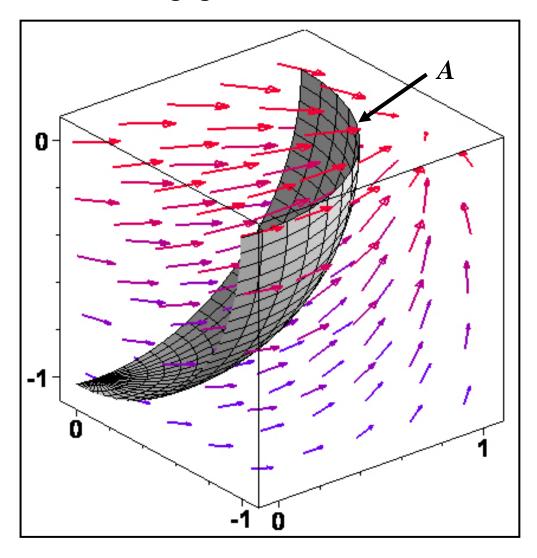
Der elektrische Fluss  $\Psi$ : Wie stark "strömt" das elektrische Feld durch eine gegebene Fläche?



$$\Psi_{A} = \int_{A} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{A}$$

Qualitative Herleitung des Coulomb-Gesetzes:

- Eine pos. (Punkt-)Ladung als Quelle des elektr. Feldes im Ursprung:  $\vec{E}\!\propto\!q$  und  $\vec{E}\,||\,\vec{r}$
- Fluss durch eine (imaginäre) Kugel um die Ladung ist konstant:

$$\psi = \int_{Kugel} \vec{E} \cdot d\vec{A} \Rightarrow |\vec{E}| \propto 1/(4 \pi r^2)$$

also: 
$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

#### Abstrakte Formulierung

Punktladungen werden durch kontinuierliche Ladungsverteilung ersetzt:

 $q \rightarrow \rho(\vec{r})$ 

Divergenz eines Feldes ist seine (lokale) Quellstärke:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \left( \operatorname{div} \vec{E} = \nabla \cdot \vec{E} = \partial x E_x + \partial y E_y + \partial z E_z \right)$$

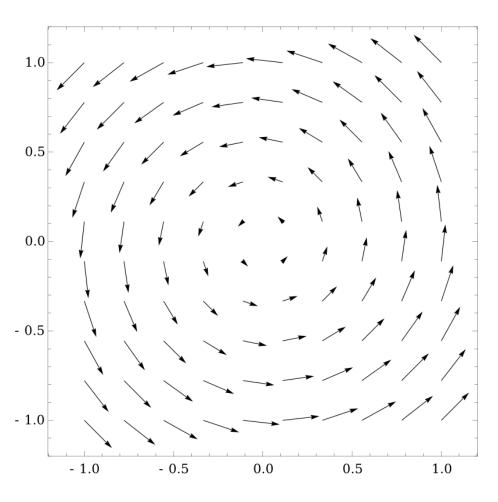
Integrale Formulierung: Satz von Gauß

$$\psi = \int_{Oberfl\"{a}che} \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{Volumen} \text{div} \vec{E} \, dV = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Der Fluss eines Feldes durch eine geschlossene Oberfläche ist gleich dem Integral der Divergenz des Feldes über dem eingeschlossenen Volumen. Anschaulich: Ladungen sind die Quellen/Senken des elektrischen Feldes!

Was gibt's noch?

#### Rotation eines Feldes:



$$\operatorname{rot} \vec{E} = \nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \partial y E_z - \partial z E_y \\ \partial z E_x - \partial x E_z \\ \partial x E_y - \partial y E_x \end{pmatrix}$$

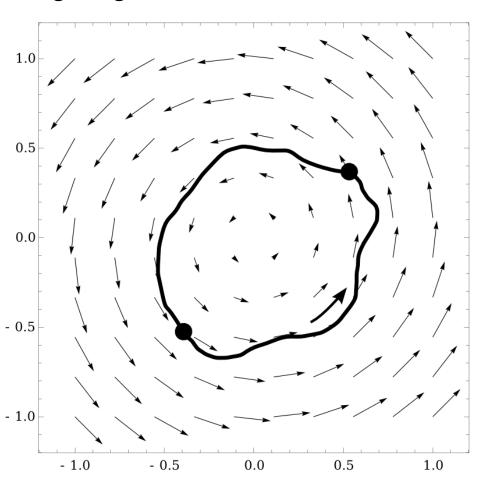
Die Rotation eines Feldes gibt seine lokale Wirbelstärke an.

Hier gilt offensichtlich:

$$\operatorname{rot} \vec{E} \neq 0$$

Was bedeutet das für die Arbeit im Kraftfeld?

#### Wegintegral:

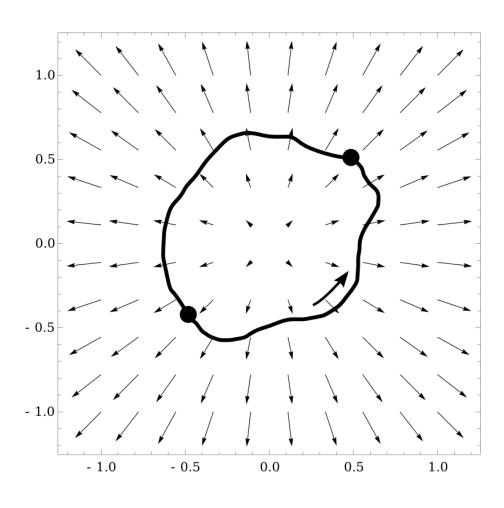


Arbeit ist "Kraft mal Weg" oder:

$$W = \int_{Kurve} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \int_{Kurve} q \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

Im Wirbelfeld ist die geleistete Arbeit abhängig vom zurück gelegten Weg.

In der Elektrostatik gilt aber:  $\cot \vec{E} = 0$ 

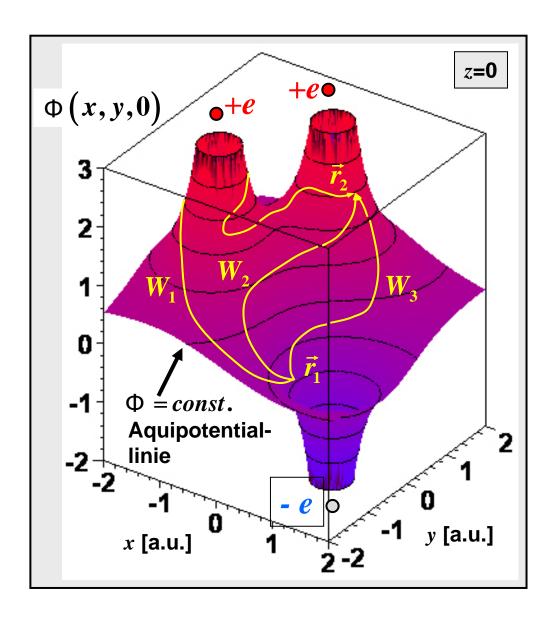


Dann gilt für jede geschlossene Kurve:

$$W = \int_{Kurve} \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$$

Anders ausgedrückt:

Im rotationsfreien Feld ist das *Arbeitsintegral* **nicht** vom gewählten Weg abhängig, sondern nur von Anfangs- und Endpunkt. Dann heißt das Feld *konservativ*.



Die Mathematik sagt:

Da  $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$  gilt, gibt es ein Potential  $\Phi$  mit:

- Φ ist bis auf eine additive Konstante (Eichfreiheit!) eindeutig.
- Das erzeugende E-Feld errechnet sich als Gradient (dreidimensionale Ableitung) des Potentials:

$$\vec{E} = \operatorname{grad} \phi = \nabla \phi = \begin{pmatrix} \partial x \\ \partial y \\ \partial z \end{pmatrix} \phi$$

Zusammenhang zwischen Potential, Spannung und Arbeit:

Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$$\phi_{12} = \int_{1}^{2} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \phi_{2} - \phi_{1}$$

Energiedifferenz zwischen zwei Punkten (wegunabhängig!):

$$W_{12} = \int_{1}^{2} q \, \vec{E} \cdot d \, \vec{s} = q \, \phi_{2} - \phi_{1}$$

Also:  $W_{12} = q \phi_{12}$ 

Potentialdifferenzen sind sehr praktische Rechengrößen und bekommen deshalb einen eigenen Namen: *Spannungen*. Die SI-Einheit der Spannung ist das Volt [V]. Das Rechensymbol ist meist ein U.

Aber: Damit die Angabe einer Spannung sinnvoll ist, muss immer ein Referenzpunkt (U=0) angegeben werden!

#### Zusammenfassung:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \rho / \epsilon_0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0$$

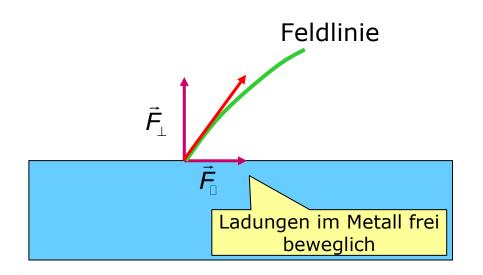
Maxwell-Gleichungen der Elektrostatik im Vakuum

Unter Verwendung des Potentials lässt es sich sogar noch etwas einfacher schreiben:

div grad 
$$\phi = \Delta \phi = (\partial^2 x + \partial^2 y + \partial^2 z) \phi = \rho/\epsilon_0$$

Laplace-Gleichung

#### Potential eines idealen Leiters (Metall):



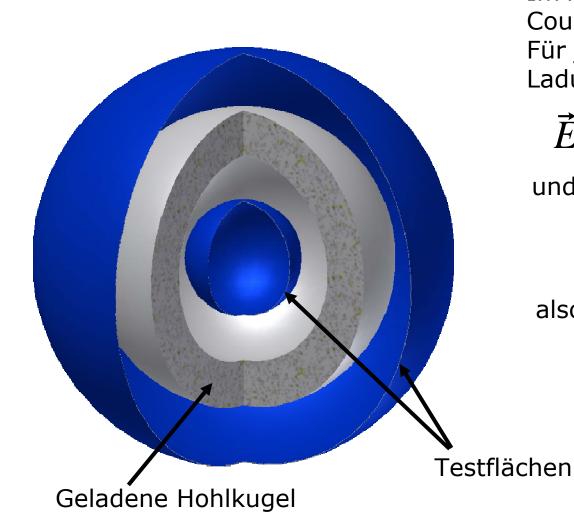
Wiederholung: Feldlinien müssen auf der Leiteroberfläche senkrecht stehen.

Dann gilt für kleine Verschiebungen entlang der Oberfläche:

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$$

Daraus folgt, dass das Potential überall auf der Oberfläche gleich ist, unabhängig von der Form des Leiters. Die Ladungsverteilung kann aber unterschiedlich sein!

#### Anwendung: geladene Hohlkugel



Im Außenraum ist das Coulomb-Gesetz gültig: Für jede kugelsymmetrische Ladungsanordnung gilt, dass

$$ec{E}\!\propto\!q$$
 und  $ec{E}\,\|\,ec{r}$ 

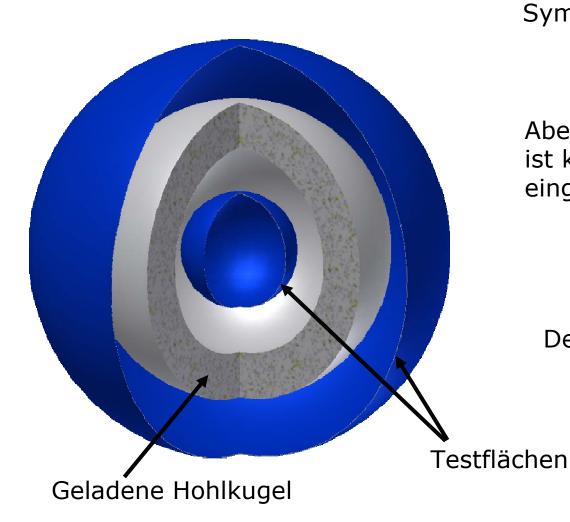
und

$$|\vec{E}| \propto 1/(4\pi r^2)$$

also

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$

Anwendung: geladene Hohlkugel



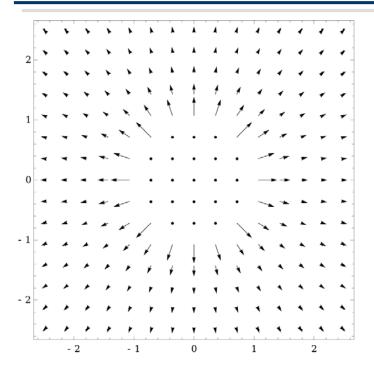
Im Innenraum bleibt die Symmetrie erhalten:

$$\vec{E} \parallel \vec{r}$$

Aber in der inneren Testfläche ist keine Ladung eingeschlossen!

$$\phi = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$$

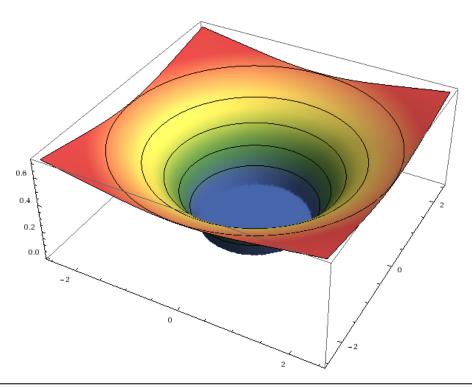
Der Innenraum ist feldfrei!



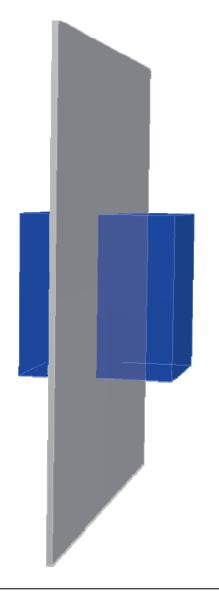
E-Feld einer positiv geladenen Hohlkugel in einer Ebene durch den Mittelpunkt.

Durch Integration des Feldes entlang eines vom Mittelpunkt ausgehenden Strahls erhält man das Potential:

$$\psi = C \qquad r \leq Kugelradius$$
 
$$C - \frac{1}{(4\pi \epsilon_0 r)} \quad r > Kugelradius$$

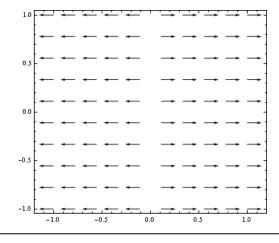


Feld einer (unendlich) ausgedehnten geladenen Platte:



- -Wegen Symmetrie gilt, das Feld steht senkrecht zur Platte.
- -In jedem Halbraum bleibt das Feld konstant, da ein Quader, um das gleiche Teilstück der Platte gelegt, immer die gleiche Ladungsmenge einschließt.
- -Die Tangentialkomponente des Feldes verändert sich stetig beim Übergang von einer Plattenseite zur anderen, die Normalkomponente macht einen Sprung.

E-Feld einer pos. Geladenen Platte bei x=0.



## Die Spannung

Energiedifferenz zwischen zwei Punkten (nur sinnvoll zu definieren, wenn wegunabhängig!):

$$W_{12} = \int_{1}^{2} q\vec{E} \cdot d\vec{s} = q(\Phi_{2} - \Phi_{1})$$

Potentialdifferenz zwischen zwei Punkten:

$$\Phi_{12}=\int_1^2 \vec{E}\cdot d\vec{s}=\Phi_2-\Phi_1$$
 Spannung

Also: 
$$W_{12} = q \phi_{12}$$

Die Potentialdifferenzen ist eine sehr praktische Rechengröße und bekommt deshalb einen eigenen Namen: *Spannung*. Die SI-Einheit der Spannung ist das Volt [V]. Das Rechensymbol ist meist ein U.

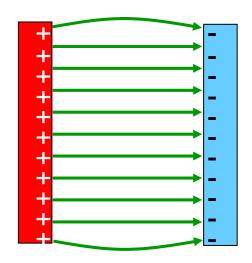
Aber: Damit die Angabe einer Spannung sinnvoll ist, muss immer ein Referenzpunkt (U=0) angegeben werden!

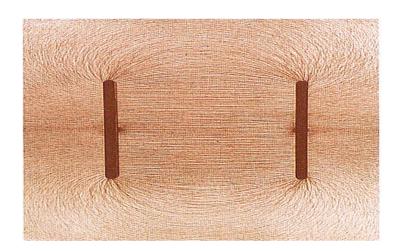
#### Der Kondensator

Konfiguration aus zwei Platten mit entgegen gesetzter Ladung:

- -Der Außenraum bleibt weitgehend feldfrei, da Gesamtladung sich ausgleicht.
- Zwischen den Platten herrscht ein **homogenes** elektrisches Feld.

Diese Anordnung heißt Kondensator.





#### Der Kondensator

Die Spannung U (Potentialdifferenz) zwischen den beiden Platten mit der Fläche A und den Ladungen +Q und -Q ist:

$$U = E d = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$$

Also:

$$Q = C U$$
 mit  $C = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ 

C ist die Kapazität des Kondensators. Sie kann auch für andere Geometrien angegeben werden, da immer gilt, dass die Potentialdifferenz proportional zur Ladung ist.

Einheit der Kapazität:

$$1 \text{ Farad} = 1 \text{ F} = \frac{1 \text{ C}}{1 \text{ V}}$$

#### Der Kondensator

Energieinhalt des Kondensators:

Um eine weiter kleine Ladung dQ von einer Platte zur anderen zu transportieren, benötigt man:

$$dW = dQ \ U = dQ \frac{Q}{C}$$

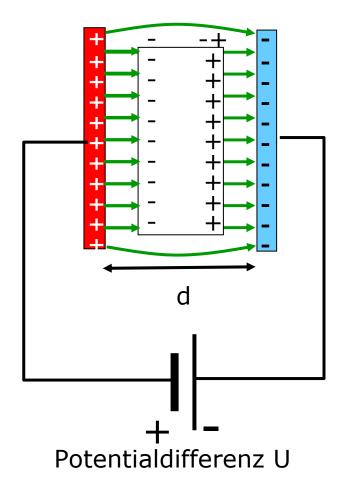
Integration liefert die gesamte Arbeit (also den Energieinhalt)

$$W = \int dW = \int_{0}^{Q_{s}} \frac{Q}{C} dQ$$

Also:

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C U^2$$

## Kondensator mit Dielektrikum



- ► Bei Isolator (Dielektrikum) zwischen den Kondensatorplatten passiert Folgendes:
  - ► Polarisation →
    Im Isolator wird ein Gegenfeld aufgebaut
  - ► Feld wird abgeschwächt
  - geringere Kraft d.h. reduziertes E-Feld

$$E_{Dielektrikum} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_{Vakuum}$$

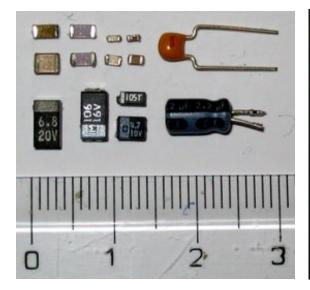
$$\varepsilon_r : Dielektrizitätszahl$$

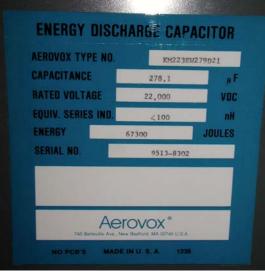
$$C = \varepsilon_r \cdot \frac{Q}{II} \xrightarrow{Plattenkondensator} C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

## Dielektrizitätskonstanten

Material	$\varepsilon_{r}$
Papier	1.6-2.6
Paraffin	1.9-2.5
PVC	3.1-3.9
Glas	5.0-9.0
Titanat	15-104
Benzol	2.1
Ethylalkohol	27.9
Wasser (0°C)	87.74
Wasser (20°C)	80.1
Wasser (90°C)	58.31
Helium	1.000066
Wasserstoff	1.000264
Luft	1.000590

# Kondensatoren - Beispiele

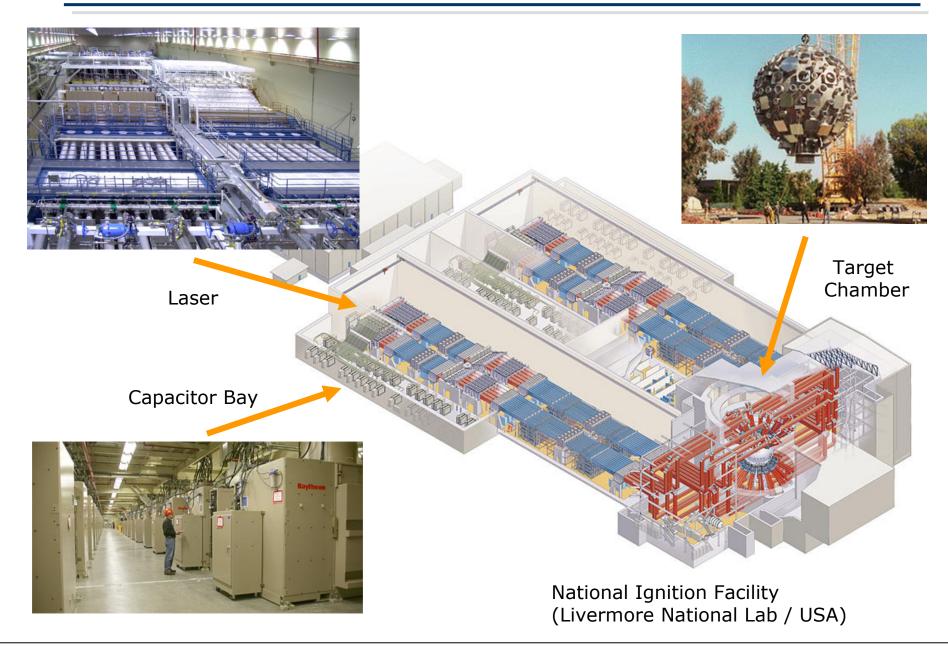








# Kondensatoren - Beispiele



# Kondensatoren - Beispiele

From Computer Desktop Encyclopedia

© 2005 The Computer Language Co. Inc.

