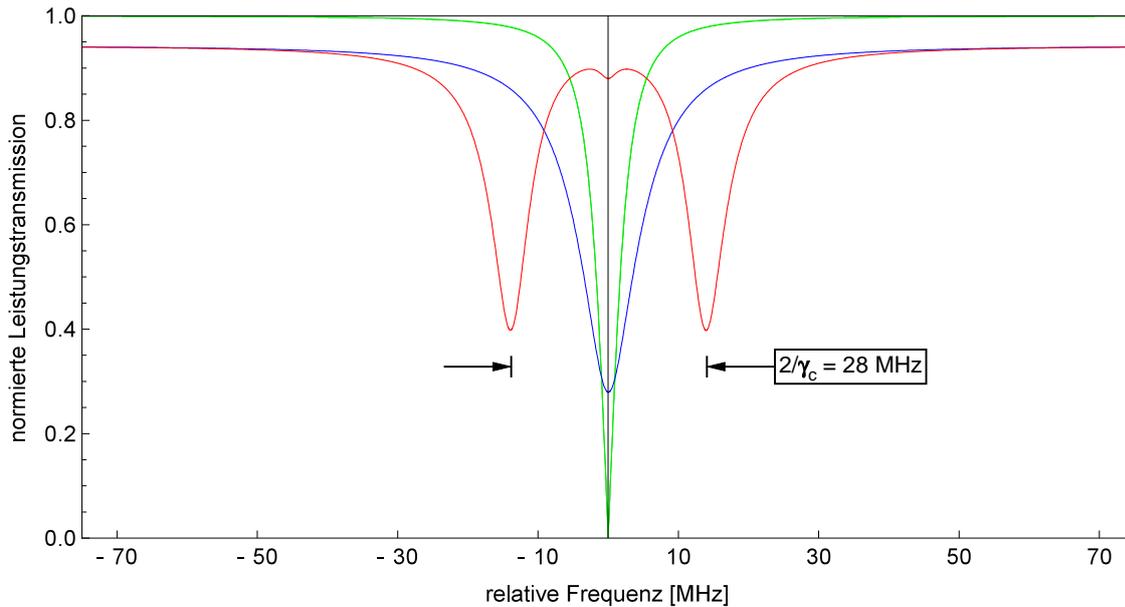


Abbildung 3.10: Transmissionsspektrum  $T(\nu)$  entlang der in Abbildung (3.9) markierten Linie Position  $C$  (rot). Es ist ebenfalls eine starke Kopplung zu sehen. Die äußersten Resonanzen zeigen eine Kopplungskonstante  $2/\gamma_c^{sim} = 28$  MHz. Darüber sind jeweils die Transmissionsfunktionen der Flaschenresonatoren (grün) und des Faserrings (blau) eingezeichnet.

### Einfluss der Flaschenresonatorkopplung

Es wurde ebenfalls untersucht, inwiefern der Koppelfaktor die Aufspaltung der Flaschenmoden beeinflusst, ohne dass sie zum Faserring resonant sind. Dieser Punkt entspricht Position  $B$  in Abbildung (3.8). Dort wurde jedoch kritische Kopplung  $K = 1$  angenommen. Da es sich um eine transmittive Kopplung handelt, sollte sie sich bei höherer Transmission durch den Faserring verstärken.

Numerisch simuliert wurde der Einfluss des Koppelfaktors  $K$  auf den Kopplungsfaktor  $2/\gamma_{FF}^{sim}$  der Flaschenmoden. Wie in Abbildung (3.11) zu sehen ist, steigert sich der Koppelfaktor nicht unbegrenzt. Er nähert sich bei sehr großen Koppelfaktoren einem Wert von etwa 200 MHz, was dem freien Spektralbereich des Faserrings entspricht. Die Simulation zeigt, dass die Dips der Flaschenresonatoren mit steigendem  $K$  zudem tiefer werden. Sie nehmen immer mehr den Charakter einer Faserringmode an. Das erklärt sich dadurch, dass die Flaschenresonatoren im stark überkoppelten Bereich wie eine zusätzliche Schleife im Faserring wirken. Das Licht wird eingekoppelt und koppelt nach einem Umlauf größtenteils wieder aus.

Die Kopplung der Flaschenresonatoren ist also begrenzt. Experimentell sind Koppelfaktoren bis etwa  $K = 1000$  zugänglich, was bereits einer sehr deutlichen Aufspaltung von  $2/\gamma_{FF}^{sim} \approx 120$  MHz entspricht.

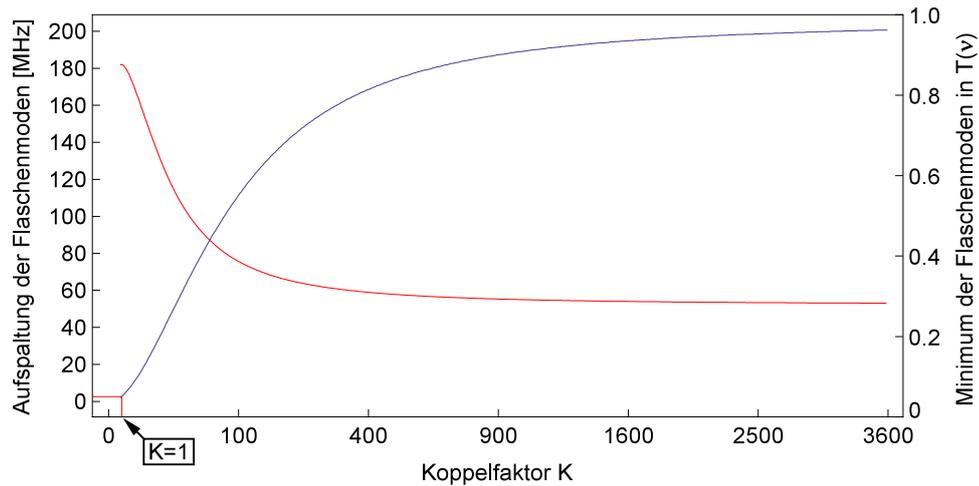


Abbildung 3.11: Einfluss des Koppelfaktors  $K$  auf die Aufspaltung der Flaschenmoden in Abwesenheit einer Faserringmode (rot).  $K$  ist logarithmisch aufgetragen. Die Kopplung steigert sich zunächst drastisch und tendiert dann bis zu einer Grenze von etwa 200 MHz, was dem FSR des Faserrings entspricht. Die Resonanzkurvenminima in Abhängigkeit von  $K$  zeigt die blaue Kurve.

### Experimentelle Ergebnisse

Im Vorfeld zur im letzten Abschnitt besprochenen numerischen Simulation wurde ein Experiment zu diesem Aufbau durchgeführt. Die in der Simulation verwendeten Eckdaten stimmen im Wesentlichen mit den Parametern des Experiments überein.

Der  $2 \times 2$ -Koppler (Firma Thorlabs, SCC  $2 \times 2$  90/10,  $\lambda = 830 \pm 15$  nm) hat bei der verwendeten Wellenlänge von  $\lambda \approx 852$  nm ein gemessenes bidirektionales Leistungsverhältnis von  $x^2 = 88,8$  %, das nicht polarisationsabhängig ist. Der verwendete Polarisationskompensator (Firma Thorlabs, FPC020) wird als verlustfrei angenommen. Er besteht aus zwei geneinander verdrehbaren Platten, in die die Glasfaser des Ringresonators mit je einer Schlaufe eingelegt ist. Die Einstellung wird so vorgenommen, dass die Polarisation pro Umlauf durch den Ring erhalten bleibt und zusätzlich die Polarisation bestmöglich an die Flaschenmoden angepasst ist. Eine ideale Polarisationsanpassung ist wegen der begrenzten Zahl der freien Parameter nicht erreichbar, sie kann jedoch optimiert werden. Der experimentelle Aufbau entspricht dem in Abbildung (3.5) und ist somit zur Simulation äquivalent. An zwei intern zusammenhängende Enden des  $2 \times 2$ -Kopplers ist jeweils eine verjüngte Faser mit einer ultradünnen Taille angespleißt. Sie dienen der Kopplung an die Flaschenresonatoren. Die verbleibenden unbearbeiteten Enden sind ihrerseits per Fusionspleiß verbunden, sodass ein Ring entsteht. Die Spleißverbindungen wurden mit einem Fusionspleißer (Firma Fujikura, FS-30s) angefertigt. Darin eingelegte Glasfaserenden werden zunächst automatisch ausgerichtet und in einem Lichtbogen miteinander verschweißt. Die Gesamtverluste des Rings berechnen sich also analog zu den in der Simulation angenommenen Parametern. Drei Spleiße, zwei Fasertailen und die monomodalen-Glasfaser selbst, mit einer Dämpfung von 5 dB/km, verursachen die Transmissionsverluste. Allerdings ist die Transmission der Tailen und Spleiße nur im fertigen Ring indirekt über

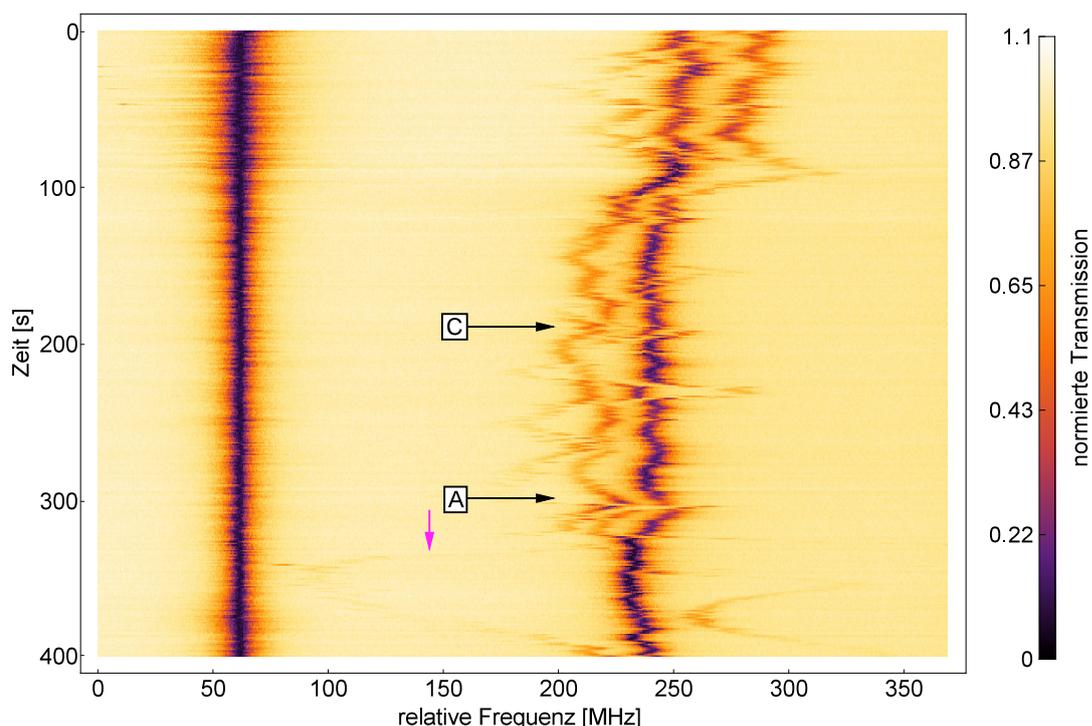


Abbildung 3.12: Grafische Darstellung der Leistungstransmission durch den  $2 \times 2$ -Koppler aus Abbildung (3.5). Die Resonanzen des Faserrings sind deutlich als dunkle Streifen mit einem FSR von  $\Delta\nu_R \approx 172$  MHz sichtbar. Die Resonanzen der Flaschenresonatoren heben sich zwischen den Faserringresonanzen nur sehr schlecht vom Rauschen ab (pinker Pfeil). Eine Kopplung der Flaschenmoden im Bereich zwischen den Faserringmoden ist daher nicht beobachtbar. Die Markierungen *A* und *C* zeigen die Stellen, an denen die in der Simulation gefundenen Extremfälle auftreten. *A*: Kopplung einer Flaschen- und einer Ringmode, *C*: Zusammentreffen aller drei Resonanzen.

die Finesse bestimmbar. Der Ring hat in diesem Experiment eine gemessene Länge von  $L \approx 0,85$  m und eine Finesse von  $\mathcal{F} \approx 18$ . Er entspricht nicht genau den Parametern der Simulation, ist aber vergleichbar.

Die verwendeten Flaschenresonatoren haben einen Durchmesser von  $35 \mu\text{m}$ . Die erwartete Güte der Moden liegt im Bereich zwischen  $10^7 < Q_0 < 10^8$ . Aufgrund des Aufbaus lässt sich ihre Güte ebenfalls nur abschätzen, da sie sich nur indirekt innerhalb des Faserring-Transmissionssignals schwach abzeichnen. Am deutlichsten treten sie bei kritischer Kopplung in Erscheinung, da dann die Transmission des Rings verschwindet.

Die Messung besteht aus 400 einzeln aufgenommenen Transmissionsprofilen aus je 5000 Datenpunkten mit einem zeitlichen Abstand von 100 ms. Die Resonatoren wurden dabei nicht aktiv durchgestimmt. Das starke Driftverhalten von Ring und Flaschenresonatoren macht eine gezielte Abstimmung unmöglich. Die Resonanzfrequenzen sind lediglich grob aufeinander abgestimmt.

Abbildung (3.12) zeigt eine Messung an dem oben beschriebenen Faserringresonator. Alle Messungen sind an der ersten aufgenommenen Faserringresonanz ausgerichtet, um die

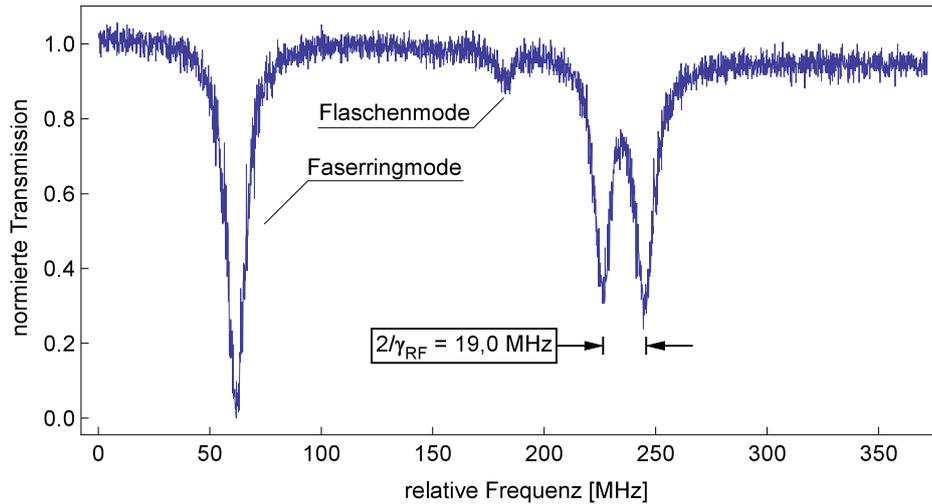


Abbildung 3.13: Die Messung ist aus Abbildung (3.5) entnommen. Eine Faserringmode koppelt mit einer Flaschenmoden. Die Kopplung beträgt  $2/\gamma_{RF} = (19,0 \pm 1)$  MHz. Dieser Wert ist mit der Simulation vergleichbar.

Wechselwirkung und das Driftverhalten der Moden besser sichtbar zu machen. Die größte Schwierigkeit stellt die Stabilität der Resonanzfrequenzen von Ring- und Flaschenresonatoren zueinander dar, was sich deutlich im Bild abzeichnet. Vor allem akustische Störungen der Flaschenresonatoren und thermische Driften des Faserrings wirken sich negativ aus. Um die Resonanzen des Faserrings um einen FSR zu verschieben, genügt schon eine Längenänderung des Rings um  $\frac{\Delta L}{L} \approx 10^{-6}$ .

Die Kopplung der Resonatoren ist lediglich grob einstellbar, das liegt an einer schlechten Polarisationsanpassung. Sie unterliegt immer der Bedingung, dass die Polarisation des Lichts bei einem Umlauf im Ring in sich selbst überführt werden muss. Ansonsten tritt mittig zwischen zwei Faserringmoden jeweils eine weitere Moden mit entgegengesetzter Polarisation auf, die ihrerseits an die Flaschenmoden koppelt.

Ein zusätzlicher Störfaktor ist das Rauschen des Photodiodensignals. Bei Experimenten mit WGM-Resonatoren hoher Güte treten bei zu hohen eingekoppelten Leistungen nicht-lineare Effekte in Erscheinung. Aus diesem Grund muss die Leistung in der Faser klein gehalten werden, wodurch sich das Signal-zu-Rausch-Verhältnis verschlechtert. Desweiteren benötigt man zur Beobachtung hoher Güten einen Photodetektor mit einer großen Bandbreite. Eine große Bandbreite vergrößert ebenfalls das Rauschen.

Die Resonanzen der Flaschenresonatoren sind im Oszilloskopsignal nur nahe kritischer Kopplung überhaupt identifizierbar. Ihre Güte kann aufgrund des kleinen Signals nur abgeschätzt werden. Ist die Kopplung einer Mode über- oder unterkritisch, transmittieren die Flaschenresonatoren das im Ring zirkulierende Licht teilweise. Dann liefert nur das Mikroskopbild einen Hinweis auf eine angeregte Mode, da sie im Transmissionssignal nur schwach sichtbar und durch das Rauschen überlagert ist.

Da die in der Simulation berechnete Aufspaltung stark gekoppelter Flaschenmoden (siehe Abbildung (3.8, links)) nur wenige MHz breit und nur sehr schwach ausgeprägt ist, ist es unmöglich, diesen Effekt experimentell bei kritischer Kopplung zu beobachten. Daher ist

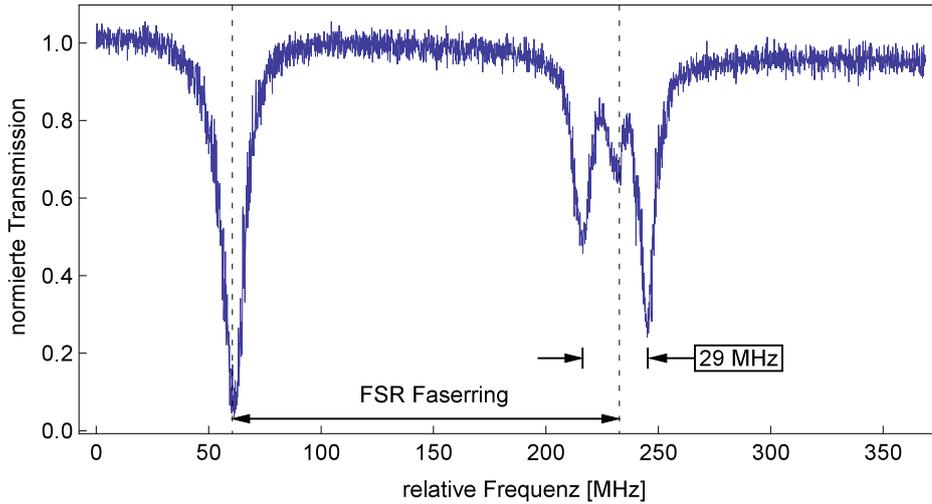


Abbildung 3.14: Zusammentreffen aller drei Resonanzen von Faserring und Flaschenresonatoren. Die Transmissionskurve ist der Simulation in Abbildung (3.10) ähnlich. Die Kopplung beträgt  $2/\gamma_c = (29 \pm 3)$  MHz. Die gestichelten Linien haben den Abstand eines FSR des Faserrings von  $\Delta\nu_R \approx 172$  MHz.

aus der Messung, die in Abbildung (3.12) dargestellt ist, ein Ereignis entsprechend Position  $B$  nicht entnehmbar. Die Flaschenmoden verschwinden im Rauschen zwischen den Faserringmoden.

Da die Kopplung nicht genau überprüfbar und daher nicht optimierbar ist, ist eine überkritische Kopplung schwer erreichbar. Dies hätte zur Folge, dass sich die Aufspaltung der Moden deutlicher ausprägt und messbar wird.

Trotz der experimentellen Einschränkungen entsprechen einige Einzelmessungen den in der Simulation gefundenen Sonderfällen  $A$  und  $C$ . Abbildung (3.13) zeigt eine starke Kopplung des Faserrings mit einer Flaschenmode, während die zweite Flaschenmode nahezu unbeteiligt ist. Vergleicht man die gefundenen Kopplungskonstanten aus Simulation  $\gamma_{RF}^{\text{sim}} = 20$  MHz und Experiment  $\gamma_{RF} = (19 \pm 1)$  MHz, ergibt sich eine gute Übereinstimmung. Dieser Wert wurde mittels einer Kurvenanpassung ermittelt. Der Fehler ist durch die Ungenauigkeit der Etalonlänge und der Kurvenanpassung gegeben. Die relative Abweichung der Messung zum Experiment beträgt 5% und stimmt im Rahmen des Fehlers mit der Simulation überein. Das beweist die starke Kopplung zwischen Ring und Flaschenresonator.

Ein Zusammentreffen aller drei Resonanzen ist in insgesamt drei Einzelmessung zu sehen. Exemplarisch ist ein solches Transmissionspektrum in Abbildung (3.14) gezeigt. Das abgebildete Profil ist der simulierten Leistungstransmission ähnlich, die in Abbildung (3.10) zu sehen ist. Auch dieser Fall erlaubt einen Vergleich mit der numerisch berechneten Kopplungskonstante  $2/\gamma_c^{\text{sim}} = 28$  MHz und der experimentell ermittelten Kopplungskonstante  $2/\gamma_c = (29 \pm 3)$  MHz. Beide Werte liegen dicht beisammen und besitzen eine relative Abweichung von 3,5%. Da bei dieser Kurvenform keine Kurvenanpassung möglich war, musste der Wert ausgemessen werden. Der Fehler wird daher abgeschätzt. Die charakteristische Struktur aus drei Dips, von denen der mittlere unterdrückt ist, legt nahe, dass es

sich tatsächlich um den in Abbildung (3.10) abgebildeten Fall handelt.

### 3.2.3 Reflektive Modenkopplung

Aufgrund der Tatsache, dass Flüstergaleriemoden Reflexion zeigen, liegt es nahe zwei Flaschenresonatoren zu koppeln, indem man sie durch einen gemeinsamen Wellenleiter verbindet. Wie in Abbildung (3.15) dargestellt, enthält sie zwei verjüngte Stellen, die der Kopplung der Flaschenresonatoren dienen.

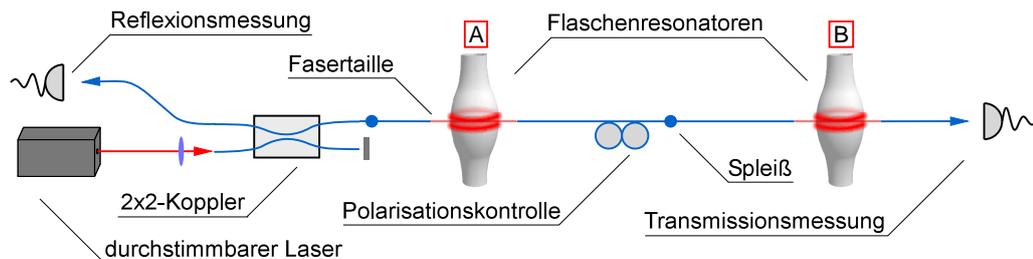


Abbildung 3.15: Experimenteller Aufbau zur reflektiven Kopplung zweier Flaschenresonatoren. Die Flaschenresonatoren sind mit A und B gekennzeichnet, A wird im Experiment durchgestimmt.

Die durch die Glasfaser propagierende Leistung wird in einem Resonator teilweise reflektiert. Die Reflexion hat ihren Ursprung in der kohärenten Rückstreuung innerhalb des Flaschenresonators in die gegenläufige Mode. Ist die Reflexion hoch genug, erwartet man auch hier eine starke Kopplung der beteiligten Moden, die sich in einer vermiedenen Kreuzung manifestiert.

Im dazu durchgeführten Experiment sind beide Resonatoren durch eine optische monomoden-Glasfaser mit einer Länge von  $L = 4$  m miteinander verbunden. Ein bat-ear-Kompensator (Firma Thorlabs, FPC 560) dient der Polarisationsanpassung der Faserstrecke zwischen den Resonatoren. Die Faser besteht aus zwei verjüngten Glasfasern mit langen unbearbeiteten Enden, die miteinander verspleißt sind. Die verwendeten verjüngten Fasern weisen eine Taille mit 3 mm Länge und einem Durchmesser von 500 nm auf.

Wie in Abbildung (3.15) gezeigt, ist an einem Ende der Faserstrecke ein  $2 \times 2$ -Koppler mit einem Teilungsverhältnis von  $x^2 = 88,8\% : 11,2\%$  angespleißt. Es handelt sich um den gleichen  $2 \times 2$ -Koppler, wie er auch im Experiment zur Transmittiven Kopplung verwendet wurde. Er ist so eingebaut, dass das reflektierte Licht der Resonatormoden größtenteils transmittiert wird und so auf einer fasergekoppelten Photodiode messbar ist.

Das Laserlicht des in Kapitel (2) beschriebenen optischen Aufbaus wird mit der Faserkopplungseinheit in den  $2 \times 2$ -Koppler eingekoppelt. Dieser führt der Koppelfaser 11,2% der eingekoppelten Leistung zu. Das transmittierte Licht misst eine zweite Photodiode am Ende der Faserstrecke. Die im Experiment verwendeten verstärkten Photodioden für die Transmissions- und Reflexionsmessung sind baugleich, sodass ihre Signale vergleichbar sind.

Die Resonatoren verfügen jeweils über einen eigenen Koppelaufbau. Einer der Resonatoren soll gegenüber dem anderen durchgestimmt werden. Er ist daher auf einem Halter mit

beidseitigem Biegeaktor aufgeklebt, damit sich seine Position und somit seine Kopplung an die Fasertaille während der Verstimmung nicht ändert.

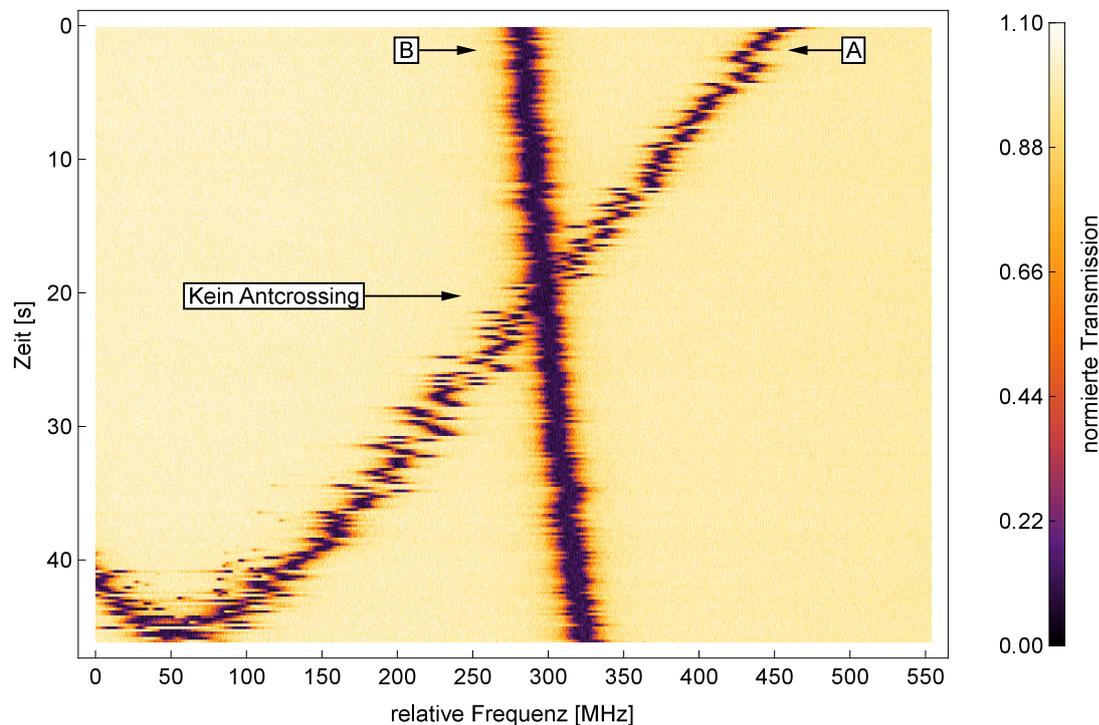


Abbildung 3.16: Messung zur reflektiven Modenkopplung.

Als vorbereitende Messung wurde der Laser um etwa 1 THz durchgestimmt und dabei ein Reflexions- und ein Transmissionsspektrum jedes Flaschenresonators aufgenommen. Anhand dieses Spektrum ließen sich diejenigen Frequenzintervalle finden, an denen zwei unterschiedliche Resonatormoden mit hoher Leistungsreflexion und Güte dicht aneinanderlagen. Die interessanten Frequenzbereiche wurden mit dem iScan angewählt und die beiden Flaschenmoden so weit durchgestimmt, dass sie im Transmissionsspektrum wenige hundert MHz getrennt liegen. Danach wurde mittels der eingestrahlenen Polarisation und des bat-ear-Kompensators die Polarisationsanpassung für beide Moden optimiert.

Die Idealität jeder Mode bestimmte sich aus einer computergestützten Messung, wie sie in Abschnitt (2.5.6) beschrieben ist. Nach der Auswertung der gemessenen Transmissionsspektren ergab sich eine Idealität für beide Moden von  $I \geq 99\%$ . Das entspricht einer nahezu ideale Kopplung an die Koppelfaser.

Die eigentliche Messung bestand darin, die Resonanzkurven zu kreuzen. Der vordere Resonator der Faserstrecke (A) wurde durchgestimmt, während der andere (B) unverstimmt blieb. Die Messung bestand aus 230 einzelnen Messungen, bei denen jeweils parallel ein Transmissions- und Reflexionsprofil aufgenommen wurde. Die Einzelmessungen enthalten je 5000 Datenpunkte mit einem zeitlichen Abstand von etwa 200 ms. Die an die Biegeaktoren angelegte Spannung wurde im Verlauf der Messung um 130 mV geändert.

Das Ergebnis der Messung zeigt Abbildung (3.16). Da die hohe Reflexion der Flaschenmo-

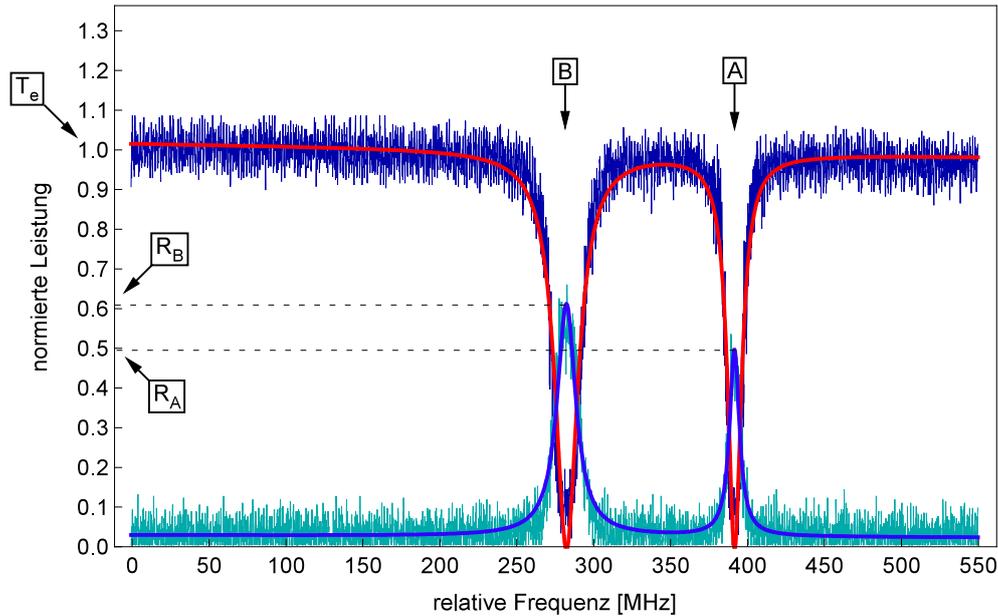


Abbildung 3.17: Transmissions- und Reflexionsmessung der kritisch gekoppelten Resonatormoden. Die gemessene Leistung ist auf die Transmission normiert (blaue Datenpunkte). Die untere Kurve zeigt die gemessene Reflexion (grüne Datenpunkte). Beide Signale wurde mit einer Kurvenanpassung versehen, um daraus die Güte und den Reflexionskoeffizienten zu bestimmen. Die Güte beträgt  $Q_A \approx 2 \cdot 10^7$  und  $Q_B \approx 3 \cdot 10^7$ .

den eine hohe kohärente Rückstreuung und daher mit einer hohen intrinsischen Streuung einher geht, ist die Güte der kritisch gekoppelten Moden mit  $Q_A \approx 2 \cdot 10^7$  und  $Q_B \approx 3 \cdot 10^7$  nicht ultrahoch. Die Messung zeigt, dass bei dieser Messung kein Anticrossing auftritt. Die Moden scheinen keine starke Kopplung einzugehen.

Aus der Messung lässt sich der Reflexionskoeffizient der einzelnen Moden ermitteln. Abbildung (3.17) zeigt ein aus Abbildung (3.16) entnommes Transmissionsprofil. Zusätzlich ist die Reflexion aufgetragen. Die Reflexionskoeffizienten lassen sich durch den verwendeten Aufbau nicht direkt ablesen.

Die einzelnen Reflexe der Resonatoren ( $R_A, R_B$ ), die in Abbildung (3.17) gemessen sind, erfahren unterschiedliche Verluste durch die Faserstrecke. Die Messung ist zudem auf die mittlere Transmission normiert  $T_e = 1$ , die die Transmissionsmessung in Abwesenheit einer Flaschenmode erreicht. Um daraus einen Reflexionskoeffizienten zu gewinnen, müssen die jeweiligen Verluste der Reflexion und die am Koppelpunkt vorliegende Leistung gegeneinander gewichtet werden, um daraus den tatsächlichen Reflexionskoeffizienten zu gewinnen. Dabei sind die jeweiligen Transmissionen durch die Spleiße ( $s = 97,5\%$ ), die Koppelfasern ( $f = 95\%$ ) und den  $2 \times 2$ -Koppler ( $X = x^2 = 88,8\%$ ) zu berücksichtigen. Es ergibt sich daraus ein Reflexionskoeffizient von Resonator  $A$  von:

$$R_A^{kor} = \frac{f}{X} \frac{R_A}{T_e}. \quad (3.35)$$

Für den Resonator  $B$  ergibt sich entsprechend:

$$R_B^{kor} = \frac{1}{X f s^2} \frac{R_B}{T_e}. \quad (3.36)$$

Daraus ergeben sich mit den gemessenen Reflexionen von  $R_A = 50\%$  und  $R_B = 61,0\%$  die folgenden korrigierten Leistungsreflexionskoeffizienten:

$$R_A^{kor} = (53,4 \pm 3)\%, \quad (3.37)$$

$$R_B^{kor} = (76,1 \pm 3)\%. \quad (3.38)$$

Die Fehler sind nicht genau bestimmbar, weil nicht bekannt ist, wieviel Transmission die Koppelfasern seit dem Einbau verloren haben. Der Wert von  $f = 95\%$  bezieht sich auf die gemessene Transmission direkt nach dem Einbau. Die Transmission sinkt typischerweise um wenige Prozent innerhalb einer Stunde, was in etwa dem Zeitraum zwischen Messung und Einbau entspricht. Daher wird der Fehler zu  $3\%$  abgeschätzt.

Das Fehlen einer starken Kopplung bei dieser Messung ist bisher noch unverstanden. Im Rahmen dieser Arbeit wurde ebenfalls eine Simulation mit Hilfe der Wellentransfermatrizen durchgeführt. Die theoretische Behandlung dieses Systems ist jedoch komplex und konnte im Rahmen dieser Diplomarbeit nicht beendet werden.



# Zusammenfassung und Ausblick

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die starke Kopplung von Flaschenresonatormoden hoher und ultrahoher Güte für verschiedene Koppelmechanismen gezeigt.

Zur evaneszenten Kopplung der Resonatoren an ein äußeres Lichtfeld dienten ultradünne Glasfasern. Die Eigenschaften der evaneszenten Kopplung wurden zunächst charakterisiert. Dies hatte zum Ergebnis, dass die Kopplung eines Flaschenresonators an eine ultradünne Glasfaser als nahezu ideal angesehen werden kann. Um die Idealität der Kopplung zu messen, war es zunächst nötig den aus vorangegangenen Experimenten vorhandenen Koppelaufbau zu modifizieren. Des Weiteren war der Aufbau einer computergestützten Experimentsteuerung erforderlich. Die Auswertung der Daten geschah mit einem eigens zu diesem Zweck entwickelten Programm.

Nach der Charakterisierung der Kopplung von Flaschenmoden an Moden einer ultradünnen Glasfaser wurde die Kopplung von Flaschenmoden untereinander untersucht. Zunächst wurden Moden eines einzelnen Resonators gekoppelt. Dabei war es möglich, eine Kopplung gegenläufiger Moden gleicher Quantenzahl durch kohärente Rückstreuung zu beobachten. Die Kopplung der Moden war jedoch nicht beeinflussbar. Weiterhin gelang die Kopplung von Moden unterschiedlicher Polarisierung durch im Resonator auftretende nicht-polarisationserhaltende Streuung. Die spannungsinduzierte Doppelbrechung des Resonatormaterials wurde gezielt ausgenutzt, um die unterschiedlich polarisierten Moden aufeinander abzustimmen.

Auch Moden räumlich getrennter Resonatoren konnten erfolgreich gekoppelt werden. Dies gelang unter Verwendung eines Faserringresonators, der zwei ultradünne Taillen enthielt. An diese wurde jeweils ein Flaschenresonator gekoppelt. Diese Methode macht sich allein die Transmissionseigenschaften der Flaschenresonatoren zunutze. Zur Interpretation der Messergebnisse wurde zunächst das System aus Flaschenresonatoren und Faserring theoretisch mithilfe von Wellentransfermatrizen beschrieben. Dies führte zu einer numerischen Simulation der Transmissionseigenschaften, die mit den sich experimentellen Befunden reproduzieren und somit quantitativ erklären lassen. Eine Kopplung der Resonatoren mithilfe einer verbindenden Glasfaser durch Ausnutzung der kohärenten Rückstreuung im Resonatormaterial wurde ebenfalls versucht. Die Reflexion der Resonatormoden konnte erfolgreich gemessen werden. Bei diesem Experiment kam es jedoch nicht zu einer erwarteten starken Kopplung der Flaschenmoden. Die Gründe hierfür sind zur Zeit noch ungeklärt. Es wurde eine theoretische Behandlung dieses Systems gemacht um damit eine numerische Simulation durchzuführen. Im Rahmen dieser Arbeit konnte die Simulation jedoch nicht abgeschlossen werden.

Die gewonnenen Erkenntnisse zeigen, dass es mit den in dieser Arbeit vorgestellten Methoden möglich ist, Licht mit hoher Effizienz zwischen zwei räumlich getrennten Resonatoren ultrahoher auszutauschen. Diese Eigenschaft ist eine Grundvoraussetzung für den Aufbau

von Quantennetzwerken.

Als ein weiterer Schritt auf dem Weg zu einem funktionierenden Quantennetzwerk müssen einzelne Atome an das evaneszente Feld der Flaschenresonatoren gekoppelt werden. Dann ist es möglich, die in Atomen in Form eines Quantenzustands gespeicherte Information auf ein Photon des Resonatorfelds zu übertragen. Dieses Photon kann dann mit hoher Effizienz durch eine evaneszent an den Resonator gekoppelte Glasfaser entnommen und zur Informationsübertragung genutzt werden.

# A Theoretische Behandlung der Flaschenresonatormoden

Die theoretische Behandlung der Flaschenmoden ist vergleichbar zu der von Glasfasern. Zunächst soll ein dielektrischer Zylinder betrachtet werden. Anschließend folgt die Verallgemeinerung auf den Flaschenresonator.

Als Ausgangspunkt dienen wieder die Maxwell-Gleichungen (1.3), ausgedrückt in Zylinderkoordinaten. Aus ihnen folgt die Helmholtz-Gleichung (1.7), die für elektromagnetische Wellen  $\psi \propto e^{-i\omega t}$  erfüllt sein muss:

$$(\Delta + k^2)\psi = 0. \quad (\text{A.1})$$

Der Lösungsansatz unterscheidet sich wesentlich vom Ansatz für die Propagation in einer Faser (1.10). Man nimmt an, dass im Glaszylinder Flüstergaleriemoden in  $\phi$ -Richtung umlaufen, die keinen Impuls in  $z$ -Richtung haben. Als Lösungsansatz dient daher eine elektromagnetische Welle der Form ( $\Psi \propto e^{im\phi}$ ). Die Lösung ist zudem translationsinvariant entlang der  $z$ -Achse, woraus  $\partial_z^2 = 0$  folgt. Es ergibt sich die Bessel-Differentialgleichung (vgl. [35]):

$$\left( \partial_\rho^2 + \frac{1}{\rho} \partial_\rho + k^2 - \frac{m^2}{\rho^2} \right) \psi = 0. \quad (\text{A.2})$$

Unter der Annahme, dass der Impuls in  $z$ - und  $\rho$ -Richtung verschwindet ( $k_z = 0$ ,  $k_\rho = 0$ ) ist der Gesamtimpuls der Photonen durch  $k_\phi$  gegeben. Am Ort der Kaustiken ( $\pm z_c$ ) beschreibt Gleichung (A.2) die Situation exakt. Nun soll das Problem auf den gesamten Flaschenresonator verallgemeinert und mit geeigneten Vereinfachungen gelöst werden.

## Die Adiabatische Näherung

Die prolate Form  $r(z)$  des Flaschenresonators kann um seinen zentralen Bereich mit Durchmesser  $2r_0$  als parabolisch mit einer konstanten Krümmung  $\Delta k$  angenähert werden [35]:

$$r(z) = r_0 \left( 1 - \frac{1}{2} (\Delta k z)^2 \right) \quad (\text{A.3})$$

Ein Vergleich zwischen einem experimentell gefundenen Resonatorprofil und der Gleichung (A.3) zeigt im zentralen Bereich der strukturierten Faser, wo sich der Resonator befindet, eine gute Übereinstimmung. Siehe dazu Abbildung (2.9). Das Bestimmtheitsmaß  $R^2$  liegt nahe bei 1, was eine gute Übereinstimmung mit dem genäherten Profil indiziert.

Da der Resonator einer Rotationssymmetrie unterliegt, muss es eine Erhaltungsgröße geben. Man findet, dass der azimuthale Drehimpuls zeitlich konstant sein muss [35]. Die zeitliche Abhängigkeit lässt sich in eine Ortsabhängigkeit umformulieren:

$$\vec{l}_\phi = \hbar \vec{k}_\phi \times \vec{r}(z) = \text{const.}, \text{ für alle } |z| \leq z_c. \quad (\text{A.4})$$

Man erhält den Erhaltungssatz:

$$\partial_z r(z) k_\phi = 0. \quad (\text{A.5})$$

An den Kaustiken  $z = \pm z_c$  ist nach Bedingung (A.5)  $k_\phi$  am größten. Der Maximalwert  $k_{\phi, \max}$  wurde in [15] hergeleitet:

$$k_{\phi, \max} = \frac{m}{c_r r_c}. \quad (\text{A.6})$$

Die Konstante  $c_r$  ist ein Korrekturfaktor. Er muss eingeführt werden, da die Mode einen etwas kleineren Umlaufweg hat, als der Umfang des Resonators. In Verbindung mit der Drehimpulserhaltung folgt:

$$k_\phi(z) = k \frac{r_c}{r(z)}. \quad (\text{A.7})$$

An den Kaustiken verschwindet der axiale Impuls  $k_z = (\pm z_c) = 0$  und man erhält die Randbedingung  $k(\pm z_c) = k_\phi = k$ . Zwischen den Kaustiken sammelt das umlaufende Licht durch die Krümmung der Oberfläche in axialer Richtung einen zusätzlichen Impuls in  $\rho$ - und  $z$ -Richtung auf. Der axiale Impuls  $k_z$  variiert mit den Resonatorradius [15]:

$$k_z = \pm k \sqrt{1 - \left( \frac{r_c}{r(z)} \right)^2}. \quad (\text{A.8})$$

Senkrecht darauf steht der radiale Impulsvektor  $k_\rho$ , dessen Betrag sich entsprechend dem Radius mitverändert [15]:

$$k_\rho(z) = \frac{dr}{dz} k_z(z). \quad (\text{A.9})$$

Sein Betrag ist im Vergleich zu den Beiträgen der anderen Wellenvektoren sehr klein und kann daher vernachlässigt werden. Das wird als *adiabatische Näherung* bezeichnet. Es gilt somit für den Betrag des Wellenvektors:

$$k = \sqrt{k_z^2 + k_\phi^2} = \frac{2\pi n_{\text{eff}}}{\lambda}. \quad (\text{A.10})$$

Bei typischen Krümmungen der in dieser Arbeit verwendeten Flaschenresonatoren von  $\Delta k = 0,015 \mu\text{m}^{-1}$  Mit Formel (A.10) kann der relative Fehler berechnet werden, der aus der adiabatischen Näherung resultiert, er ergibt sich zu

$$1 - \frac{\sqrt{k_z^2 + k_\phi^2}}{\sqrt{k_z^2 + k_\phi^2 + k_\rho^2}} \approx 5,8 \cdot 10^{-8}, \quad (\text{A.11})$$

unter der Annahme folgender Werte:

$$\begin{aligned} (m, q) &= (280, 4) \\ r_c &= 17,43 \mu\text{m} \\ r_0 &= 17,52 \mu\text{m} \\ c_r &= 0,97 \\ z_c &= 8,41 \mu\text{m} \\ \Delta k &= 0,012 \mu\text{m}^{-1} \\ \lambda &= 849 \text{ nm} \\ n &= 1,467 \end{aligned}$$

Für die Berechnung des Fehlers aus einer numerischen Simulation wurden eine Polarisation parallel zur Resonatoroberfläche angenommen.

### Die Moden des Flaschenresonators

Wir sind nun in der Lage, Lösungen für die Moden des Flaschenresonators aus (A.2) zu finden. Da der Radius  $r$  von  $z$  abhängt, ist auch die Lösung des Radialanteils von  $z$  abhängig. Der Ansatz lautet [15]:

$$\psi(\rho, \phi, z) = Z(z)\Phi(\rho, r(z))M(\phi). \quad (\text{A.12})$$

Der Ansatz in die Helmholtzgleichung eingesetzt ergibt:

$$ZM\partial_\rho^2\Phi + ZM\frac{1}{\rho}\partial_\rho\Phi + M\Phi\partial_z^2Z + \frac{1}{\rho^2}\Phi Z\partial_\phi^2M + k^2\psi = 0. \quad (\text{A.13})$$

Die Lösung kann dank der adiabatischen Näherung separiert werden. Nach Umstellung findet man zwei linear unabhängige Gleichungen:

$$-\frac{1}{M}\partial_\phi^2M = C_1, \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\rho} + m^2\left(\frac{1}{r(z)} - \frac{1}{\rho^2}\right)\Phi = C_1. \quad (\text{A.15})$$

Die Lösung von Gleichung (A.14) ist schon aus dem Funktionsprinzip des Flüstergalerieresonators (2.3) bekannt. Man weiß, dass es sich um Laufwellen handeln muss, die einen Drehimpulsquantenzahl  $m$  besitzen:

$$M(\phi) = C_2 \cdot e^{(im\phi)}. \quad (\text{A.16})$$

$C_2$  ist eine frei wählbare Konstante.

Damit der Radialanteil oberer Gleichung eine physikalisch richtige Lösung ergibt, muss auf der Resonatoroberfläche  $\Phi$  und  $\frac{\partial\Phi}{\partial\rho}$  stetig sein (Randbedingung). Das gilt nur, wenn das elektrische Feld parallel oder senkrecht zur Oberfläche orientiert ist. Bei einer beliebigen Polarisation ist eine numerische Simulation notwendig. Die Lösungen zur Gleichung (A.15) für eine parallele Polarisation findet sich in [15, 35]:

$$\Phi_m(\rho, z) = A_m J_m(k_\phi \rho) \quad , \quad \rho < r(z), \quad (\text{A.17})$$

$$\Phi_m(\rho, z) = H_m^{(2)}\left(\frac{k_\phi \rho}{n}\right) + S_m H_m^{(1)}\left(\frac{k_\phi \rho}{n}\right) \quad , \quad \rho > r(z). \quad (\text{A.18})$$

Dabei stehen  $J_m(k_\phi \rho)$  und  $H_m^{(1),(2)}\left(\frac{k_\phi \rho}{n}\right)$  für die Bessel- und Hankelfunktionen. Die Koeffizienten  $A_m$  und  $S_m$  werden an die Randbedingungen angepasst.

Es fehlt noch die Lösung des  $Z(z)$ -Anteils aus der Gleichung. Zur Lösung wird die Dickenvariation des Resonators entlang der Faserachse wie folgt gewählt:

$$r = \frac{r_0}{\sqrt{1 + (\Delta k z)^2}}. \quad (\text{A.19})$$

Für kleine Krümmungen stimmt dieses Profil sehr gut mit dem angenommenem parabolischen Profil (A.3) überein. Das Problem ist nun dem des harmonischen Oszillators ähnlich:

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial z^2} + \left( k^2 - \frac{m^2}{R_0^2} - \frac{m^2 \Delta k^2}{R_0^2} z^2 \right) = 0. \quad (\text{A.20})$$

Da die Lösungen quadratintegrabel sind, ergibt sich ein Spektrum aus äquidistanten Energieniveaus mit den Eigenwerten:

$$E_{mq} = \left( q + \frac{1}{2} \right) \Delta E_m, \quad (\text{A.21})$$

$$\Delta E_m = \frac{2m\Delta k}{R_0}. \quad (\text{A.22})$$

Wie man sieht, hängt der Energieabstand der Moden allein von der Krümmung  $\Delta k$  des Resonators ab. Aus den Energieeigenwerten können schließlich die Impulseigenwerte Abgeleitet werden:

$$k_{mq} = \sqrt{\frac{m^2}{R_0^2} + \left( q + \frac{1}{2} \right) \Delta E_m}. \quad (\text{A.23})$$

und der dazugehörigen Lösung von Gleichung (A.20):

$$Z_{mq}(z) = C_{mq} H_q \left( \sqrt{\frac{\Delta E_m}{2}} z \right) \exp \left( -\frac{\Delta E_m}{4} z^2 \right). \quad (\text{A.24})$$

$H_q$  ist analog zur Lösung des quantenmechanischen harmonischen Oszillators das Hermite-Polynom der Ordnung  $q$ .  $C_{mq}$  ist ein Normierungsfaktor:

$$C_{mq} = \left[ \frac{\Delta E_m}{\pi \cdot 2^{2q+1} (q!)^2} \right]^{\frac{1}{4}}. \quad (\text{A.25})$$

Aus der Wellenfunktion des Radial- und Winkelteils  $\Psi_{mq}(\rho, z) = \Phi_m(\rho, z) Z_{mq}(z)$  lässt sich die Intensitätsverteilung der Flaschenresonatormoden  $I_{mq}(\rho, z) \propto |\Psi_{mq}(\rho, z)|^2$  entlang seiner Achse berechnen. Die größten Intensitäten und damit die größten evaneszenten Felder werden an den Kaustiken erreicht. Das Feld ist an den Kaustiken etwa viermal stärker, als in der Resonatormitte. Das macht die Kaustiken zu idealen Koppelpositionen für ultradünne Fasern oder Atome.

Mit vollständiger Kenntnis der Energieeigenwerte (A.23) ist auch der freie Spektralbereich zwischen den Moden bekannt [15]. Bei schwacher Krümmung  $\Delta k r_0 \ll 1$  kann  $k_{mq}$  durch eine Taylorentwicklung erster Ordnung genähert werden. Es folgt für die Resonanzfrequenzen des Flaschenresonators:

$$\nu = \frac{c}{2\pi n} \frac{m}{c_r r_0} \left( 1 + \frac{\Delta k c_r r_0 \left( q - \frac{1}{2} \right)}{m} \right). \quad (\text{A.26})$$

## B Bemerkung zur Verbesserung der Experimente

Durch die Erfahrungen, die im Rahmen der durchgeführten Experimente gesammelt wurden, konnte zudem eine Reihe von Punkten identifiziert werden, deren Verbesserung bzw. Optimierung im weiteren Verlauf des Projekts angegangen werden sollte.

### Frequenzstabilisierung der Resonatormoden

- **aktive Stabilisierung**

Es hat sich gezeigt, dass die Flaschenresonatoren in einem weiten Frequenzbereich beliebig abstimmbare sind. Um weiterführende Experimente auf dem Gebiet der Resonator-Quantenelektrodynamik durchzuführen, ist es nötig die Resonanzfrequenz der Flaschenmoden aktiv zu stabilisieren. Damit beschäftigt sich zur Zeit ein Experiment in dieser Arbeitsgruppe. Davon würde auch die transmittive Kopplung zweier räumlich getrennter Flaschenresonatoren profitieren. Mit einer aktiven Stabilisierung wäre es möglich, die Resonanzfrequenzen zweier Flaschenresonatoren gezielt aufeinander abzustimmen und so die Modenkopplung gezielt zu beeinflussen. In dem hier vorgestellten Experiment war das aufgrund der schlechten passiven Frequenzstabilität nicht möglich und die Messungen daher nur begrenzt reproduzierbar.

- **akustische Isolation**

Starke Störungen der Resonanzfrequenz einzelner Moden traten zudem durch akustische Störungen im Labor und thermische Effekte in der Umgebung der Flaschenresonatoren auf. Dies ließe sich durch eine akustisch isolierte Schutzkiste erreichen. Der Koppelaufbau selbst ist zudem direkt mit dem optischen Tisch verschraubt. Das hat zur Folge, dass auch über den Koppelaufbau mechanische Schwingungen den Resonator erreichen.

- **Rauschunterdrückung der Piezo-Versorgungsspannung**

In den durchgeführten Experimenten diente ein Isolationsverstärker dazu, Rauschen in der Spannungsversorgung der Biegepiezoaktuatoren zu verringern. Das Rauschen konnte jedoch nicht vollständig beseitigt werden, was zu einer Störung der Resonanzfrequenz führte. Obwohl diese Störung in den Experimenten keinen ausschlaggebenden Effekt hatte, könnte durch zusätzliche Filter oder eine alternative Spannungsquelle die Rauschunterdrückung verbessert werden.

### Transmittive Kopplung

- **Verkürzen des Faserrings**

Es hat sich herausgestellt, dass der transmittive Ansatz zur Kopplung zweier Fla-

schenresonatoren erfolgversprechend ist. Die relative Frequenzstabilität des Faserringresonators und der Flaschenresonatoren war bei der hier vorgestellten transmittiven Kopplung jedoch ein Problem. Die Faserringmoden koppeln stark an die Flaschenmoden, weshalb die Kopplung der beiden Flaschenmoden in Abwesenheit einer Faserringmode nicht zu beobachten war. Eine Lösungsmöglichkeit wäre, den Faserring zu verkürzen und so seinen freien Spektralbereich zu vergrößern. Dazu müssten die Koppelaufbauten anders angeordnet und gegebenenfalls andere Faserhalter verwendet werden.

- **Optimierung der evaneszenten Kopplung**

Die Kopplung der Flaschenresonatoren ist innerhalb des Faserrings nicht direkt überprüfbar. Die Polarisationsanpassung der Flaschenmoden kann nur optimal eingestellt werden, wenn die Transmissionskurve der Flaschenmoden direkt beobachtbar ist. Um dies zu erreichen, müsste der Faserring aufgetrennt werden, um die Transmission durch die freibleibenden Enden zu betrachten. Ein in den Ring eingespleißter schaltbarer Y-Faserkoppler könnte dieses Problem lösen. Allerdings haben solche kommerziell erhältlichen Koppler eine zu große Dämpfung und würden weshalb sich die Finesse des Rings zu stark erniedrigen.

- **Polarisationsanpassung**

Die Polarisationsanpassung der Flaschenmoden innerhalb des Faserrings kann nur begrenzt optimiert werden, da nur eine Polarisationskontrolle vorhanden ist. Für eine Anpassung der Polarisation benötigt man jedoch drei Polarisationskontrollen, eine für den Faserring und zwei für die Flaschenresonatoren. Das ist mit den bisher verwendeten Polarisationskompensatoren nicht möglich, da die Länge des Rings sonst zu lang und damit der FSR zu klein werden würde. Eine Lösung hierfür könnte sein, piezoelektrische Polarisationsmanipulatoren zu verwenden. Diese sind äußerst kompakt und die dafür benötigte Faserlänge ist vergleichsweise gering.

# Literaturverzeichnis

- [1] Saleh, B. & Teich, M. C. *Grundlagen der Photonik*, vol. 2 (Wiley VCH, 2008).
- [2] Vahala, K. J. Optical microcavities. *Nature* **424**, 839–846 (2003).
- [3] Djordjev, K. D., Lin, C.-K., Zhu, J., Bour, D. & Tan, M. R. Folded-cavity resonators as key elements for optical filtering and low-voltage electroabsorption modulation. *J. Lightwave Technol.* **24**, 3464 (2006).
- [4] Almeida, V. R., Barrios, C. A., Panepucci, R. R. & Lipson, M. All-optical control of light on a silicon chip. *Nature* **450**, 1081–1084 (2004).
- [5] Sandoghdar, V. & et al. Very low threshold whispering-gallery-mode microsphere laser. *Phys. Rev. A* **54**, R1777–R1780 (1996).
- [6] Tureci, H., Schwefel, H., Stone, A. & Narimanov, E. Gaussian-optical approach to stable periodic orbit resonances of partially chaotic dielectric micro-cavities. *Opt. Express* **10**, 752–776 (2002).
- [7] Kippenberg, T. J., Spillane, S. M., Armani, D. K. & Vahala, K. J. Ultralow-threshold microcavity raman laser on a microelectronic chip. *Opt. Lett.* **29**, 1224–1226 (2004).
- [8] Serpengüzel, A., Arnold, S. & Griffel, G. Excitation of resonances of microspheres on an optical fiber. *Opt. Lett.* **20**, 654–656 (1995).
- [9] Arnold, S., Khoshsima, M., Teraoka, I., Holler, S. & Vollmer, F. Shift of whispering-gallery modes in microspheres by protein adsorption. *Opt. Lett.* **28**, 272–274 (2003).
- [10] Kimble, H. J. The quantum internet. *Nature* **453**, 6768–6773 (2008).
- [11] Wilk, T., Webster, S. C., Kuhn, A. & Rempe, G. Single-Atom Single-Photon Quantum Interface. *Science* **317**, 488–490 (2007).
- [12] Michler, P. & et al. A quantum dot single-photon turnstile device. *Science* **290**, 2282–2285 (2000).
- [13] Khudaverdyan, M. *et al.* Controlled insertion and retrieval of atoms coupled to a high-finesse optical resonator. *New Journal of Physics* **10** (2008).
- [14] Rempe, G., Thompson, R. J., Kimble, H. J. & Lalezari, R. Measurement of ultralow losses in an optical interferometer. *Opt. Lett.* **17**, 363–365 (1992).
- [15] Warken, F. *Ultradünne Glasfasern als Werkzeug zur Kopplung von Licht und Materie*. Doktorarbeit, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn (2007).
- [16] Meschede, D. *Optik, Licht und Laser, 2. Auflage* (Teubner, 2005).

- [17] Leung, A., Shankar, P. & Mutharasan, R. A review of fiber-optic biosensors. *Sensors and Actuators B* **125**, 688–703 (2007).
- [18] Tipler, P. A. *Physik* (Spektrum Akademischer Verlag, 2000).
- [19] Stokes, L. F., Chodorow, M. & Shaw, H. J. All-single-mode fiber resonator. *Optics Letters* **7**, 288–290 (1982).
- [20] Thorlabs Inc., <http://www.thorlabs.com/Thorcat/17700/17745-D02.pdf>. *Technisches Produktdatenblatt FPC020*.
- [21] Yariv, A. *Optical electronics, fourth edition* (Saunders college publishing, 1991).
- [22] Sumetsky, M. Vertically-stacked multi-ring resonator. *Opt. Express* **13**, 6354–6375 (2005).
- [23] Warken, F., Rauschenbeutel, A. & Bartholomäus, T. Fiber pulling profits from precise positioning. *Photonics Spectra* **42**, 73–75 (2008).
- [24] Vahala, K. *Optical Microcavities* (World Scientific Pub Co, 2004).
- [25] Matsko, A. B. & Ilchenko, V. S. Optical resonators with whispering-gallery modes, part 1 basics. *IEEE J. OF Sel. Top. Quant.* **12**, 3–14 (2006).
- [26] Savchenkov, A. A., Matsko, A. B., Ilchenko, V. S. & Maleki, L. Optical resonators with ten million finesse. *Opt. Express* **15**, 6768–6773 (2007).
- [27] Gorodetsky, M. L., Savchenkov, A. A. & Ilchenko, V. S. Ultimate q of optical microsphere resonators. *Opt. Lett.* **21**, 453–455 (1996).
- [28] Kippenberg, T. J., Spillane, S. M. & Vahala, K. J. Demonstration of ultra-high-q small mode volume toroidal microcavities on a chip. *Applied Physics Letters* **85**, 6113–6115 (2004).
- [29] Srinivasan, K., Barclay, P. E., Borselli, M. & Painter, O. Optical-fiber-based measurement of an ultrasmall volume high-q photonic crystal microcavity. *Phys. Rev. B (Condensed Matter and Materials Physics)* **70**, 081306 (2004).
- [30] Lopez, C. Silicon photonic crystals. *Optics and photonics news* **20**, 28–33 (2009).
- [31] Park, W. & Lee, J.-B. Mechanically tunable photonic crystals. *Optics and photonics news* **20**, 40–45 (2009).
- [32] Russell, P. Photonic crystal fibers. *Science* **299**, 358–362 (2003).
- [33] Akahane, Y., Asano, T., Song, B. S. & Noda, S. High-q photonic nanocavity in a two-dimensional photonic crystal. *Nature* **425**, 944–947 (2003).
- [34] Chauvin, N. *et al.* Enhanced spontaneous emission from InAs/GaAs quantum dots in pillar microcavities emitting at telecom wavelengths. *Opt. Lett.* **32**, 2747–2749 (2007).
- [35] Louyer, Y., Meschede, D. & Rauschenbeutel, A. Tunable whispering-gallery-mode resonators for cavity quantum electrodynamics. *Physical Review A (Atomic, Molecular, and Optical Physics)* **72**, 031801 (2005).

- 
- [36] von Klitzing, W., Long, R., Ilchenko, V., Hare, J. & Lefève-Seguin, V. Frequency tuning of the whispering-gallery modes of silica microspheres for cavity quantum electrodynamics and spectroscopy. *Opt. Lett.* **26**, 166–168 (2001).
- [37] Steck., D. A. Cesium d line data 17 (2008). URL <http://steck.us/alkalidata>.
- [38] Pöllinger, M., O’Shea, D., Warken, F. & Rauschenbeutel, A. Ultra-high-q tunable whispering-gallery-mode microresonator. *zur Veröffentlichung eingereicht* (2008).
- [39] Poon, J. K. S. *Active and Passive Coupled-Resonator Optical Waveguides*. Doktorarbeit, California Institute of Technology (2007).
- [40] Knight, J. C., Cheung, G., Jacques, F. & Birks, T. A. Phase-matched excitation of whispering-gallery-mode resonances by a fiber-taper. *Optics Letters* **22**, 1129–1131 (1997).
- [41] Spillane, S. M., Kippenberg, T. J., Painter, O. J. & Vahala, K. J. Ideality in a fiber-taper-coupled microresonator system for application to cavity quantum electrodynamics. *Phys. Rev. Lett.* **91**, 043902 (2003).
- [42] Spillane, S. M. *Fiber-coupled ultra-high-Q microresonators for nonlinear and quantum optics*. Doktorarbeit, California Institute of Technology, Pasadena, California (2004).
- [43] Kippenberg, T. J. A. *Nonlinear Optics in Ultra-high-Q Whispering-Gallery Optical Microcavities*. Doktorarbeit, California Institute of Technology, Pasadena, California (2004).
- [44] Physik Instrumente GmbH, <http://www.physikinstrumente.de/de/pdf/>. *Technisches Produktdatenblatt P853*.
- [45] Rokhsari, H. & Vahala, K. Observation of kerr nonlinearity in microcavities at room temperature. *Opt. Lett.* **30**, 427–429 (2005).
- [46] Gorodetsky, M. L. & Ilchenko, V. S. Optical microsphere resonators: optimal coupling to high-q whispering-gallery modes. *J. Opt. Soc. Am. B* **16**, 147–154 (1999).
- [47] Rauschenbeutel, A. private kommunikation.
- [48] Gorodetsky, M. L., Pryamikov, A. D. & Ilchenko, V. S. Rayleigh scattering in high-q microspheres. *J. Opt. Soc. Am. B* **17**, 1051–1057 (2000).
- [49] von Klitzing, W., Long, R., Ilchenko, V. S., Hare, J. & Lefèvre-Seguin, V. Frequency tuning of the whispering-gallery modes of silica microspheres for cavity quantum electrodynamics and spectroscopy. *Opt. Lett.* **26**, 166–168 (2001).
- [50] Savchenkov, A. A., Ilchenko, V. S., Matsko, A. B. & Maleki, L. High-order tunable filters based on a chain of coupled crystalline whispering gallery-mode resonators. *IEEE Photonics Technology Letters* **17**, 166–168 (2005).
- [51] Smith, D. D., Chang, H. & Fuller, K. A. Whispering-gallery mode splitting in coupled microresonators. *J. Opt. Soc. Am. B* **20**, 1967–1974 (2003).

- [52] Poon, J. *et al.* Matrix analysis of microring coupled-resonator optical waveguides. *Opt. Express* **12**, 90–103 (2004).
- [53] Poon, J. K., Scheuer, J. & Yariv, A. Microring coupled-resonator optical waveguides. In *Optical Fiber Communication Conference*, MF29 (Optical Society of America, 2004).
- [54] Liang, W. *et al.* Transmission characteristics of a fabry-perot etalon-microtoroid resonator coupled system. *Opt. Lett.* **31**, 510–512 (2006).
- [55] Xu, Y., Li, Y., Lee, R. K. & Yariv, A. Scattering-theory analysis of waveguide-resonator coupling. *Phys. Rev. E* **62**, 7389–7404 (2000).
- [56] Dumeige, Y. Miniaturization of fresnel phase matching using a side-coupled integrated spaced sequence of resonators (scissor). *Opt. Lett.* **32**, 3438–3440 (2007).
- [57] Heebner, J. E. & Boyd, R. W. Enhanced all-optical switching by use of a nonlinear fiber ring resonator. *Opt. Lett.* **24**, 847–849 (1999).