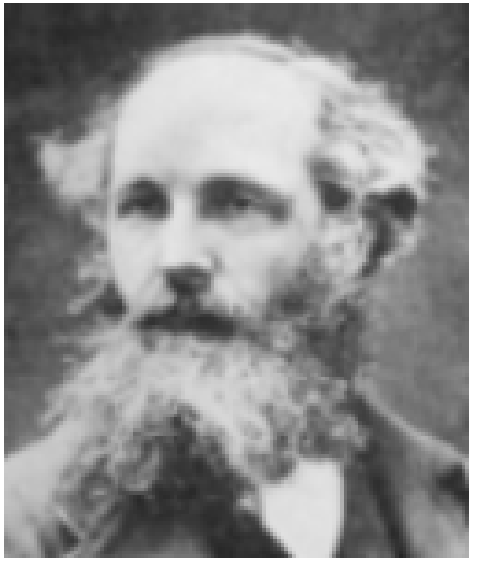
Maxwellsche Gleichungen



James Clerk
Maxwell
(1831-1879)

bisherige Grundgleichungen ...

- Ladungen erzeugen elektrische Felder:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Es gibt keine Ladungen, die magnetische Felder erzeugen:

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- Ströme erzeugen magnetische (Wirbel-)Felder:

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Zusätzlicher Term mit enormen Konsequenzen:

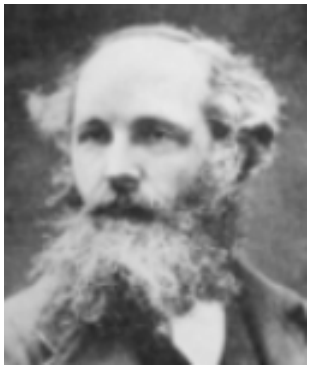
Maxwellscher Verschiebungsstrom

- Das statische E-feld wirbelfrei, aber zeitabhängige B-Felder erzeugen ein elektrisches Wirbelfeld:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Maxwellsche Gleichungen (1873)

- Verknüpfung von
  - elektrischen Feldern und Ladungsverteilung (1)
    - Das elektrische Feld hat die Ladungsdichte als Quelle
  - magnetischen Feldern und Strömen (4)
    - Quelle der zeitlichen Änderung des elektrischen Feldes und der Wirbelstärke des magnetischen Feldes ist die Stromdichte j.
  - elektrischen und magnetischen Feldern (3)
    - Quelle der zeitlichen Änderung des Magnetfeldes ist die“Wirbelstärke“ des elektrischen Feldes
  - Quellfreiheit von magnetischen Feldern (2)
    - Das Magnetfeld hat keine Quellen



James Clerk Maxwell (1831-1879)

(1) $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

(2) $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$

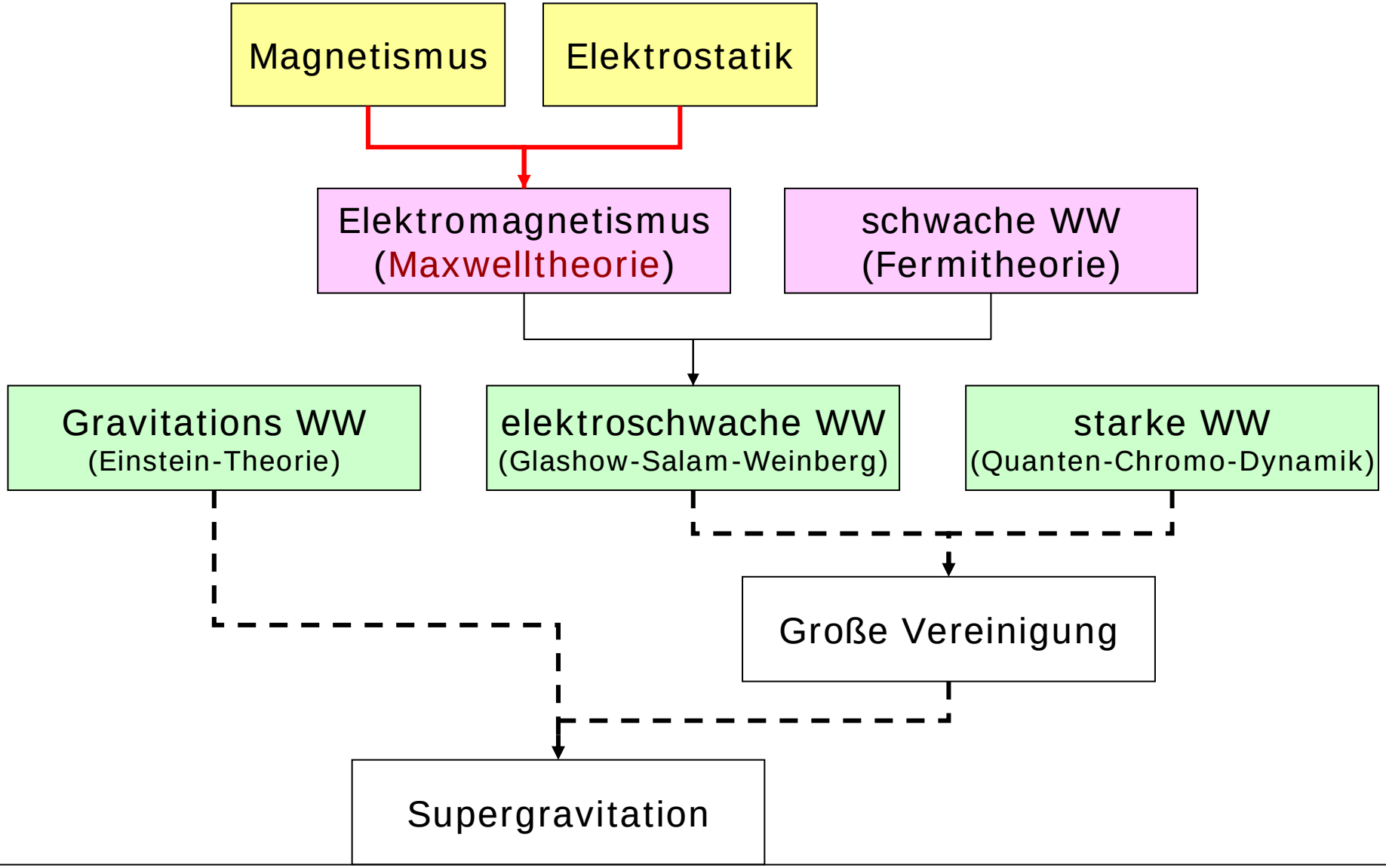
(3) $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

(4) $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \cdot \mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = Nabla - Operator$$

Einordnung der Maxwelltheorie

- **Ziel moderner Physik: Vereinigung der verschiedenen Theorien**



Elektromagnetische Wellen

Maxwellsche Gleichungen

- **Annahme**:
  es gibt keine (freien) Ströme und keine (freien) Ladungen
  (betrachte z.B. Vakuum)

- **Frage**: können dann trotzdem ***E***- und ***B***-Felder existieren?

  Maxwellgleichungen:

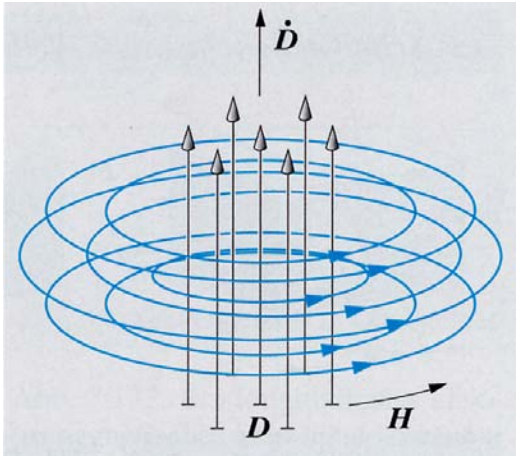
$$(A)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{E}=0 \qquad (B)\quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$$

$$(C)\quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\dot{\vec{B}} \qquad (D)\quad \frac{1}{\mu_0\cdot\varepsilon_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\dot{\vec{E}}$$

- **Antwort**: ja, wenn sie erst einmal existieren, können sie sich gegenseitig „am Leben erhalten“.

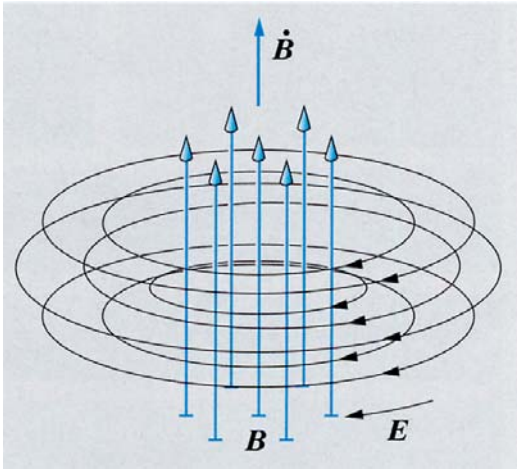
Wellengleichung/Quellen des EM Feldes

Schritt 1



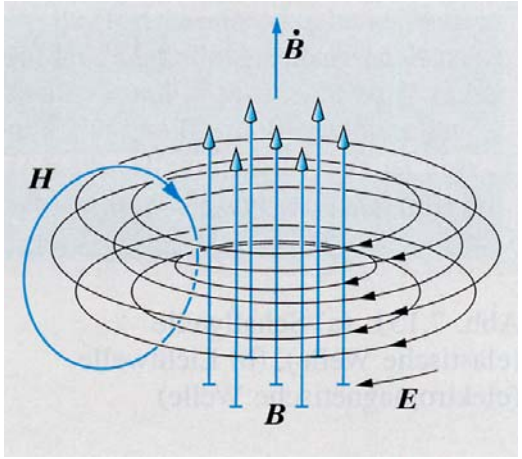
sich änderndes ***E***-Feld erzeugt ***B***-Feld

Schritt 2



sich änderndes ***B***-Feld erzeugt ***E***-Feld

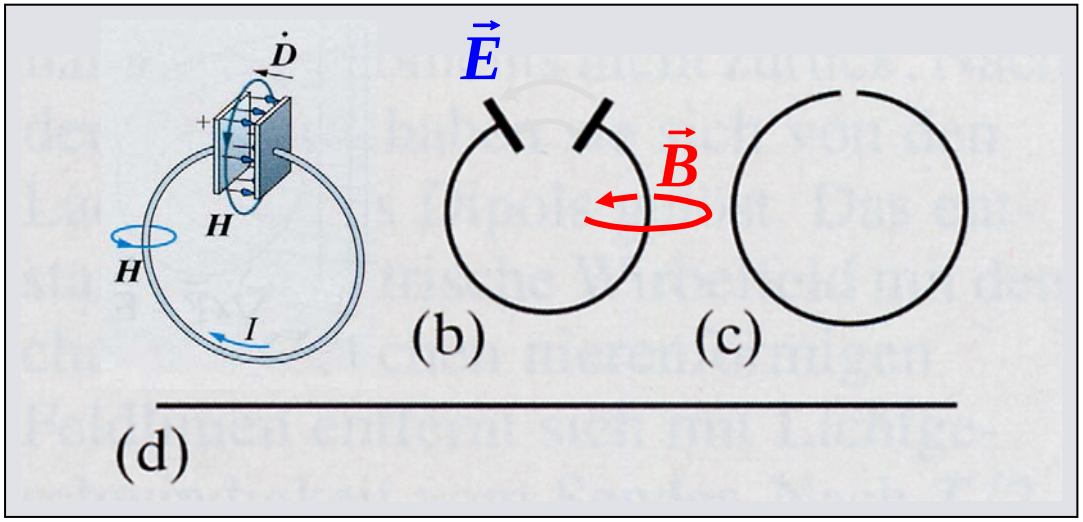
Schritt 3



sich änderndes ***B***-Feld erzeugt sich änderndes ***E***-Feld, das wiederum sich änderndes ***B***-Feld erzeugt,...

ABER: irgendwann irgendwo müssen zeitlich variierende Ladungen oder Ströme ***E***- und ***B***-Feld erzeugt haben

Hertzscher Dipol [1]

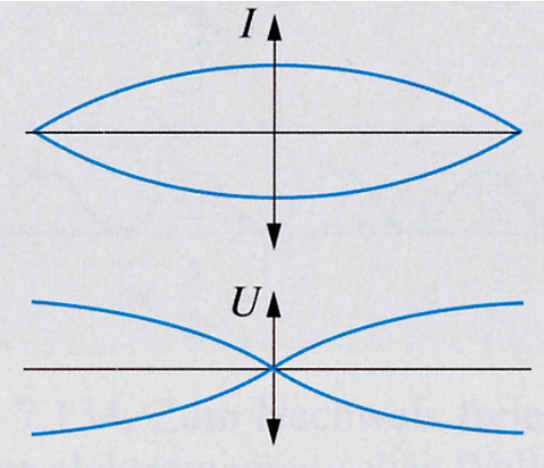


- Aufklappen eines Schwingkreises bestehend aus Kondensator und Leiterschleife (Spule)

- beim Schwingkreis ist ***E***-Feld auf Raum zwischen Kondensatorplatten, ***B***-Feld auf Innenraum der Spule beschränkt

- beim **linearen Oszillator** (**d**) erstrecken sich ***E***- und ***B***-Feld über den gesamten Raum und sind „untrennbar verbunden“, daher : ***elektromagnetisches Feld***

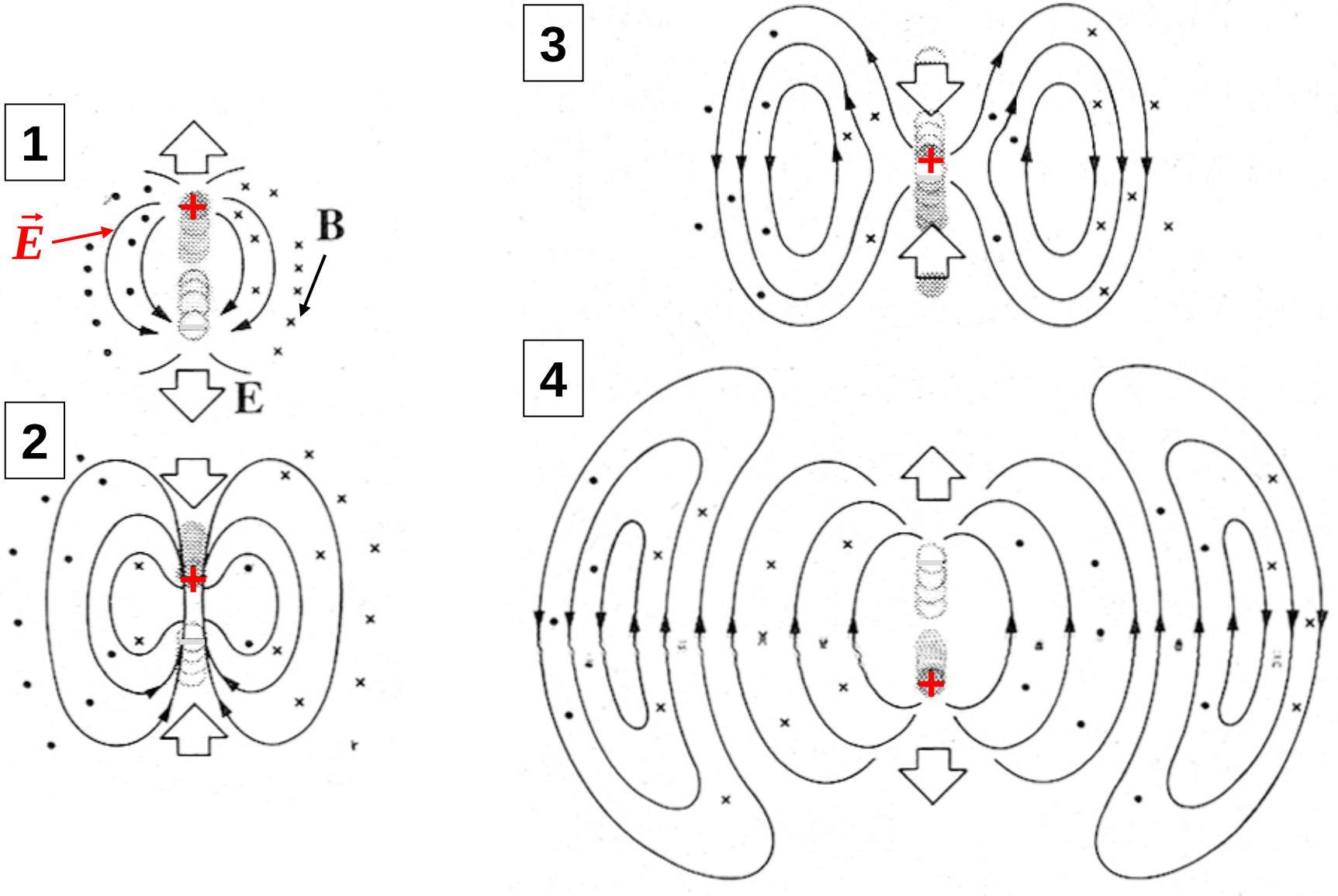
Hertzscher Dipol [2]



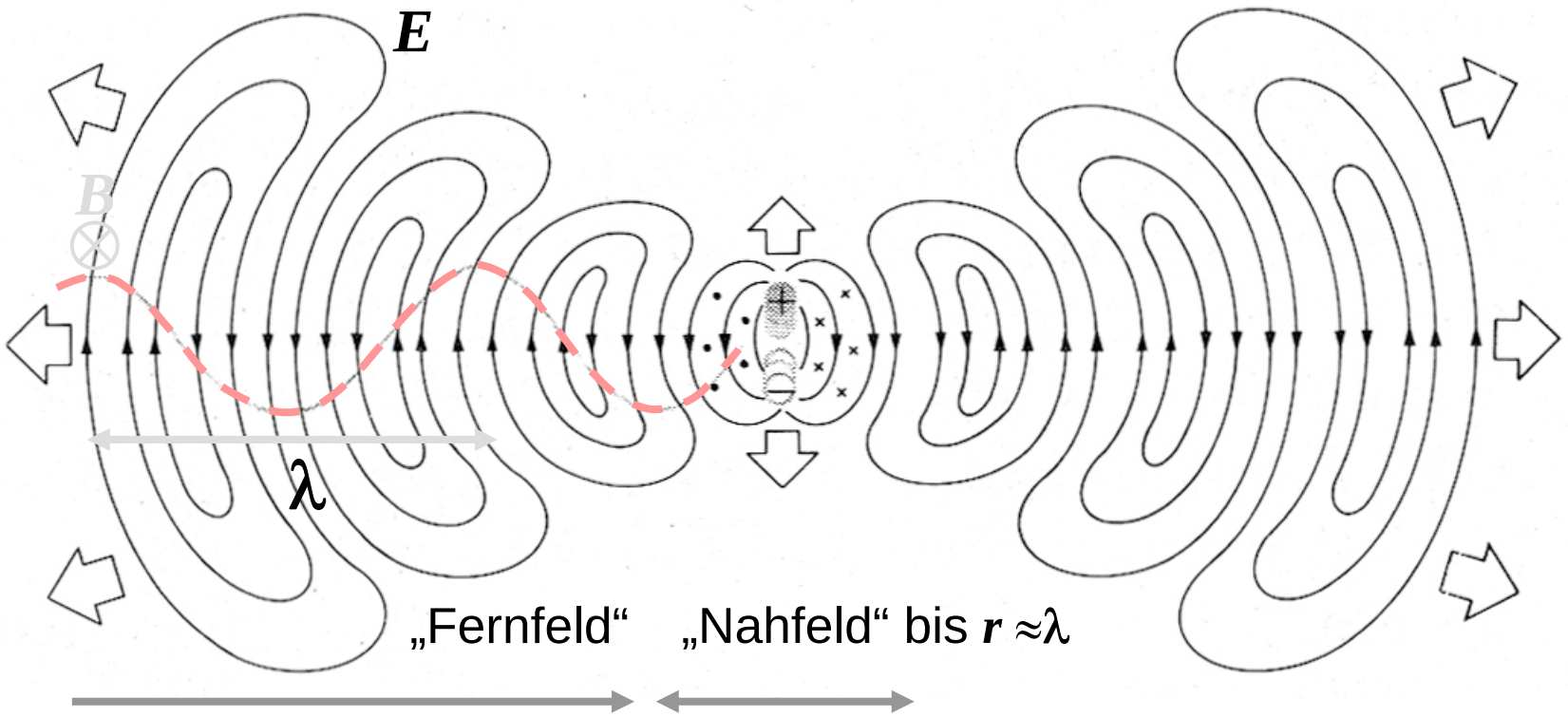
- Hertzscher Oszillator stellt ein schwingungsfähiges System für ***E***- und ***B***-Felder dar.

- ***E***- und ***B***-Felder können zu Stehwellen angeregt werden. Randbedingung ***I*** = 0 an den Enden legt die Form der möglichen Stehwellen fest
- Stehwellen für ***I*** wie bei Stab mit fest eingespannten Enden

Hertzscher Dipol [3]



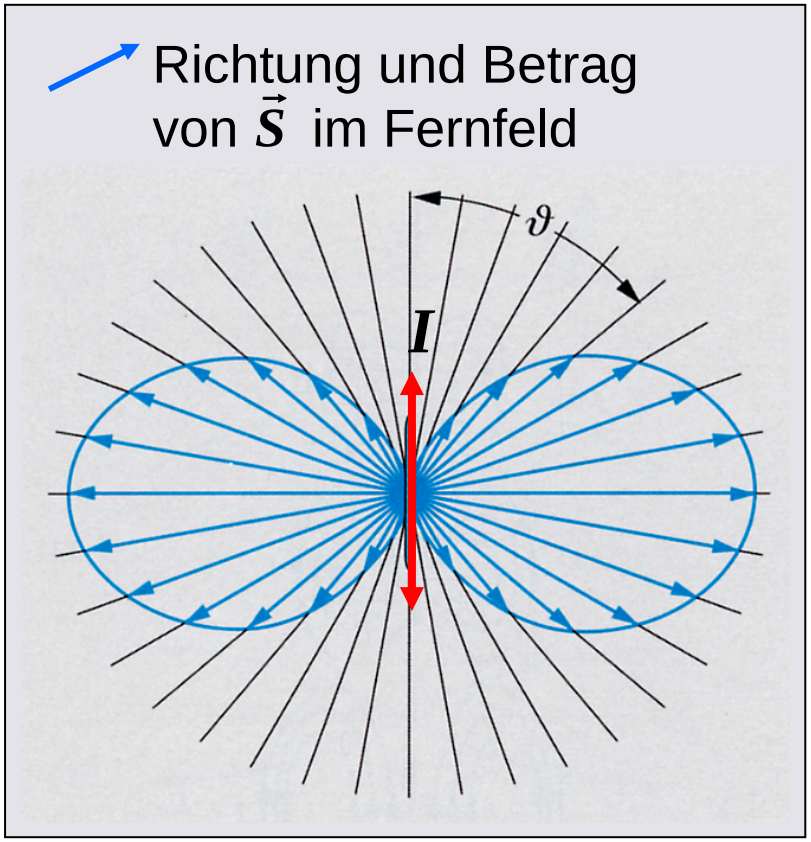
Hertzscher Dipol [4]



- im Fernfeld lösen sich ***E***- und ***B***-Felder vom Dipol
- ***lokal*** ist das Feld ***eben***, ***E*** und ***B*** stehen ***senkrecht aufeinander*** und ***senkrecht zur Ausbreitungsrichtung***

Hertzscher Dipol [5]

- Abstrahlungscharakteristik
  (lokale) Energiestromdichte eines ***EM***-Feldes wird beschrieben durch ***Poyntingvektor***:

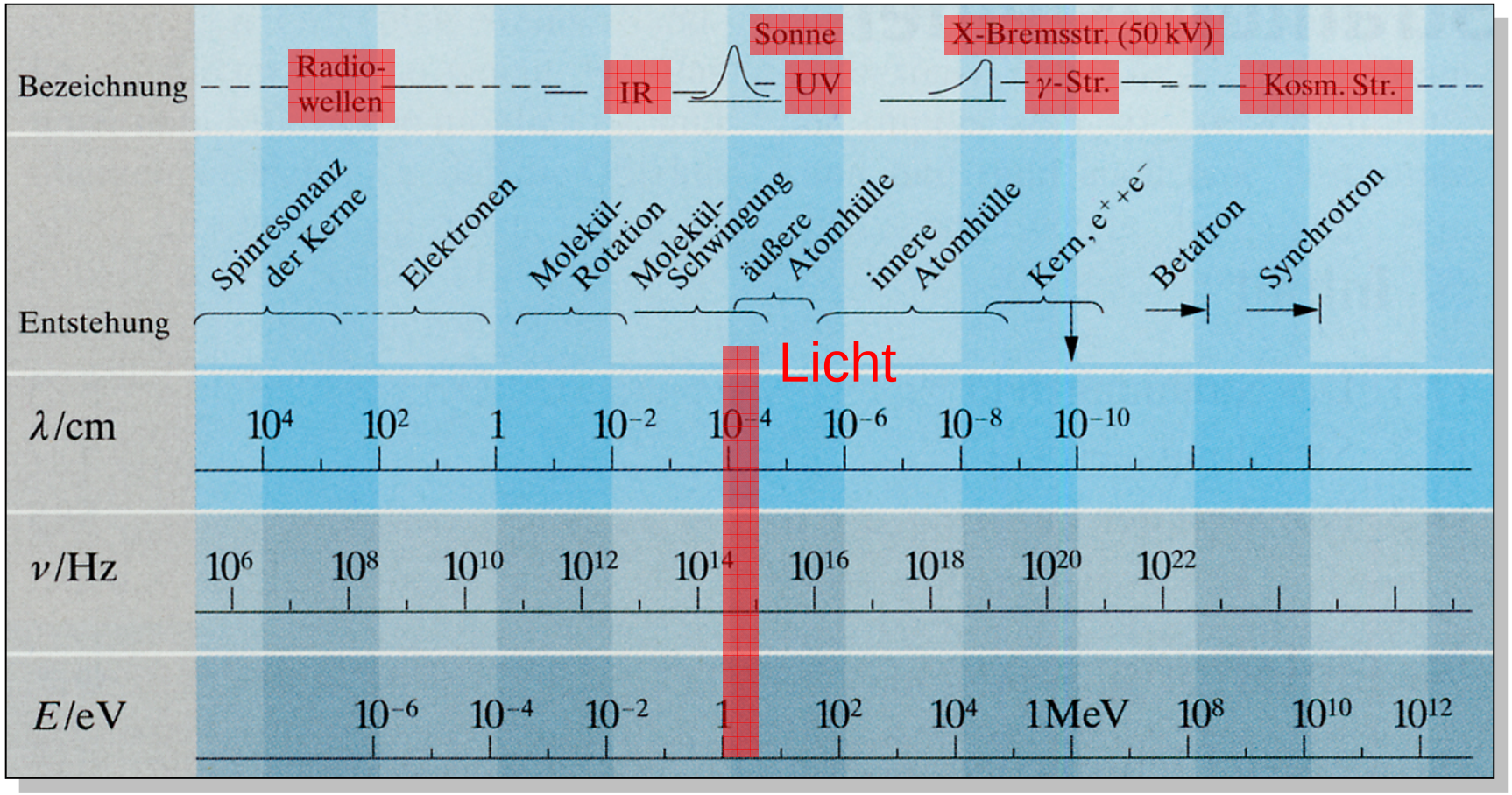


$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B}$$

Poyntingvektor

- **maximal** in Ebene, die Dipol teilt und senkrecht zum Strom ***I*** steht
- **verschwindet** entlang der Achse des Dipols

Elektromagnetisches Spektrum

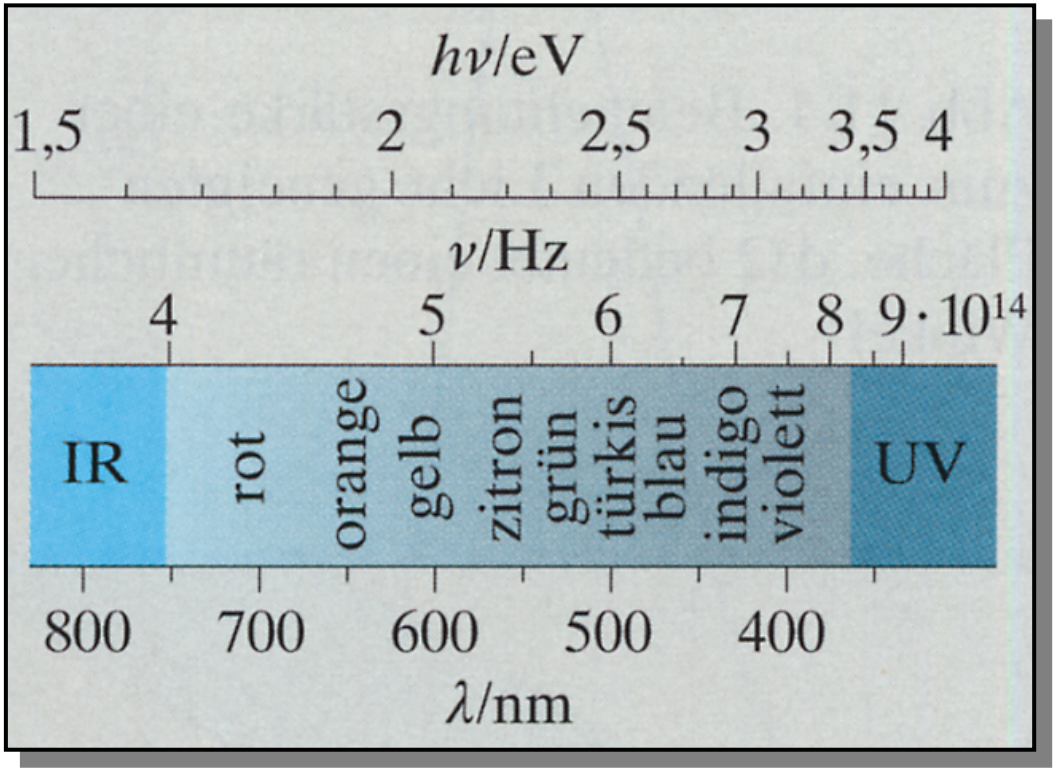


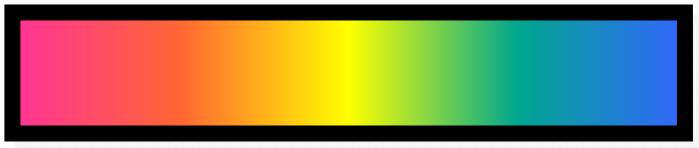
Lichtspektrum

Energie [eV]:

Frequenz [Hz]:

Wellenlänge [nm]:





Elektromagnetische Wellengleichung

- Wie erhält man im freien Raum (i.e., keine Ströme oder Ladungen) aus den Maxwellgleichungen eine Wellengleichung ?

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\vec{E})) = -\mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) \qquad \mathrm{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\vec{E})) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Elektromagnetische Wellengleichung

- Kombinierte Gleichungen von vorhin

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\vec{E})) \;=\; -\,\mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2}$$

- Aus der Mathematik

$$\mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,(\vec{E})) \;=\; -\underbrace{\mathrm{div}\,(\mathrm{grad}\,(\vec{E}))}\; +\mathrm{grad}\,(\underbrace{\mathrm{div}\,(\vec{E})})$$

$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E} \;=\; \Delta\vec{E} \qquad\qquad = 0$$

- Damit folgt die elektromagnetische Wellengleichung

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) \;=\; -\,\mu_0\varepsilon_0\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,\vec{E}(\vec{r},t)$$

Erinnerung: Wellengl. d. Mechanik

- Harmonische Wellen in 3D sind Lösungen der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(\vec{r},t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) y(\vec{r},t) = 0$$

$$\vec{r} = (x, y, z)$$

- Oder in Kurzschreibweise

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(\vec{r},t) - c^2 \vec{\nabla}^2 y(\vec{r},t) = 0$$

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

- Oder noch kürzer mit dem „Lapace-Operator“

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(\vec{r},t) - c^2 \Delta y(\vec{r},t) = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Wellengleichungen im Vergleich

- Wellengleichung der Mechanik („skalar“)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} y(\vec{r},t) - c^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) y(\vec{r},t) = 0$$

- Wellengleichung der Elektrodynamik

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r},t) - \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \vec{E}(\vec{r},t) = 0$$

- Vergleich zeigt für die Ausbreitungsgeschwindigkeit (i.e. die Lichtgeschwindigkeit):

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \qquad c = \sqrt{\left| \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} \right|}$$

- Für jede Komponente Ex, Ey, Ez des elektrischen Vektorfeldes gilt eine eigene Wellengleichung. Diese sind aber nicht völlig unab-hängig voneinander (wg. der beiden anderen Maxwellgleichungen)!

Lichtgeschwindigkeit

Vakuum: $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 2{,}99792 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$

höchste erreichbare Geschwindigkeit

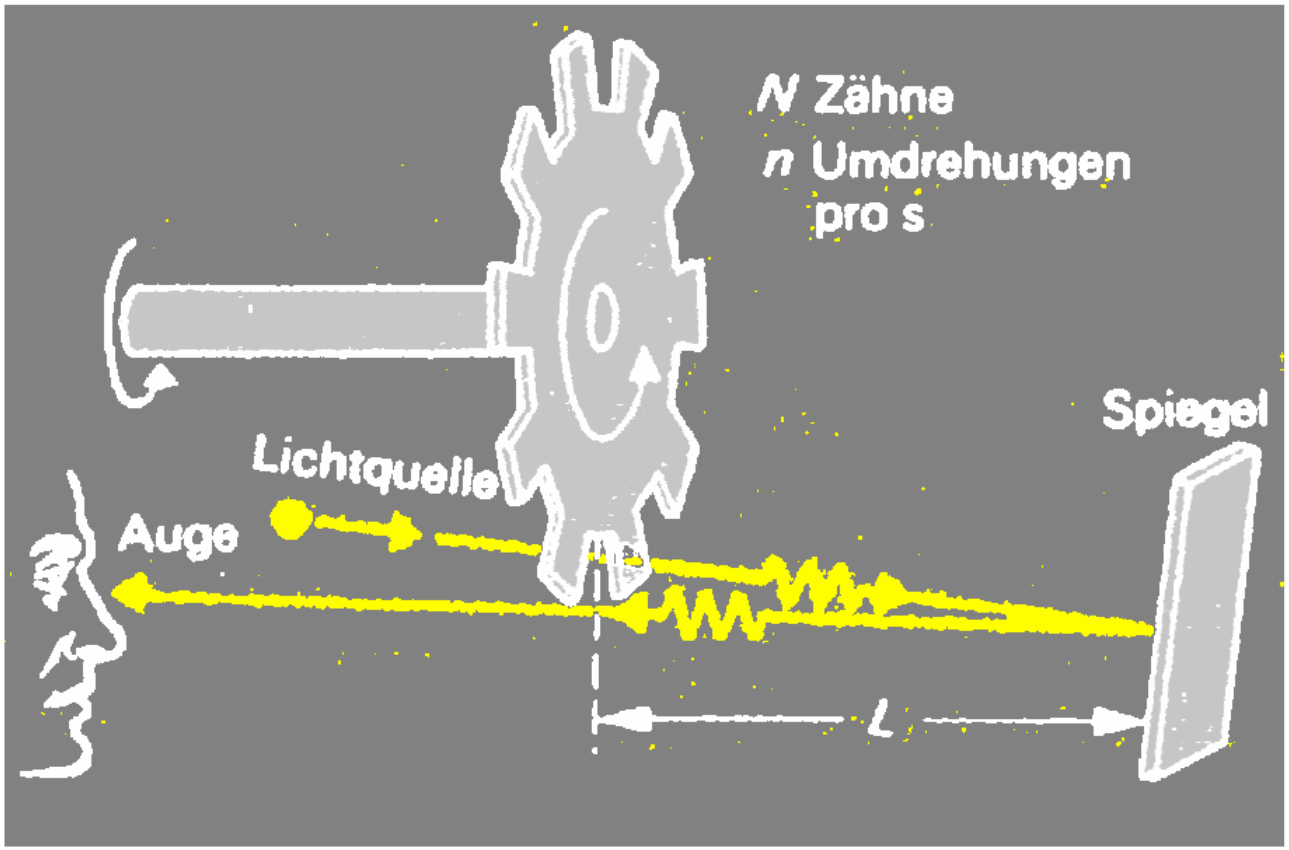
experimentelle Überprüfung:

1675 Römer
1729 Bradley
1841 Fizeau

Seit 1983 ist c_0 eine definierte Größe ...

$2L/c = (n \cdot N)^{-1}$

$\mathbf{c = 2L \cdot N \cdot n}$



Wellengleichung

einfacher in 1D:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}(x,t) = 0$$

und noch einfacher in 1D für nur eine E-Feld Komponente:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}E_y(x,t) - c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}E_y(x,t) = 0$$

Vergleich mit Mechanik erlaubt sofort folgende Schlüsse über Eigenschaften EM-Wellen

1. jede Lösung der Wellengleichung lässt sich durch Überlagerung von ebenen Wellen beschreiben

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega\cdot t + \varphi\right)$$

Wellengleichung

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi\right)$$

2. **Phasengeschwindigkeit**
   („Lichtgeschwindigkeit“)

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}}$$

3. **Wellenlänge** (räumliche Periodizität):

$$\lambda = 2\pi \Big/ \left|\vec{k}\right|$$

4. **Schwingungsdauer/Frequenz**
   (zeitliche Periodizität)

$$T = 2\pi / \omega$$

5. **Wellenvektor/Wellenzahl**
   (Ausbreitungsrichtung)

$$\vec{e}_{\vec{k}} = \vec{k} / k$$

6. EM-Wellen können

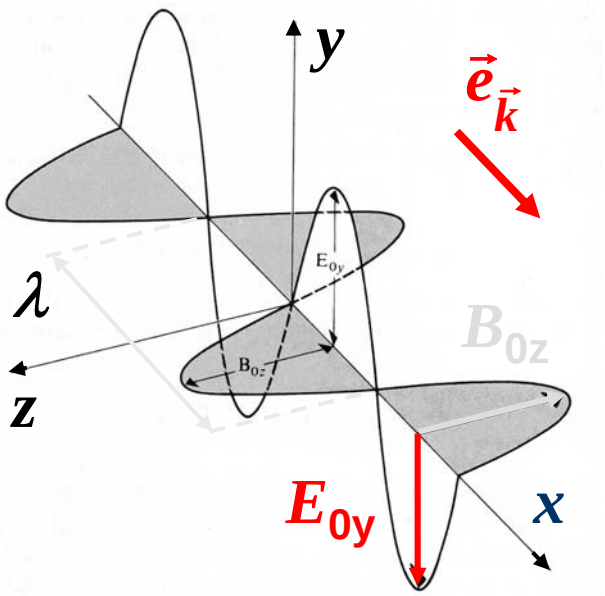
   - interferieren

   - gebeugt werden

   - gebrochen werden

Wellengleichung/Transversalwellen

aus Maxwellgleichungen:



- ***E***- und ***B***-Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_{\vec{k}}$, sind also ***Transversalwellen***

- ***E***- und ***B***-Feld stehen senkrecht zueinander und sind proportional zueinander:

$$\vec{B} = c \cdot \vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{E}$$

- damit gibt es 2 orthogonale lineare **Polarisationen**, hier

$\vec{E} \perp \vec{e}_y$ und $\vec{E} \perp \vec{e}_x$

Wellengleichung/Energietransport

- EM-Wellen können (auch im Vakuum !) Energie transportieren.
- Dies wird beschrieben durch den Poyntingvektor, mathematische eine „Energiestromdichte“, der die Intensität angibt:

Ebene Welle

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} = \left(c^2\cdot\varepsilon_0\right)\cdot\vec{E}\times\left(\left(\vec{e}_{\vec{k}}\times\vec{E}\right)\cdot\frac{1}{c}\right) = \left(c\cdot\varepsilon_0\cdot\left\|\vec{E}\right\|^2\right)\vec{e}_{\vec{k}}$$

- Die lokale „Energiedichte“ des EM Feldes wird konsistent damit beschrieben durch:

Ebene Welle

$$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\cdot\left\|\vec{E}\right\|^2+\frac{1}{\mu_0}\left\|\vec{B}\right\|^2\right) = \varepsilon_0\cdot\left\|\vec{E}\right\|^2$$

Wellengleichung/Impulsübertragung

Poynting-Vektor: $\vec{S} = (1/\mu_0)\,\vec{E} \times \vec{B}$

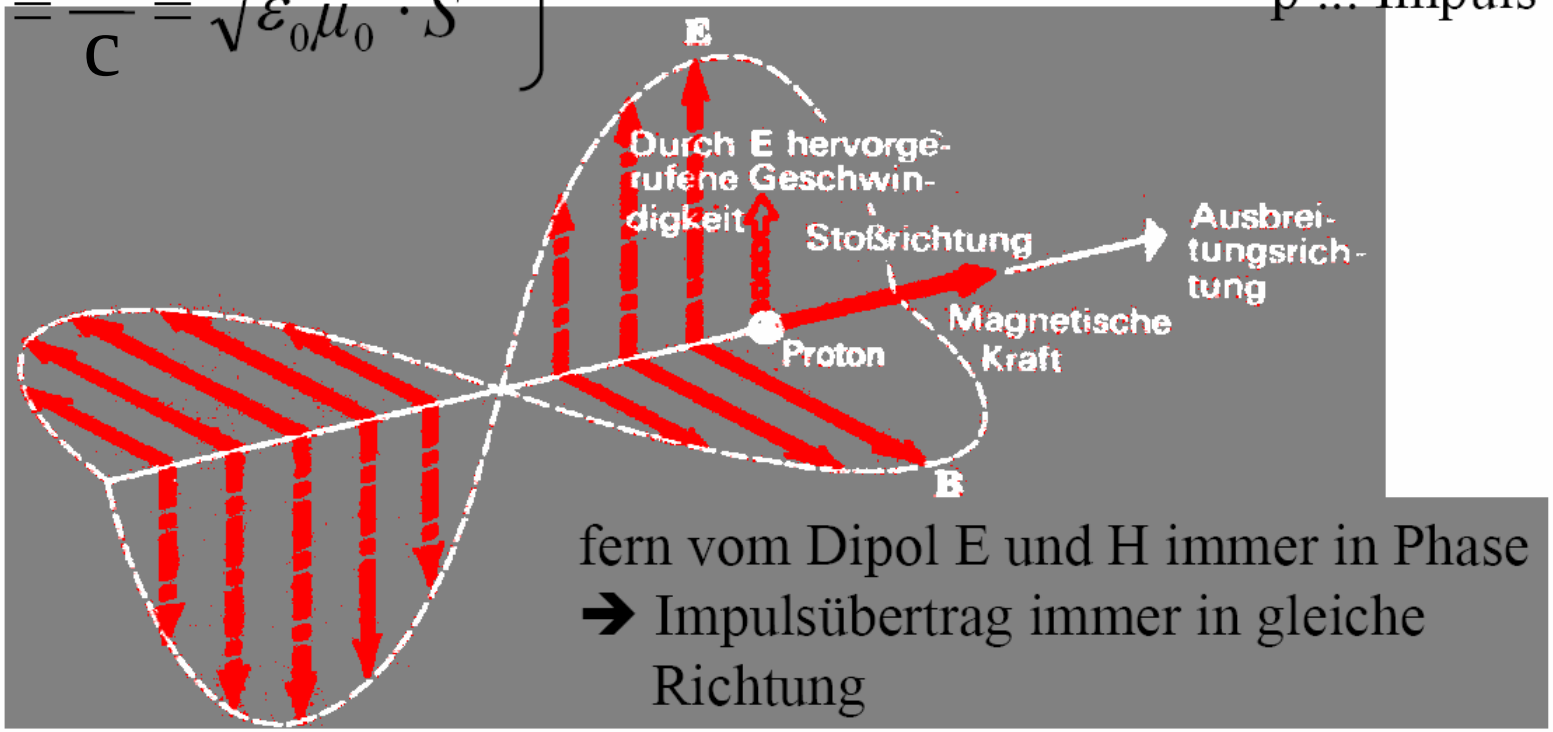
$$\left|\vec{S}\right| = (1/\mu_0)\left|\vec{E}\right| \cdot \left|\vec{B}\right|$$

$$p = \frac{S}{c} = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot S$$

Ebene Welle

pro s durch Flächeneinheit

S ... Energie
p ... Impuls



fern vom Dipol E und H immer in Phase
➔ Impulsübertrag immer in gleiche Richtung

Wellengleichung/Impulsübertragung

el.m. Welle auf Körper ➔ Absorption ➔ Energiezufuhr
➔ Impulsübertrag - „Lichtdruck“

Beispiel: Licht einer 100 W Lampe wird von einem Flügel eines Radiometers reflektiert.

Reflexion ➔ doppelter Impuls übertragen

$$dp_{Flügel} = \frac{2}{c} dS$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{2}{c} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 10^8} N$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-7} N$$

➔kaum ausreichend,
um Flügel zu bewegen

Crooke's Radiometer

Wellengleichung/Impulsübertragung

el.m. Welle auf Körper ➔ Absorption ➔ Energiezufuhr
➔ Impulsübertrag - „Lichtdruck“

Beispiel: Licht einer 100 W Lampe wird von einem Flügel eines Radiometers reflektiert.

Reflexion ➔ doppelter Impuls übertragen

$$dp_{Flügel} = \frac{2}{c} dS$$

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{2}{c} \cdot \frac{dS}{dt} = \frac{2 \cdot 100}{3 \cdot 10^8} N$$

$$= 6{,}67 \cdot 10^{-7} N$$

➔kaum ausreichend,
um Flügel zu bewegen

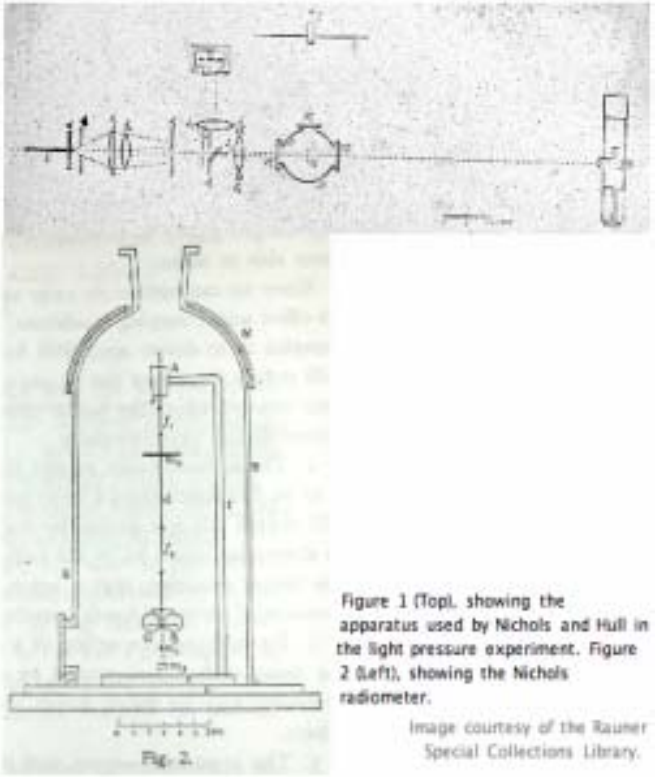


Figure 1 (Top), showing the apparatus used by Nichols and Hull in the light pressure experiment. Figure 2 (Left), showing the Nichols radiometer.

Image courtesy of the Rauner Special Collections Library.

Nichols Radiometer ✓