

Bellsche Ungleichungen

Christoph Meyer

Seminar - Grundlagen der Quantenphysik

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Das EPR-Paradoxon
 - Verborgene Variablen
- 2 Die Bellsche Ungleichung
 - Herleitung
 - Vergleich mit Quantenmechanik
- 3 Das GHZ-Argument
 - Quantenmechanisch
 - Lokal&Realistisch
 - Vergleich mit Experiment
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Das EPR-Paradoxon
 - Verborgene Variablen
- 2 Die Bellsche Ungleichung
 - Herleitung
 - Vergleich mit Quantenmechanik
- 3 Das GHZ-Argument
 - Quantenmechanisch
 - Lokal&Realistisch
 - Vergleich mit Experiment
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Das EPR-Paradoxon
 - Verborgene Variablen
- 2 Die Bellsche Ungleichung
 - Herleitung
 - Vergleich mit Quantenmechanik
- 3 Das GHZ-Argument
 - Quantenmechanisch
 - Lokal&Realistisch
 - Vergleich mit Experiment
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

Inhaltsverzeichnis

- 1 Einführung
 - Das EPR-Paradoxon
 - Verborgene Variablen
- 2 Die Bellsche Ungleichung
 - Herleitung
 - Vergleich mit Quantenmechanik
- 3 Das GHZ-Argument
 - Quantenmechanisch
 - Lokal&Realistisch
 - Vergleich mit Experiment
- 4 Zusammenfassung und Ausblick

EPR Paradoxon

- Zwei verschränkte Teilchen (z.B. Spin 1/2 Teilchen¹)

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle - |01\rangle)$$

- Durch Messung an einem Teilchen, kennt man den Messwert am anderen Teilchen.
- Damit kann man zum Beispiel den Wert von zwei verschiedenen Spinkomponenten desselben Teilchens gleichzeitig wissen.

¹D. Bohm, *Discussion of Experimental Proof for the Paradox of Einstein, Rosen, and Podolsky*, Phys. Rev. 108, 1070 (1957)

Ist die Quantenmechanik vollständig?

- Realitätsbegriff nach EPR:

Kann man den Wert einer physikalischen Größe mit Sicherheit vorhersagen, ohne ein System zu stören, dann gibt es ein Element der physikalischen Realität, das dieser Größe entspricht.

- Da in der Quantenmechanik nichtkommutierende Observablen nicht gleichzeitig einen scharfen Wert haben können, diese aber nach obigem Argument Element der Realität sind, ist nach EPR die Quantenmechanik nicht vollständig.

²A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Phys. Rev. 47, 777 (1935)

Vervollständigung

- Vervollständigung der Quantenmechanik mit verborgenen Variablen zu einer lokalen und realistischen Theorie (z. B. Bohmsche Mechanik)

Lokalität

Der Messwert an einem Teilchen wird durch nichts beeinflusst, das raumartig getrennt am anderen Teilchen passiert.

Realität

Der Ausgang einer Messung steht auch ohne Messung zu jedem Zeitpunkt fest.

- EPR interpretieren die instantanen Korrelationen als Folge einer lokalen realistischen Theorie

Annahmen

- J. S. Bell veröffentlicht 1964 eine Ungleichung die von lokalen realistischen Theorien erfüllt werden muss.
- Betrachte zwei Spin 1/2 Teilchen 1 und 2 im Singulettzustand und nehme Lokalität und Realität an.
- Messergebnisse werden wie folgt bezeichnet:

$$M_1(\vec{a}) = \pm 1 \quad M_2(\vec{b}) = \pm 1$$

- Es muss gelten:

$$M_1(\vec{a}) = -M_2(\vec{a})$$

³J.S. Bell, *On the Einstein Podolsky Rosen paradox*, Physics Vol. 1, No. 3, pp 195-200 (1964)

Herleitung

- Betrachte Korrelation der Messergebnisse bei 1 und 2 in Richtung \vec{a} , \vec{b} und \vec{c}

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \langle M_1(\vec{a})M_2(\vec{b}) \rangle = -\langle M_1(\vec{a})M_1(\vec{b}) \rangle$$

- Sei $n(\alpha, \beta, \gamma)$ der relative Anteil der Fälle bei denen $M_1(\vec{a}) = \alpha$, $M_1(\vec{b}) = \beta$, $M_1(\vec{c}) = \gamma$ ist. Mit $\alpha, \beta, \gamma = \pm 1$

$$\sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) = 1$$

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \cdot \beta$$

⁴G. Münster, *Quantentheorie*, de Gruyter, Berlin, Kap. 21.2

Herleitung

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \cdot \beta$$

$$\begin{aligned} P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c}) &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha(\beta - \gamma) \\ &= - \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \beta (1 - \beta \gamma) \end{aligned}$$

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| = \left| \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) \alpha \beta (1 - \beta \gamma) \right|$$

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma) (1 - \beta \gamma)$$

Herleitung

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq \sum_{\alpha, \beta, \gamma} n(\alpha, \beta, \gamma)(1 - \beta\gamma)$$

Bells Ungleichung

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| \leq 1 + P(\vec{b}, \vec{c})$$

Rechnung mit Quantenmechanik

- Wähle Richtungen wie folgt:

$$\vec{a} = (1, 0, 0), \quad \vec{b} = (0, 1, 0), \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0)$$

- Korrelation nach Quantenmechanik:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4}{\hbar^2} \langle (\vec{S}^A \cdot \vec{a})(\vec{S}^B \cdot \vec{b}) \rangle$$

Rechnung mit Quantenmechanik

- Für diese spezielle Wahl der Messrichtungen ergeben sich aus der Quantenmechanik folgende Korrelationen:

$$P(\vec{a}, \vec{b}) = 0$$

$$P(\vec{a}, \vec{c}) = P(\vec{b}, \vec{c}) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \approx -0.707$$

$$|P(\vec{a}, \vec{b}) - P(\vec{a}, \vec{c})| = 0.707 \qquad 1 + P(\vec{b}, \vec{c}) = 0.293$$

- Bellsche Ungleichung offensichtlich nicht erfüllt:

$$0.707 \leq 0.293$$

Was bedeutet das?

- Durch die Bellsche Ungleichung ist es experimentell entscheidbar, ob eine lokale realistische Theorie mit dem Experiment verträglich ist oder nicht.
- Experiment mit polarisierten Photonen (A. Aspect et al.⁵) ergab exzellente Übereinstimmung mit Quantenmechanik.

⇒ Die Natur ist nicht lokal und realistisch zugleich!

⁵Alain Aspect, Philippe Grangier, and Gérard Roger, *Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem*, *Phys. Rev. Lett.* **47**, 460 (1981) 

Der Greenberger-Horne-Zeilinger Zustand

- Betrachte GHZ-Zustand:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow_1\uparrow_2\uparrow_3\rangle - |\downarrow_1\downarrow_2\downarrow_3\rangle)$$

$$\hat{P} = \sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)} \quad \hat{Q} = \sigma_y^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_y^{(3)} \quad \hat{R} = \sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_x^{(3)}$$

- σ_x und σ_y machen Spin-flips:

$$\sigma_x|\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \quad \sigma_x|\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \quad \sigma_y|\uparrow\rangle = i|\downarrow\rangle \quad \sigma_y|\downarrow\rangle = -i|\uparrow\rangle$$

- Wende obige Operatoren auf GHZ-Zustand an:

$$\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)}|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(i^2|\downarrow_1\downarrow_2\downarrow_3\rangle - (-i)^2|\uparrow_1\uparrow_2\uparrow_3\rangle) = |\Psi\rangle$$

⁶M.O. Scully and M. Suhail Zubairy, *Quantum Optics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1997, Ch. 18.5

Quantenmechanische Voraussage

- Analog findet man

$$\hat{Q}|\Psi\rangle = \hat{R}|\Psi\rangle = |\Psi\rangle$$

- $|\Psi\rangle$ ist Eigenvektor von \hat{P} , \hat{Q} und \hat{R} mit Eigenwert $+1$

$$\begin{aligned}\hat{P}\hat{Q}\hat{R} &= (\sigma_x^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_y^{(3)})(\sigma_y^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_y^{(3)})(\sigma_y^{(1)}\sigma_y^{(2)}\sigma_x^{(3)}) \\ &= (\sigma_x\sigma_y\sigma_y)^{(1)}(\sigma_y\sigma_x\sigma_y)^{(2)}(\sigma_y\sigma_y\sigma_x)^{(3)} \\ &= -\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}\end{aligned}$$

- Da $\sigma_y^2 = E_2$ und $\sigma_x\sigma_y = -\sigma_y\sigma_x$
- $|\Psi\rangle$ ist Eigenvektor von $\sigma_x^{(1)}\sigma_x^{(2)}\sigma_x^{(3)}$ mit Eigenwert -1

Voraussage nach lokaler realistischer Theorie

- Annahme: Messwerte stehen auch ohne Messung für alle Teilchen und Spinkomponenten fest.
- Ordne jeder Paulimatrix eine entsprechende klassische Größe m_x bzw. m_y zu, die die Werte ± 1 annehmen kann.
- Auch hier muss gelten:

$$m_x^{(1)} m_y^{(2)} m_y^{(3)} = +1$$

$$m_y^{(1)} m_x^{(2)} m_y^{(3)} = +1$$

$$m_y^{(1)} m_y^{(2)} m_x^{(3)} = +1$$

Voraussage nach lokaler realistischer Theorie

- Bilde folgendes Produkt

$$(m_x^{(1)} m_y^{(2)} m_y^{(3)})(m_y^{(1)} m_x^{(2)} m_y^{(3)})(m_y^{(1)} m_y^{(2)} m_x^{(3)}) = +1$$

$$(m_x^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)})(m_y^{(1)})^2(m_y^{(2)})^2(m_y^{(3)})^2 = +1$$

- Da $(m_y^{(i)})^2 = 1$ folgt $m_x^{(1)} m_x^{(2)} m_x^{(3)} = +1$
- Zur Erinnerung: QM sagt $\sigma_x^{(1)} \sigma_x^{(2)} \sigma_x^{(3)} |\Psi\rangle = -1 |\Psi\rangle$
→ Ein deutlicher Widerspruch

Warum ist das besser als Bells Ungleichung?

- Statistik bei der Versuchsauswertung nur noch aufgrund der Messungengenauigkeit nötig
- Im Prinzip reicht eine einzelne perfekte Messung zur Entscheidung

Das GHZ-Experiment

- Messung der Polarisationsrichtungen (H'/V' , R/L) dreier Photonen im GHZ-Zustand
- (H/V) entspreche x - und (R/L) entspreche y -Messung
- GHZ Zustand lässt sich wie folgt darstellen:

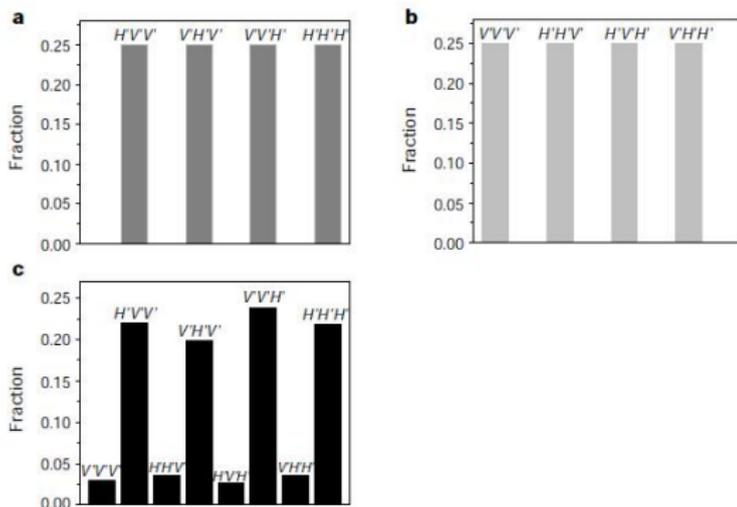
$$|\Psi\rangle = \frac{1}{2}(|R\rangle_1|L\rangle_2|H'\rangle_3 + |L\rangle_1|R\rangle_2|H'\rangle_3 \\ + |R\rangle_1|R\rangle_2|V'\rangle_3 + |L\rangle_1|L\rangle_2|V'\rangle_3)$$

- Jeder der vier Zustände tritt bei Messung von yyx mit einer Wahrscheinlichkeit von 25% auf

⁷Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, *Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*, Nature 403, 515–519 (2000)

Experimentelle Ergebnisse

- Wieder bestätigen die Ergebnisse die Quantenmechanik
- a: Quantenmechanik b: Lokal & Realistisch c: Experiment



⁸Jian-Wei Pan, Dik Bouwmeester, Matthew Daniell, Harald Weinfurter, Anton Zeilinger, *Experimental test of quantum nonlocality in three-photon Greenberger-Horne-Zeilinger entanglement*, Nature 403, 515–519 (2000)

Zusammenfassung und Ausblick

- Alle Experimente bestätigen die Quantenmechanik und sprechen gegen lokale realistische Theorien.
- → Man muss akzeptieren, dass die EPR-Korrelationen nicht lokal und realistisch interpretiert werden können
- Neuere Experimente zeigen sogar, dass eine große Klasse nichtlokaler realistischer Theorien nicht mit dem Experiment vereinbar ist.⁹

⁹S. Gröblacher, T. Paterek, R. Kaltenbaek, Č. Brukner, M. Żyukowski, M. Aspelmeyer & A. Zeilinger, *An experimental test of non-local realism*, Nature 446, 871 - 875 (2007)