

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Quantum nondemolition measurements - Rückwirkungsfreie quantenmechanische Messungen

Simon Birkholz

3. Februar 2009

- 1 Zum Begriff der QND-Messung
- 2 Kriterien der QND-Messung
- 3 Konzept einer QND-Messung
- 4 Realisierung einer QND-Messung

Entwicklung des Begriffes der QND-Messung

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

- Genauigkeit quantenmechanischer Messung durch Heisenberg'sche Unschärferelation begrenzt:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad (1)$$

- seit 1974: theoretische Vorschläge für Messungen unterhalb des 'Standard Quantum Limit'

$$\Delta x_{SQL} = \sqrt{\frac{h\tau}{4\pi m}} \quad (2)$$

durch Braginsky et al. ¹

- seit 1986: Demonstration einer QND-Messung in quantenoptischem Experiment durch Levenson et al. ²

¹V.B. Braginsky, Yu.I. Vorontsov: Usp. Fiz. Nauk. 114, 41 (1974)

²M.D. Levenson, R.M. Shelby, M. Reid, D.F. Walls: Phys. Rev. Lett. 57, 2473 (1986)

Anforderungen an QND-Messung

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

- keine Löschung der System-Information durch Messvorgang
- aufeinanderfolgende Messungen möglich
- vorangehende Messung legt nachfolgendes Messergebnis fest

Anmerkung

Anforderungen beziehen sich nur auf eine Variable des Systems
→ 'Verschmierung' der kanonisch konjugierten Variable spielt keine Rolle

Grundbegriffe der quantenmechanischen Messung

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

- zu untersuchen: Signal-Observable A_S eines Systems S
- beobachte: Mess-Observable A_M des Systems M
- M koppelt an S (ohne S zu stören) \rightarrow WW-System MS
- Hamilton-Operator des Gesamtsystems:

$$H = H_S + H_M + H_{MS} \quad (3)$$

Kriterien der QND-Messung

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

- a) Wechselwirkungssystem von Signal-Observable abhängig

$$\frac{\partial H_{MS}}{\partial A_S} \neq 0 \quad (4)$$

- b) Messobservable ist keine Konstante der Bewegung im Wechselwirkungssystem

$$\dot{A}_M \neq 0 \rightarrow [A_M, H_{MS}] \neq 0 \quad (5)$$

- c) Signalobservable ist Konstante der Bewegung im Wechselwirkungssystem

$$[A_S, H_{MS}] = 0 \quad (6)$$

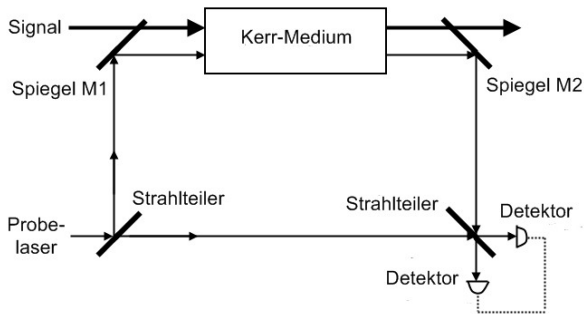
- d) Signalobservable ist Konstante der Bewegung im Signal-System S

$$[A_S, H_S] = 0 \quad (7)$$

Konzept einer QND-Messung: Photonenzahlmessung mittels des Kerr-Effektes ³

$$\text{Kerr-Effekt: } n = n_0 + n_2 E^2$$

$$\text{Phasenverschiebung: } \psi = \psi_0 e^{ikx} = \psi_0 e^{ik_0(n_0 + n_2 E_{\text{Signal}}^2)x} \quad (8)$$



³nach Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Quantum Optics,

Hamilton-Operatoren und Signal-Observable

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Hamilton-Operatoren:

$$H_S^4 = \frac{\hbar}{2\pi} \omega_S \left(a_S^+ a_S + \frac{1}{2} \right) \quad (9)$$

$$H_M = \frac{\hbar}{2\pi} \omega_M \left(a_M^+ a_M + \frac{1}{2} \right) \quad (10)$$

$$H_{MS} = C \omega_M \omega_S (a_M^+ a_M a_S^+ a_S) \quad (11)$$

Signal-Observable:

$$A_S = a_S^+ a_S \quad (\text{Photonenzahl-Operator}) \quad (12)$$

⁴Vgl. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Springer, 2007 [S. 297 - 298]; a^+ : Erzeugungso. a : Vernichtungso.; $[a, a^+] = 1$

Mess-Observable

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwirkungs-
freie quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$\exp(i\phi_M) = \frac{a_M}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} \quad (13)$$

$$\exp(-i\phi_M) = \frac{a_M^+}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} \quad (14)$$

$$A_M = \sin(\phi_M) = \frac{1}{2i} [\exp(i\phi_M) - \exp(-i\phi_M)] \quad (15)$$

mit Gleichung (13) und Gleichung (14) folgt

$$A_M = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} a_M - a_M^+ \frac{1}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} \right) \quad (16)$$

Kriterium a: Signal-Observable ist von Mess-System abhängig

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$\frac{\partial H_{MS}}{\partial A_S} \neq! 0 \quad \text{erfüllt!} \quad (17)$$

klar:

$$H_{MS} \propto (a_M^+ a_M a_S^+ a_S)$$

und

$$A_S = a_S^+ a_S$$

Kriterium b: Mess-Observable in WW.-System nicht konstant

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$[A_M, H_{MS}] \neq^! 0 \quad \text{erfüllt!} \quad (18)$$

ist einzusehen, da a_M und a_M^+ nicht kommutieren

$$A_M \propto \left(\frac{1}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} a_M - a_M^+ \frac{1}{\sqrt{a_M^+ a_M + 1}} \right)$$
$$H_{MS} = C \omega_S \omega_M (a_M^+ a_M a_S^+ a_S)$$

Kriterium c: Signal-Observable in WW.-System konstant

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$[A_S, H_{MS}] \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{erfüllt!} \quad (19)$$

$$H_{MS} = C\omega_S\omega_M (a_M^+ a_M a_S^+ a_S) = C' n_M n_S$$

$$A_S = a_S^+ a_S$$

$$\begin{aligned} [A_S, H_{MS}] &= C' [a_S^+ a_S, n_M n_S] \\ &= C' (n_M [a_S^+ a_S, n_S] + [a_S^+ a_S, n_M] n_S) \\ &= C' (n_M a_S^+ a_S - n_M a_S^+ a_S) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{mit } [a, n] = a \quad \text{und} \quad [a^+, n] = -a^+$$

Kriterium d: Signal-Observable in Signal-System konstant

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$[A_S, H_S] \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{alle 4 Kriterien erfüllt!} \quad (20)$$

$$H_S \propto \left(a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2} \right)$$

$$\begin{aligned} [A_S, H_S] &= [n_S, a_S^\dagger a_S + \frac{1}{2}] \\ &= a_S^\dagger [n_S, a_S] + [n_S, a_S^\dagger] a_S \\ &= 0 \end{aligned}$$

mit $[n, a] = -a$ und $[n, a^\dagger] = a^\dagger$

Betrachtung der Mess-Observable

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$\begin{aligned} i \frac{\hbar}{2\pi} \frac{\partial a_M^+}{\partial t} &= [a_M^+, H_{MS}] & (21) \\ &= C\omega_S\omega_M (a_M^+ a_S^+ a_S) \end{aligned}$$

Bew.gesch. d. Signals: $v = \frac{dz}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{da_M^+(z)}{dz} = -\frac{i\kappa}{v} A_S a_M^+ \quad (22)$$

$$\Rightarrow a_M^+(z) = a_M^+(0) \exp\left(-\frac{i\kappa}{v} A_S z\right) \quad (23)$$

Betrachtung der Mess-Observable

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

$$\begin{aligned}a_M^+(z) &= a_M^+(0) \exp\left(-\frac{i\kappa}{v} A_S z\right) \\ a_M^+(L) &= a_M^+(0) \exp\left(-\frac{i\kappa}{v} A_S L\right)\end{aligned}\quad (24)$$

L: Länge des Kerr-Mediums
analog $a_M(z)$:

$$a_M(L) = a_M(0) \exp\left(\frac{i\kappa}{v} A_S L\right)\quad (25)$$

Betrachtung der Mess-Observable

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Mit der Mess-Observable

$$A_M(z) \propto \frac{1}{\sqrt{n_M + 1}} a_M(z) - a_M^+(z) \frac{1}{\sqrt{n_M + 1}}$$

$$\text{folgt mit } a_M^+(L) = a_M^+(0) e^{-\frac{i\kappa}{v} A_S L} \quad (26)$$

$$\text{und } a_M(L) = a_M(0) e^{\frac{i\kappa}{v} A_S L} \quad (27)$$

$$A_M(L) \propto \frac{1}{\sqrt{n_M + 1}} a_M(0) e^{\frac{i\kappa}{v} A_S L} - a_M^+(0) e^{-\frac{i\kappa}{v} A_S L} \frac{1}{\sqrt{n_M + 1}}$$

Realisierung einer QND Messung⁵

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

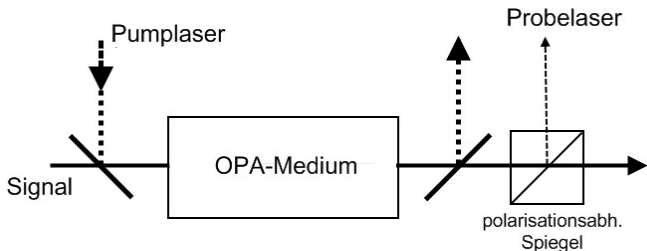
Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Messung mittels optischer parametrischer Verstärkung



⁵nach Bencheikh, Simonneau, Levenson, *Phys. Rev. Let.* **78**, 1 (1997)

Realisierung einer QND-Messung

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Transferkoeffizient:

$$T_S = \frac{R_{out, S}}{R_{in, S}} \quad (28)$$

$$T_M = \frac{R_{out, M}}{R_{in, S}} \quad (29)$$

Signal-Rausch-Verhältniss:

$$R = \frac{\langle X \rangle^2}{\langle \Delta X^2 \rangle} \quad (30)$$

Realisierung einer QND-Messung - cont.

Quantum
nondemolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Betrachte Summe aus Transferkoeffizienten:
'klassischer Fall':

$$T_S + T_M < 1 \quad (31)$$

Ideale QND-Messung:

$$T_S + T_M = 2 \quad (32)$$

$$T = \frac{R_{in}}{R_{out}} \quad \text{und} \quad R = \frac{\langle X \rangle^2}{\langle \Delta X^2 \rangle}$$

Realisierung einer QND-Messung - cont.

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen

Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

Von Bencheikh, Simonneau, und Levenson gemessen (1996):

$$T_S + T_M = 1.53 \quad (33)$$

Resultat

- Prinzipielle Möglichkeit einer QND-Messung kann gezeigt werden
- Experimentelle Resultate weit von idealer QND-Messung entfernt

Quellen

Quantum
non-demolition
measurements
- Rückwir-
kungsfreie
quantenme-
chanische
Messungen







Simon
Birkholz

Zum Begriff
der
QND-Messung

Kriterien der
QND-Messung

Konzept einer
QND-Messung

Realisierung
einer
QND-Messung

-  Marlan O. Scully, M. Suhail Zubairy, Quantum Optics, Cambridge University Press, 2002
-  Serge Haroche, Jean-Michel Raimond, Exploring the Quantum, Oxford Graduate Texts, 2006
-  V. B. Braginsky, F. A. Khalili, Quantum Measurement, Cambridge Univ. Press, 1992
-  W. Nolting, Grundkurs Theoretische Physik 5/1, Springer, 2007
-  N. Imoto, H. A. Haus, Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **32**, 2287 (1985)
-  K. Bencheikh, C. Simonneau, and J. A. Levenson, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 1 (1997)