Grundaussagen der Elektrostatik

(1) Es gibt *zwei Arten von elektrischen Ladungen* (bezeichnet als „positiv“ und „negativ“, da sie einander neutralisieren können)

(2) Gleichnamige Ladungen stoßen einander ab, gleichnamige ziehen einander an.

(3) Ladung bleibt im abgeschlossenen System erhalten.

(4) Ladung ist gequantelt. Dass heißt sie existiert (in der direkt beobachtbaren Natur) nur als ganzzahliges Vielfaches der Elementarladung

$$e = 1.602\,176\,462(63) \cdot 10^{-19}\ \text{C} \quad \text{(Coulomb)}$$

SI-System: 1 Coulomb = 1 Ampere · 1 Sekunde

[Ladung] = [Strom] · [Zeit]

Grundaussagen der Elektrostatik

(5) Die Kraft zwischen zwei Punktladungen q_1 und q_2 mit Abstand r

(5a) wirkt entlang ihrer Verbindungslinie.

(5b) ist proportional zum Produkt $q_1 q_2$ der Ladungen.

(5c) ist proportional zu $1/r^2$

Grundaussagen der Elektrostatik

(5) Die Kraft zwischen zwei Punktladungen q_0 und q_1 mit Abstand r

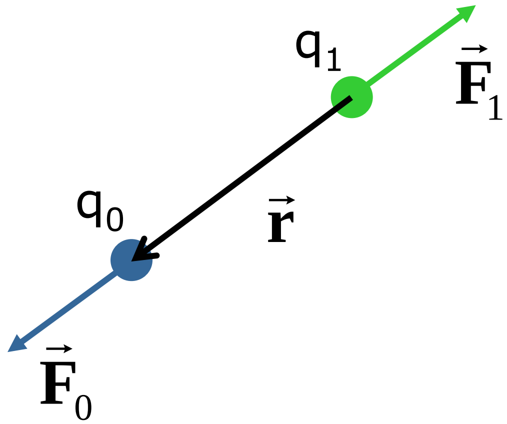
(5a) wirkt entlang ihrer Verbindungslinie.

(5b) ist proportional zum Produkt $q_0 q_1$ der Ladungen.

(5c) ist proportional zu $1/r^2$

→ Coulomb - Gesetz

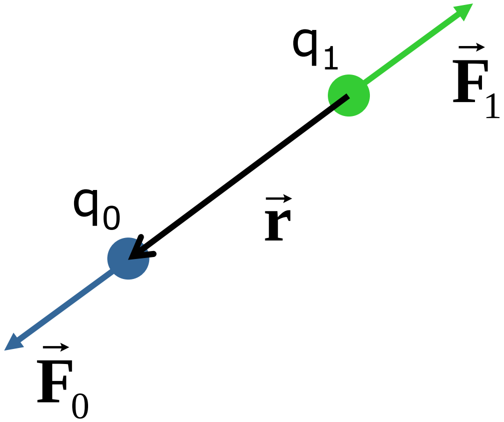
$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_0 = -\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{|r|^2}\hat{\mathbf{r}}}$$



$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 - \vec{\mathbf{r}}_1, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|r|}$$

$$r = |r| = \|\vec{\mathbf{r}}\|$$

Coulomb-Gesetz



$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_0 = -\vec{\mathbf{F}}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 q_1}{|r|^2}\hat{\mathbf{r}}}$$

$$\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}}_0 - \vec{\mathbf{r}}_1, \qquad \hat{\mathbf{r}} = \frac{\vec{\mathbf{r}}}{|r|}, \qquad r = |r| = \|\vec{\mathbf{r}}\|$$

→ Die Proportionalitätskonstante im Coulomb-Gesetz hängt dabei vom Einheitensystem (Definition der Einheitsladung ...) ab!

→ ε_0 ist dabei die „Influenzkonstante" („permittivity of free space")

$$f^* = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 10^{-7}\cdot c^2 \cdot \frac{N}{A^2} = (8.987551787...)\cdot 10^9 \frac{N\cdot m^2}{A^2\cdot s^2} \approx 9\cdot 10^9 \frac{N\cdot m^2}{C^2}$$

Lichtgeschwindigkeit

Coulomb-Kraft vs. Gravitationskraft

- Ladungen von jeweils 1 Coulomb in Berlin und Potsdam (r~30km) erzeugen eine Kraft von 10 Newton (entspricht der Gewichtskraft einer Masse von 1 kg)

- Ein Atom wird durch elektrische Anziehungskräfte zusammengehalten. Es gilt dabei für den Grundzustand des Wasserstoffs

$$r_{atom} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} \approx 0{,}529\cdot 10^{-10}\,\mathrm{m}$$

- Würde das Atom lediglich durch die Gravitationsanziehung zwischen Proton und Elektron zusammengehalten, dann wäre

$$\tilde{r}_{atom} = \frac{\hbar^2}{G(m_e m_p)\,m_e} \approx 1.2\cdot 10^{29}\,\mathrm{m} \approx 1.27\cdot 10^{13}\,\mathrm{Lichtjahre}$$

Grundaussagen der Elektrostatik

(6) Die elektrische Kraft zwischen Elementarteilchen ist um viele Größenordnungen stärker als die Gravitationskraft. Der Faktor beträgt dabei für die Paarungen

(6a) Proton – Proton: $1.2 \cdot 10^{36}$

(6b) Proton – Elektron: $2.3 \cdot 10^{39}$

(6b) Elektron – Elektron: $4.2 \cdot 10^{42}$

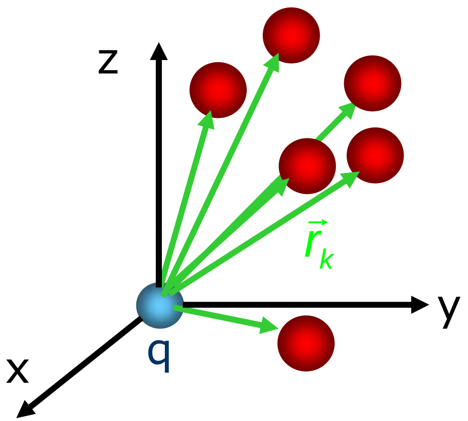
Grundaussagen der Elektrostatik

(7) Für Kräfte zwischen Ladungen gilt das Superpositionsprinzip.

- Welche Kraft wirkt auf eine Probeladung $\mathbf{q_0}$, falls mehrere Punktladungen $\mathbf{q_k}$ $\mathbf{\{k=1...n\}}$ vorhanden sind?
  - Die Abstandsvektoren zwischen $\mathbf{q_0}$ und den Ladungen $\mathbf{q_k}$ sind gegeben durch

    $$\vec{\mathbf{r}}_k = \vec{\mathbf{r}}_0 - \vec{\mathbf{r}}_k \,,$$

  - Die resultierende Kraft auf $\mathbf{q_0}$ ergibt als Summe über alle Kräfte zwischen $\mathbf{q_0}$ und den $\mathbf{q_k}$ (Superpositionsprinzip):



$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_0 = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{r_k^2}\, \hat{\mathbf{r}}_k}$$

Elektrisches Feld

- Die Formel für die Kraft auf ein Probeteilchen

$$\boxed{\vec{\mathbf{F}}_0 = q_0 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{r_k^2}\,\hat{\mathbf{r}}_k}$$

- legt es nahe, diese Formel zu zerlegen und eine neue Größe einzuführen:

- Das elektrische Feld ist definiert durch die Kraftwirkung auf eine (infinitesimal) kleine Punktladung

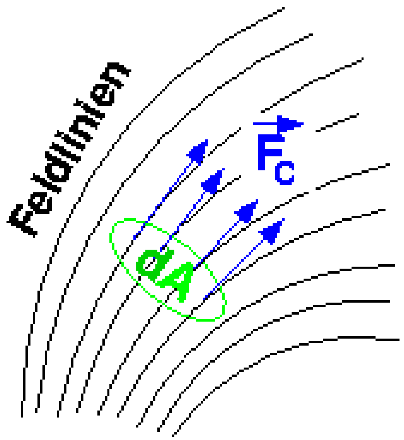
$$\boxed{\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{q_k}{r_k^2}\,\hat{\mathbf{r}}_k} \quad \boxed{\vec{\mathbf{F}}_0 = q_0 \cdot \vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}_0)} \quad \vec{\mathbf{r}}_k = \vec{\mathbf{r}}_0 - \vec{\mathbf{r}}_k,$$

- SI-Einheit: [E-Feld] = [Kraft] / [Ladung] = Newton / Coulomb
- [E-Feld] = [Spannung] / [Länge] = Volt / Meter

Später ...

Regeln für Feldlinien

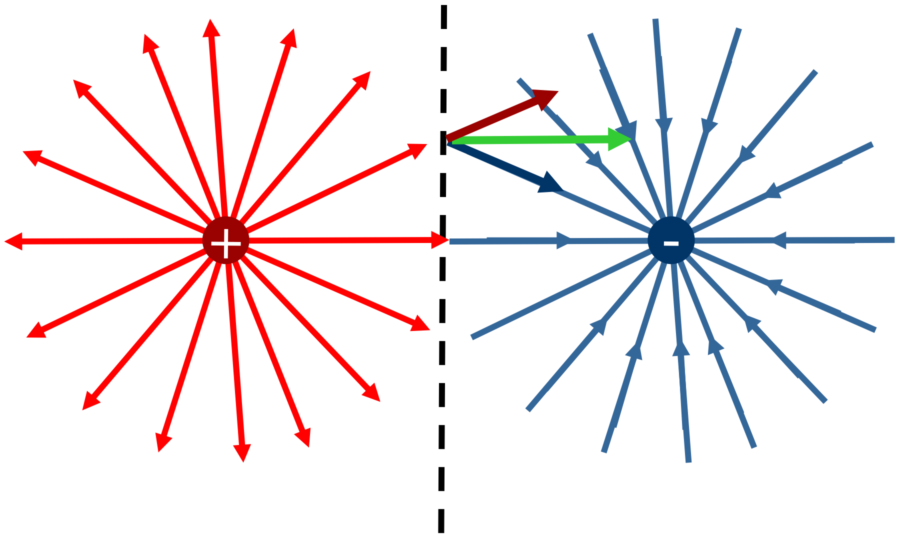
- Feldlinien sollen ein intuitives Bild der Stärke und Richtung eines Feldes im zwei bzw. dreidimensionalen Raum geben.
  - Die Richtung der Tangente an die elektrische Feldlinie in einem Punkt ist identisch zu der Richtung der Kraft, die in diesem Punkt durch das Feld auf eine **positive** Punktladung ausgeübt wird.
  - Die Intensität der Feldlinien (= Anzahl der Feldlinien pro Fläche **dA** senkrecht zum Feld) ist proportional zur Stärke der Kraft, die durch das elektrische Feld auf eine Punktladung ausgeübt wird.
  - Im Falle von statischen Ladungen: Elektrische Feldlinien beginnen immer an den positiven Ladungen und enden an den negativen Ladungen.
  - Elektrische Feldlinien kreuzen sich nicht, d.h. das elektrische Feld ist in jedem Punkt des Raums eindeutig, denn gäbe es einen Kreuzungspunkt, so erhielte man zwei unterschiedliche Feldstärken.

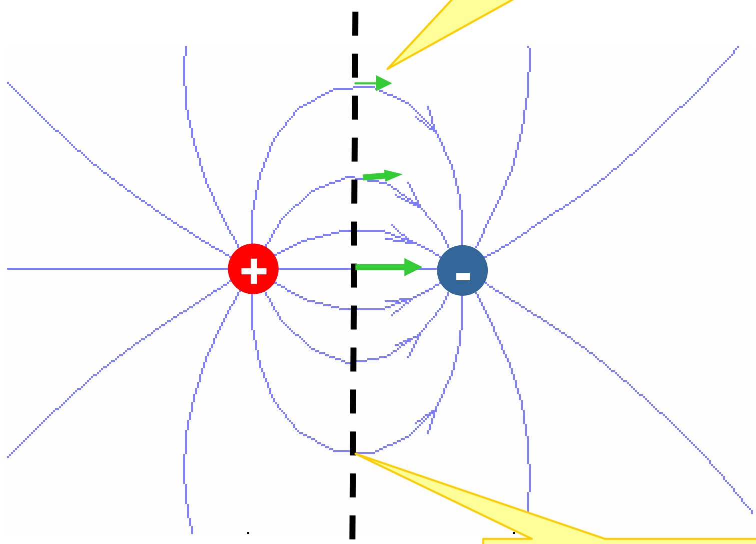


Überlagerung zweier Felder

- Feldstärken addieren sich vektoriell

$$\vec{E}_{ges} = \frac{\vec{F}_{ges}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$





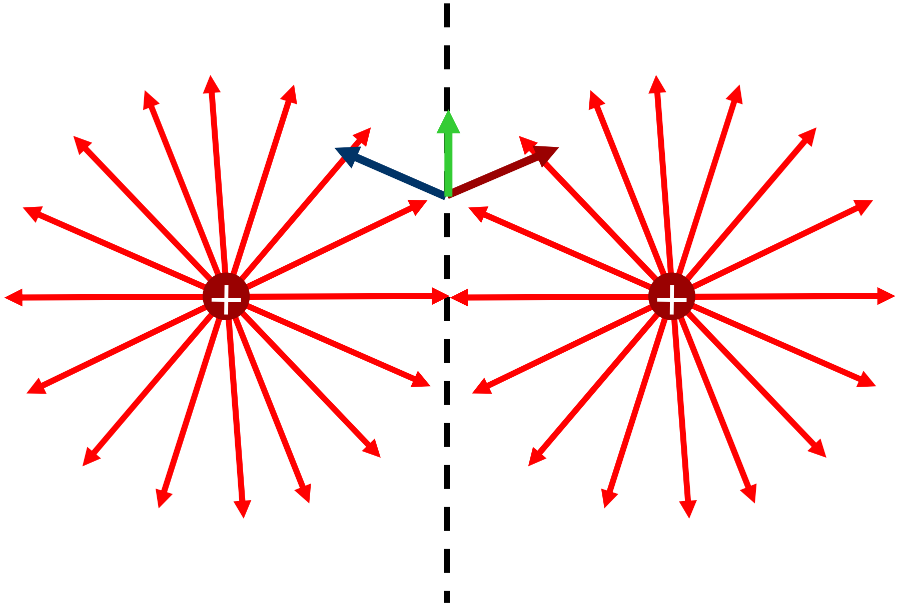
Richtung der Feldstärke ist Tangente an Feldlinie

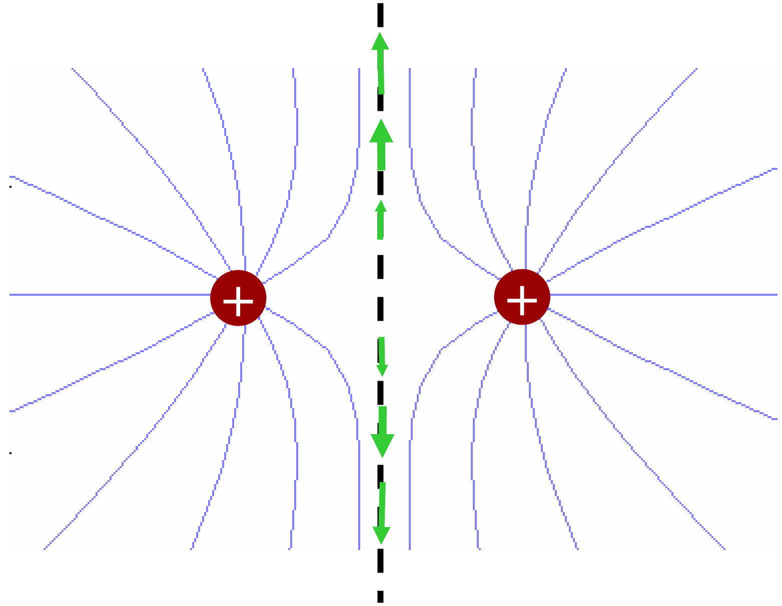
Feld(stärke) nimmt mit Abstand ab

Überlagerung zweier Felder

- Feldstärken addieren sich vektoriell

$$\vec{E}_{ges} = \frac{\vec{F}_{ges}}{q} = \frac{\vec{F}_1 + \vec{F}_2}{q} = \frac{\vec{F}_1}{q} + \frac{\vec{F}_2}{q} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$





Größenordnung von E-Feldern

Tabelle 18.1 In der Natur und in unserer technischen Umgebung vorkommende elektrische Feldern

	$E/\mathrm{N \cdot C^{-1}}$
Stromleitungen von Wohnhäusern	10^{-2}
Radiowellen	10^{-1}
In der Atmosphäre	10^{2}
Sonnenlicht	10^{3}
Unter einer Gewitterwolke	10^{4}
In einem Blitz	10^{4}
In einer Röntgenröhre	10^{6}
Am Ort des Elektrons eines Wasserstoffatoms	$6 \cdot 10^{11}$
Auf der Oberfläche eines Urankernes	$2 \cdot 10^{21}$

Wirkung von E-Feldern

a) einzelne Ladung ➔ $\boxed{\vec{F} = Q \cdot \vec{E}}$

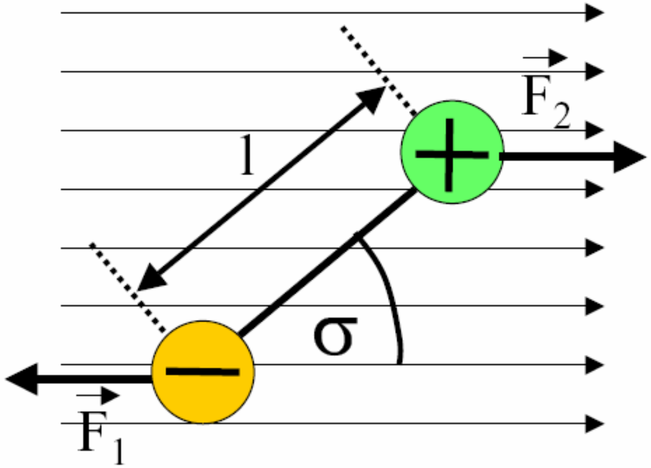
➔ je nach Art der Ladung Kraftwirkung entlang der Feldlinien

b) Dipol (zwei gleich große entgegengesetzte Ladungen +q und -q im Abstand l)

➔ Kraftwirkungen

$\vec{F}_1 = -q \cdot \vec{E}_1$ und $\vec{F}_2 = +q \cdot \vec{E}_2$

(allgemein $\vec{E} = \vec{E}(r)$ ortsabhängig)



➔ im homogenen Feld

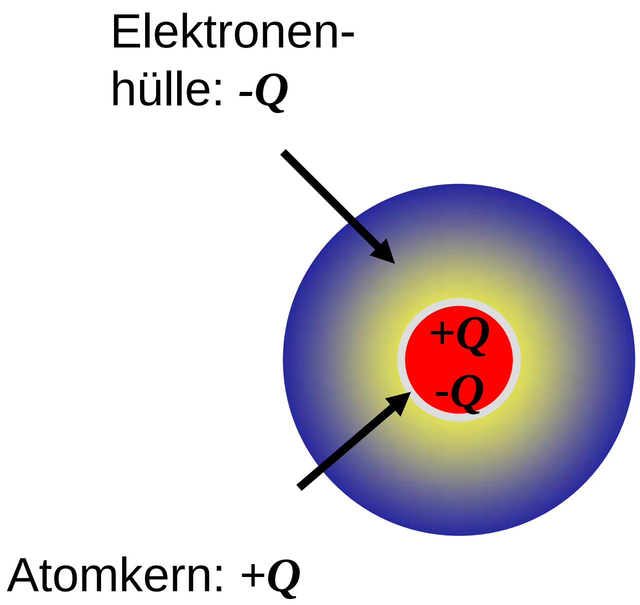
Drehmoment:

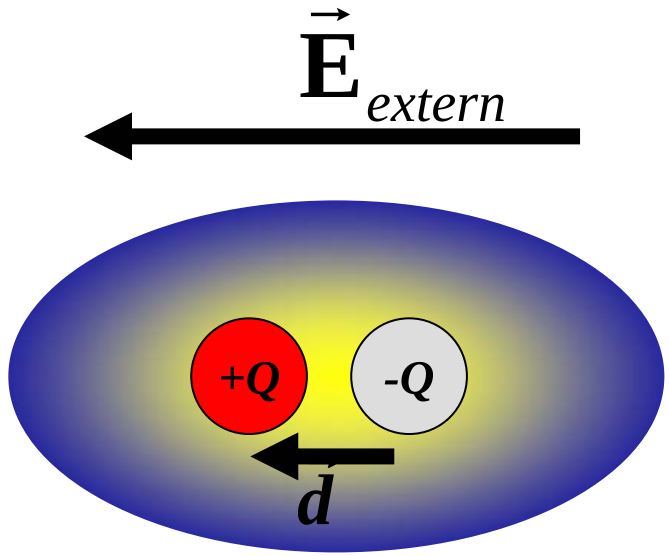
➔ im inhomogenen Feld ($E_2 = E_1 + \Delta E$) zusätzliche Kraft:

(zieht den Dipol nach Ausrichtung immer ins Feld hinein)

Wirkung von E-Feldern / Influenz

- Für „polarisierbare“ Nichtleiter:
- Ladungsträgerverteilung kann sich lokal trotzdem ändern !



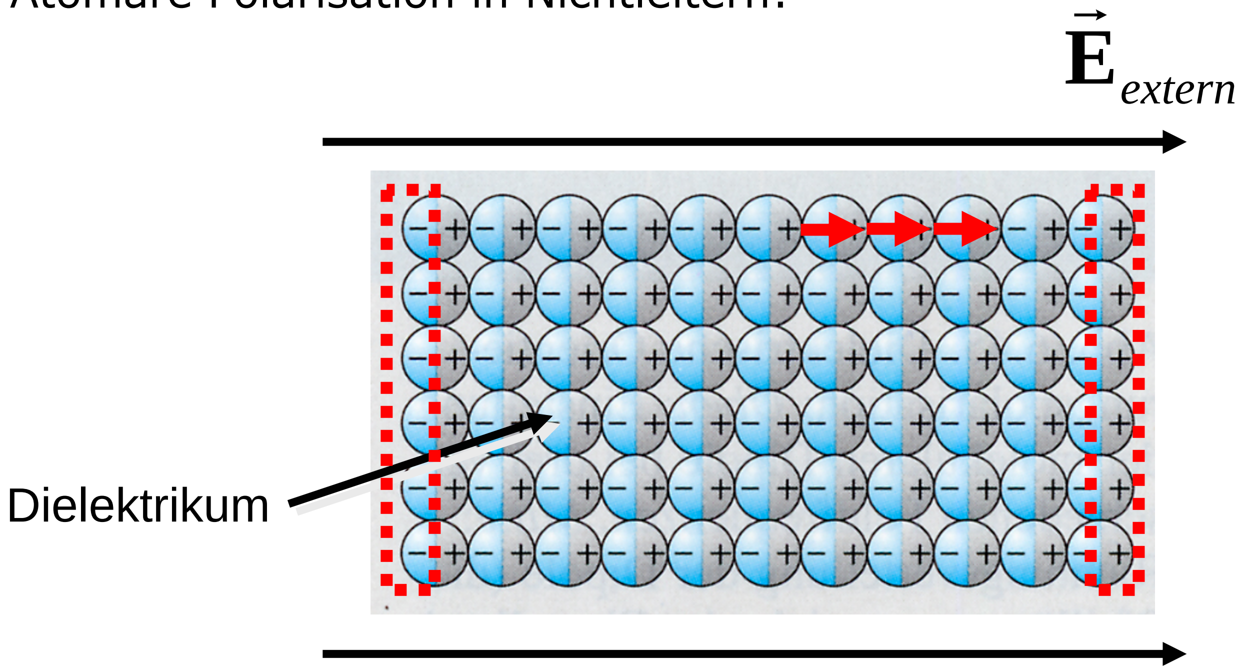


- Gesamtladung: 0
  positiver und negativer
  Ladungsschwerpunkt
  liegen übereinander

Ladungsschwerpunkte durch
elektrisches Feld räumlich getrennt:
es entsteht elektrischer Dipol,
Atom wird ***polarisiert***

Wirkung von E-Feldern / Influenz

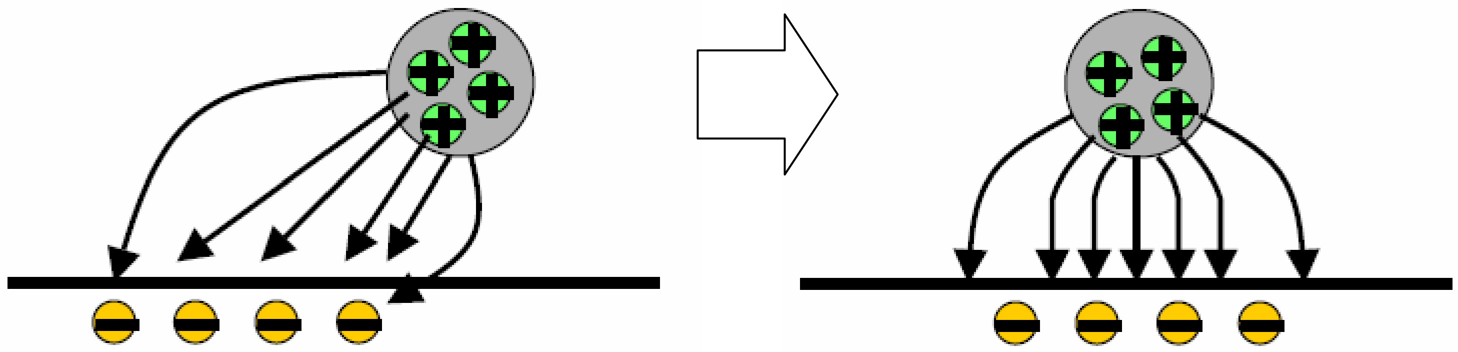
- Atomare Polarisation in Nichtleitern:



- Das externe elektrische Feld
  - erzeugt atomares Dipol-moment und Oberflächenladung
  - schwächt Feld im *Inneren* des „Dielektrikums"
  - geht Polarisation aus Verschiebung der positiven relativ zu negativen atomaren Ladungen hervor, so spricht man von *„Verschiebungspolarisation"*

Wirkung von E-Feldern / Influenz

- Für Leiter (z.B. Metalle) gilt:
- Ladungsträger (Leitungselektronen in Metallen) sind leicht verschiebbar

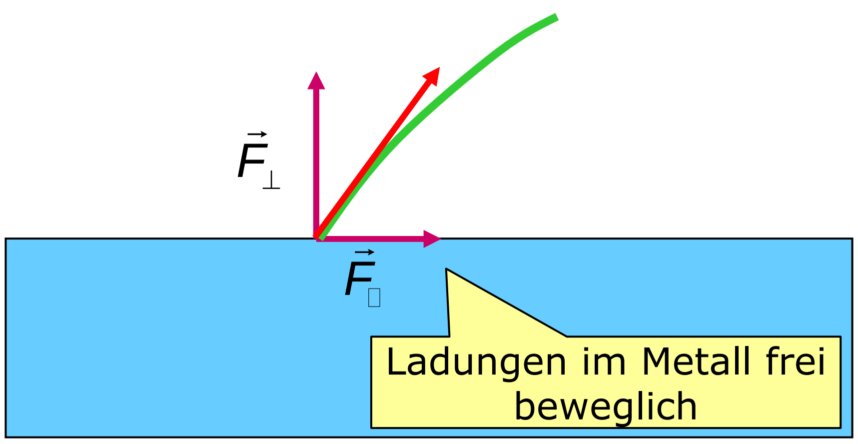


- → Influenz-Effekte, Abschirmung elektrischer Felder, Ausgleich von Spannungs- und Potentialdifferenzen (später ...)

Wirkung von E-Feldern / Influenz

- In der Elektrostatik stehen Feldlinien (=Richtung des Feldes) immer senkrecht auf einem Leiter
- *Was würde geschehen, falls dies nicht so wäre?*
  - Zerlege elektrisches Feld in Komponente transversal und parallel zur Oberfläche
  - parallele Komponente wirkt auf Ladungen im Metall
  - Da Ladungen im Metall frei beweglich, fließt ein Strom bis Ladung auf Metall so verteilt ist, dass Feldlinien auf Oberfläche senkrecht enden

$\Rightarrow$ Influenzladungen

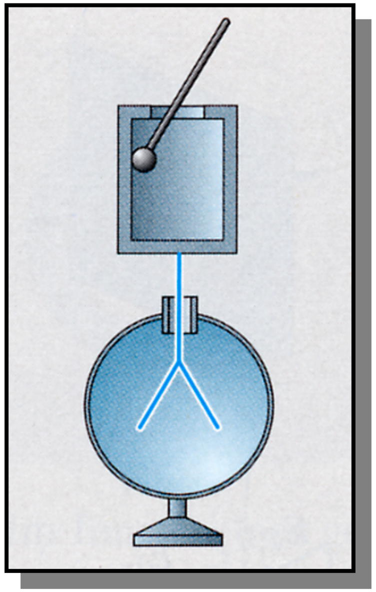


Wiederholung zur Elektrostatik

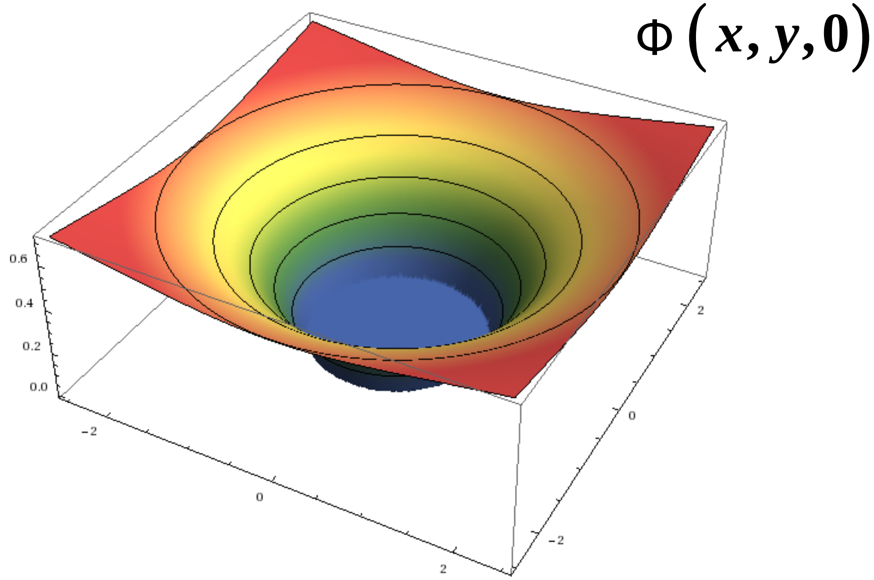
- Auf der Oberfläche von elektrischen Leitern stehen die Linien des elektrischen Feldes senkrecht.

- Elektrische Leiter sind Äquipotentialflächen, durch elektrische Leiter verbundene Körper haben das gleiche Potential.

- Im leeren Inneren von elektrisch leitfähigen Hohlkörpern existiert kein elektrisches Feld, das Potential ist also überall gleich.

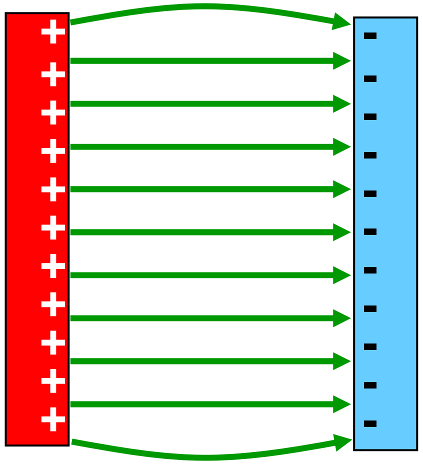


Faraday-Becher



Potential einer geladenen Hohlkugel

Wiederholung zur Elektrostatik



- Im Inneren eines Kondensators herrscht ein homogenes elektrisches Feld.

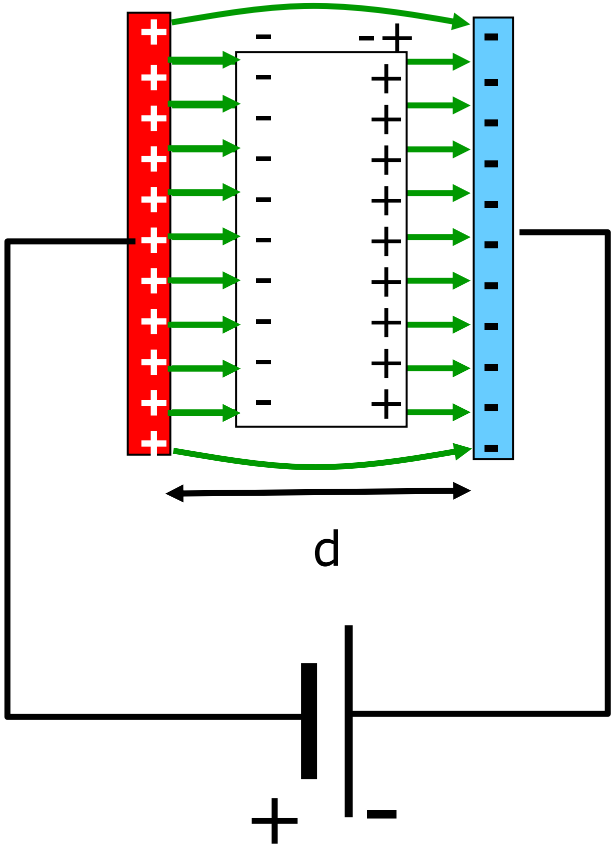
- Die Kapazität ist ein Maß für die pro Einheitsladung entstehende Potentialdifferenz.

$$\boxed{Q = C\,U} \quad \text{mit} \quad \boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}}$$

- Der Kondensator ist ein Energiespeicher.

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C\,U^2}$$

Kondensator mit Dielektrikum



- Bei Isolator (Dielektrikum) zwischen den Kondensatorplatten passier folgendes:
  - Polarisation → Im Isolator wird ein Gegenfeld aufgebaut
  - Feld wird abgeschwächt
  - geringere Kraft d.h. reduziertes E-Feld

$$E_{Dielektrikum} = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_{Vakuum}$$

ε_r : *Dielektrizitätszahl*

$$C = \varepsilon_r \cdot \frac{Q}{U} \xrightarrow[\text{Plattenkondensator}]{} C = \varepsilon_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

Dielektrizitätskonstanten

Material	ε_r
Papier	1.6-2.6
Paraffin	1.9-2.5
PVC	3.1-3.9
Glas	5.0-9.0
Titanat	$15\text{-}10^4$
Benzol	2.1
Ethylalkohol	27.9
Wasser (0°C)	87.74
Wasser (20°C)	80.1
Wasser (90°C)	58.31
Helium	1.000066
Wasserstoff	1.000264
Luft	1.000590

Wiederholung zur Elektrostatik

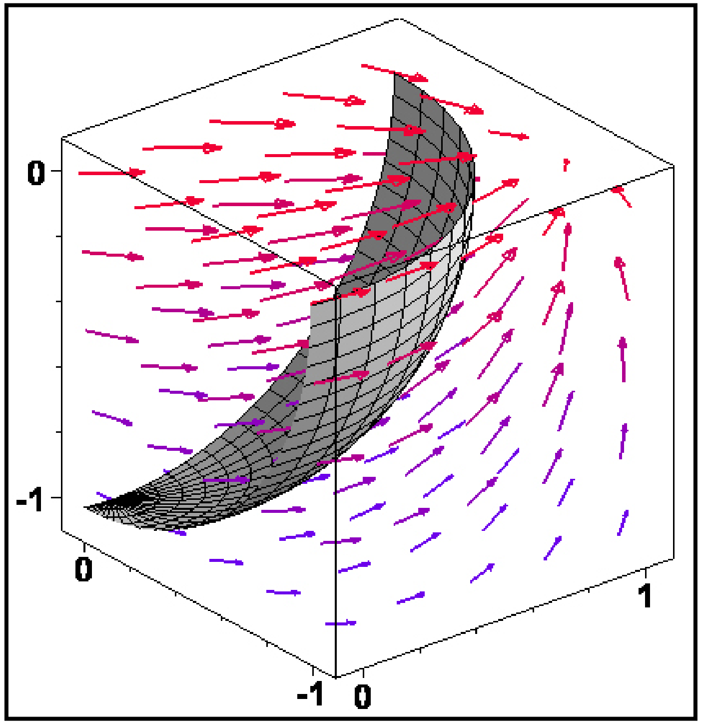
- Elektr. Ladungen sind Quellen bzw. Senken des elektrischen Feldes

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- Insbesondere ist das Feld im ladungsfreien Raum divergenzfrei!

- Der elektrische Fluss durch eine geschlossene Oberfläche ist proportional zur eingeschlossenen Ladung:

$$\boxed{\psi = \oint_{\text{Oberfläche}} \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0}}$$



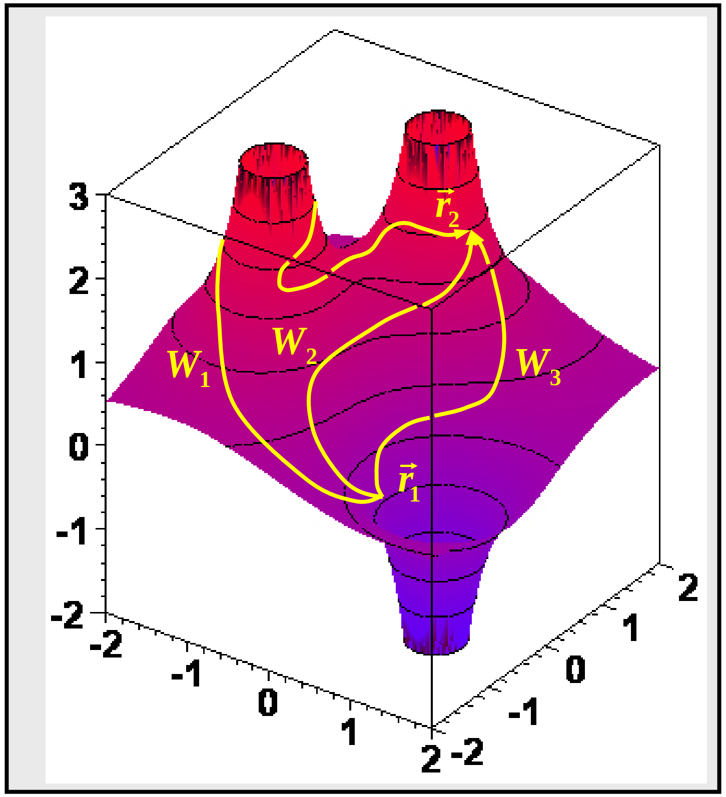
Wiederholung zur Elektrostatik

- Das statische elektrische Feld ist rotationsfrei.

$$\boxed{\mathrm{rot}\vec{E} = 0}$$

Deshalb kann man ein Potential angeben, so dass:

$$\boxed{\vec{E} = \mathrm{grad}\,\phi}$$



$$\Phi(x, y, 0)$$

- Potentialdifferenzen heißen Spannungen und sind ein Maß für die im elektrischen Feld gespeicherte Arbeit pro Einheitsladung.

Wiederholung Strom und Widerstand

- Elektrischer Strom → Transport von Ladungsträgern
- Elektrische Ströme können nachgewiesen werden durch verschiedene Wirkungen :
  - magnetische Wirkung
  - Wärmewirkung
  - Chemische Wirkung
- Elektrische Stromstärke

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{\text{verschobene Ladung}}{\text{Zeit}} \qquad [I] = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Sekunde}} = \text{Ampere}$$

- Stromdichte

$$\left|\vec{j}\right| = \frac{I}{A} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} \qquad I = \int \vec{j} \cdot d\vec{A}$$

- Stromrichtung → Bewegungsrichtung der positiven Ladungsträger (Also auch: Bewegung von Elektronen im Leiter entgegengesetzt zur Stromrichtung)

Wiederholung Strom und Widerstand

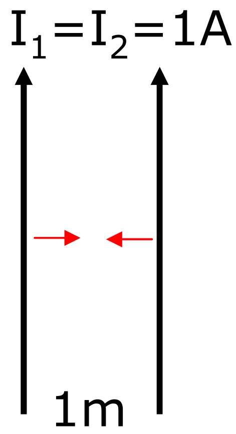
- Strom ist eine der 7 Basiseinheiten des SI-Systems

  - d.h. sie muss definiert werden.
    (wie z.B. Meter, Kilogramm, und Sekunde)

  - Eichung über die magnetische Wechselwirkung

André-Marie
Ampère
(1775-1836)

Die Stromstärke **I** hat den Wert **1 A**, wenn zwei im Abstand **d = 1 m** angeordnete parallele, geradlinige und unendliche lange Leiter mit vernachlässigbaren Querschnitt von dem gleichen Strom **I** durchflossen werden und pro **l = 1 m** Leiterlänge eine Kraft $\mathbf{F = 2 \cdot 10^{-7}\ N}$ aufeinander ausüben.



Wiederholung Strom und Widerstand

- Ohm‘sches Gesetz: Beim Stromfluss durch einen Leiter sind Strom I und Spannung U proportional.

$$\boxed{R = \frac{U}{I}}$$

$$\text{Einheit} \quad [R] = \frac{V}{A} = \Omega = \text{Ohm}$$

- R wird als Ohm‘scher Widerstand bezeichnet. Er ist bei konstanter Temperatur unabhängig von I

- Das Ohm‘sche Gesetz beruht darauf, das sich Elektronen im Leiter nicht über weite Distanzen „ballistisch“ bewegen können, sondern das ihre Geschwindigkeit durch sehr häufig Stöße immer wieder verändert wird

- Der elektrische Widerstand eines Leiters hängt vom atomaren Aufbau und von der Geometrie des Leiters ab.

$$R = \rho \cdot \frac{l}{A}$$

  - des Leiters
  - A: Querschnittsfläche
  - ρ:spezifischer elektrischer Widerstand (unabhängig von Geometrie)
    - $[\rho]=\Omega\cdot m$

- Im Allgemeinen ist der Widerstand temperaturabhängig. Bei steigender Temperatur kann der Widerstand sowohl größer als auch kleiner werden.

Wiederholung Strom und Widerstand

- Kirchhoffsche Regeln:
- Knotenregel: „Die vorzeichenrichtige Summe aller Ströme, die in einen Netzwerkknoten herein- oder herausfließen, ist immer 0A.”

$$\sum I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots = 0$$

  - Physikalisches Prinzip: Ladungserhaltung
- Maschenregel: „Die vorzeichenrichtige Summe aller Spannungen entlang einer Masche (Schleife) in einem Netzwerk ist immer 0V.“

$$\sum U_i = U_1 + U_2 + U_3 + \ldots = 0$$

  - Physikalisches Prinzip: Energieerhaltung (Potentialdifferenz ist unabhängig vom Weg, statisches elektrisches Feld ist „rotationsfrei“)

- Serien- und Parallelschaltung von Ohm‛schen Widerständen
  - Serienschaltung: $$\boxed{R_{ges} = \sum R_i}$$
  - Parallelschaltung: $$\boxed{\frac{1}{R_{ges}} = \sum \frac{1}{R_i}}$$

Wiederholung Strom und Widerstand

- Elektrische Leistung:

- Fließt Strom durch einen Ohmschen Widerstand, dann wird elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt.

- Für die dissipierte Leistung (i.e. die pro Zeiteinheit umgewandelte Energie gilt dabei

$$\boxed{P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}}$$

Wiederholung Magnetismus

- Es existieren Objekte welche, obwohl nicht elektrisch geladen, Kräfte aufeinander ausüben. Dabei unterscheiden wir:
- „Magneten“:
  - Üben stets Kräfte aufeinander aus ...
- Magnetische Materialien:
  - Kräfte nur in Anwesenheit von Magneten ...
  - man unterscheidet weiter zwischen
  - Diamagnetischen Materialien
    - werden von Magneten abgestoßen
  - Paramagnetischen Materialien
    - werden von Magneten angezogen
  - Ferromagnetischen Materialien
    - werden ebenfalls von Magneten angezogen
    - Anziehung im Allgemeinem stärker als bei Paramagneten
    - Es gibt „Gedächtniseffekte“ (Hysterese)
    - Können sich in Magnete umwandeln ...

Wiederholung Magnetismus

- Auf bewegte geladene Teilchen wirkt im Magnetfeld eine zusätzliche Kraft, die Lorentzkraft.

$$\boxed{\vec{F} = q \cdot \vec{v} \times \vec{B}}$$

  - Unterscheidungsmerkmal: Elektrische Kraft hängt nicht von der Geschwindigkeit des Teilchens ab. Die magnetische Kraft sehr wohl !

- Für die Lorentzkraft gilt:

  - Kraft F steht senkrecht auf Bewegungsrichtung (v) der Ladung Q
  - Kraft F steht senkrecht auf Magnetfeld B
  - „Rechte-Hand-Regel“

Wiederholung Magnetismus

- In einem homogenen Magnetfeld bewegen sich geladene Teilchen aufgrund der Lorentzkraft auf spiralförmigen Bahnen.

- Sonderfall: Ist die Anfangsgeschwindigkeit senkrecht zur Richtung des Magnetfelds, dann bewegen sich die geladenen Teilchen auf kreisförmigen Bahnen in einer Ebene senkrecht zum Magnetfeld.

- Es gelten dann die folgenden Beziehungen für die Umlauffrequenz (“Larmor-Frequenz“) und den Radius der Kreisbahn:

$$\boxed{\omega_L = \frac{q}{m} \cdot B} \qquad \boxed{r_L = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B}}$$

- Bemerkung: Die Larmor-Frequenz ist unabhängig von der Anfangsgeschwindigkeit des Teilchens !

Wiederholung Magnetismus

- Ströme (und bewegte Ladungen ...) erzeugen magnetische Felder. Dies wird beschrieben durch das Amperesche Gesetz:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \qquad \mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \frac{N}{A^2} \approx 1.2566370614 \cdot 10^{-6} \frac{V \cdot s}{A \cdot m}$$

- Wichtige Spezialfälle:
  - Draht (kreisförmige Feldlinien)

$$\boxed{B_{Draht} = \frac{\mu_0 \cdot I}{2\pi \cdot r}}$$

  - Spule (im inneren homogenes Feld)

$$\boxed{\left|\vec{B}\right| = \mu_0 \cdot \frac{I \cdot n}{L}}$$

I : Strom durch Spule

n : Zahl der Windungen

L : Länge der Spule

Wiederholung Induktionsgesetz

- Definiert man den magnetischen Fluss durch eine Fläche A gemäß

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

- dann bewirkt jede Änderung des magnetischen Flusses das Entstehen einer Spannung entlang des Randes der Fläche (Faradaysches Induktionsgesetz)

$$\boxed{U_{Rand} = \oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}}$$

- Das negative Vorzeichen entspricht dabei der Lenzschen Regel:
- Ein von der induzierten Spannung hervorgerufener Strom ist immer so gerichtet, dass sein Magnetfeld der Induktionsursache entgegenwirkt.

Wiederholung Induktionsgesetz

- Für die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses kann man zwei Fälle unterscheiden:
- Bei konstantem Magnetfeld ändern sich Größe und/oder Orientierung der durchströmten Fläche
  - Hier erklärt sich die induzierte Spannung physikalisch aus der auf die Ladungsträger im Leiter wirkenden Lorentzkraft.
- Bei konstanter Größe und Orientierung der durchströmten Fläche aber zeitabhängigen Magnetfeld
  - Hier braucht man zur physikalischen Erklärung ein zusätzliches physikalisches Gesetz, das auch im freien Raum gilt:
-

$$\oint_{\partial A} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\int_{A} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A} \qquad \mathrm{rot}\, \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Wiederholung Wechselstrom

- In der Elektrotechnik und praktischen Technik sehr wichtig ist der Wechselstrom.
- Der einfachste Wechselstromgenerator besteht aus einer im homogenen Magnetfeld rotierenden Leiterschleife mit N Windungen. Dabei gilt für die zeitabhängige induzierte Spannung

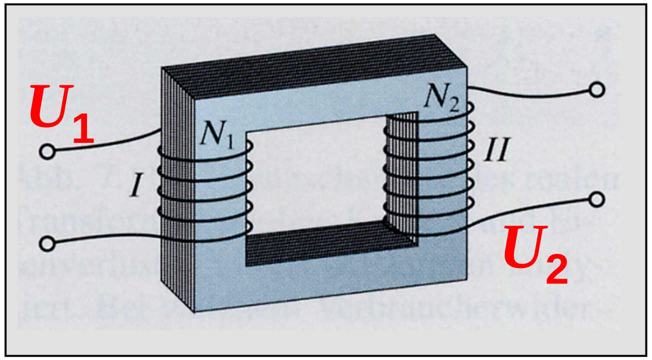
$$U_{Ind}(t) = B \cdot N \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t + \varphi)$$

- Dabei gilt für die induzierte Spannung
  - Die Amplitude ist proportional zur Stärke des Magnetfeldes B
  - Die Amplitude ist proportional zur Fläche der Leiterschleife A
  - Die Amplitude ist proportional zur Windungszahl N
  - Die Amplitude ist proportional zur Rotations(winkel)frequenz ω
  - Die Phase φ hängt von der relativen Ausrichtung von Leiterschleife und Magnetfeld ab.

Wiederholung Wechselstrom

- Einige wichtige Vorteile der Wechselstromtechnik
  - Generatoren erzeugen standardmäßig Wechselstrom (Gleichstrom Generatoren sind deutlich komplexer und störanfälliger)
  - Durch Umkehrung des Generatorenprinzip erhält man einfach aufgebaute und effiziente Elektromotoren (Gleichstrom Elektromotoren sind deutlich komplexer und störanfälliger)
  - Durch Transformatoren lässt sich die Spannung von Wechselströmen leicht ändern und für verschiedene Aufgaben optimieren. Insbesondere gilt dies für die verlustarme Übertragung in Hochspannungs-Fernleitungen.
- Für Transformatoren mit N_1 Windungen auf der Eingangsseite und N_2 Windungen auf der Ausgangseite gilt

$$\frac{U_2(t)}{U_1(t)} = -\frac{N_2}{N_1}$$



- Bemerkung: Hier ist nur das Verhältnis der Windungszahlen wichtig. Die absolute Größe ist aber bei realen Anwendungen durchaus relevant und wird dann den Anforderungen entsprechend optimiert.

Wiederholung Maxwellgleichungen

- Ladungen erzeugen elektrische Felder:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

- Es gibt keine Ladungen, die magnetische Felder erzeugen:

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0$$

- Ströme und zeitabhängige E-Felder erzeugen magnetische (Wirbel-)Felder:

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

- Das statische E-feld wirbelfrei, aber zeitabhängige B-Felder erzeugen ein elektrisches Wirbelfeld:

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$$

Wiederholung Elektromagnetische Wellen

- Im freien Raum ohne Ströme und Ladungen (i.e., j=0 und ρ=0) können aufgrund der beiden Maxwellgleichungen

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

- trotzdem nichttriviale, zeitabhängige elektrische und magnetische Felder existieren.
- Anschauliche Erklärung:
  - Sich zeitlich ändernde elektrische Felder erzeugen sich zeitlich ändernde magnetische Felder
  - Sich zeitlich ändernde magnetische Felder erzeugen sich zeitlich ändernde elektrische Felder
  - Elektrische und magnetische Felder können sich somit gegenseitig „am Leben erhalten".

Wiederholung Elektromagnetische Wellen

- Eine spezifische Möglichkeit zur Anregung Elektromagnetischer Wellen ist der Hertz’sche Dipol.
  - Praktisch demonstriert und mathematisch beschrieben durch Heinrich Rudolf Hertz, 1886
- Es gibt vielfältige weitere Möglichkeiten zur Erzeugung elektro-magnetischer Strahlung (Leiterschleifen, Lichtabstrahlung durch Atome und Atomkerne, Laser, Maser, Schwarzkörperstrahler, Synchrotronstrahlung, Materie-Antimaterie Anihilation, Urknall, ...).
- Dabei gilt generell:
  - In der Nähe der Quelle (“Nahfeld“) sind die erzeugten Felder sehr komplex und ihre Struktur abhängig von der Natur der Quelle.
  - Weiter von der Quelle entfernt (“Fernfeld“) sind die erzeugten Felder Wellen mit einer einfachen, von der Art der Quelle nur in wenigen Parametern (Polarisation, Richtungsabhängigkeit der abgestrahlten Leistung bzw. Amplitude) abhängigen Struktur.
  - Die relevante Skalenlänge für den Übergang zwischen Nahfeld und Fernfeld ist die Wellenlänge der erzeugten Strahlung.

Wiederholung EM Wellengleichung

- Im freien Raum (i.e., keine Ströme oder Ladungen) erhält man aus zweien der Maxwellgleichungen eine Wellengleichung:

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}$$

$$\boxed{\mathrm{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$$

$$\boxed{-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}(\vec{r},t) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}(\vec{r},t)}$$

- Für die „Lichtgeschwindigkeit" c gilt dabei

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}$$

$$\boxed{c = \sqrt{\left|\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}\right|}}$$

Wiederholung EM Wellengleichung

- Alle Lösungen der EM-Wellengleichung lassen sich zusammensetzen als Summe (oder Intergral) ...aus „ebenen Wellen" der Form

$$\boxed{\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos\left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega \cdot t + \varphi\right)}$$

mit charakteristischen Größen Wellenvektor k, (Winkel)Frequenz ω und Amplitudenvektor E_0.

- Wellenvektor k und Frequenz ω sind dabei nicht unabhängig, sondern es gilt zusammen mit der Lichtgeschwindigkeit c die Beziehung

$$c^2 \left\|\vec{k}\right\|^2 = \omega^2$$

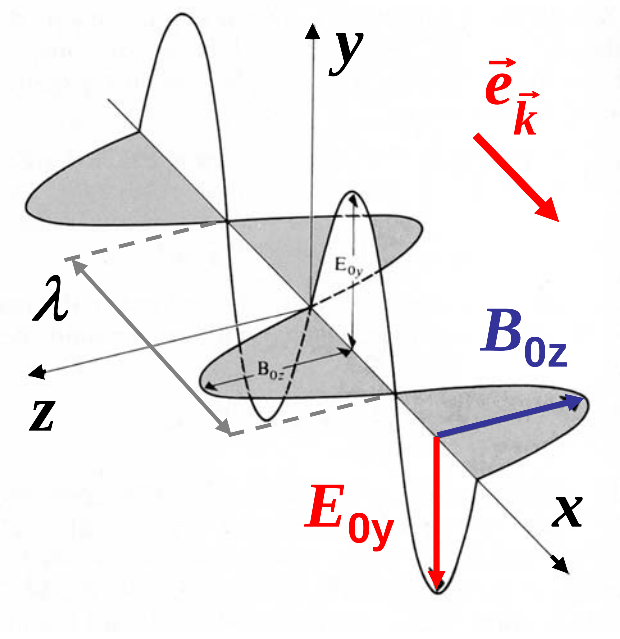
- Als weitere wichtige Größen ergeben sich hieraus die Wellenlänge λ und die Schwingungsperiode T, sowie weitere wichtige Beziehungen:

$$\lambda = 2\pi \Big/ \left|\vec{k}\right| \qquad T = 2\pi/\omega \qquad f = \omega/2\pi = 1/T \qquad c = f \cdot \lambda$$

Wiederholung EM Wellengleichung

- Zunächst einmal gilt die EM-Wellengleichung unabhängig für alle Vektorkomponenten des E_x, E_y, E_z des elektrischen Feldes.
- Aus den beiden verbleibenden Maxwellgleichungen folgen aber weitere Bedingungen und Eigenschaften einer ebenen EM-Welle:
  - E- und B-Feld stehen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_{\vec{k}}$, es handelt sich also um „Transversalwellen“
  - E- und B-Feld stehen senkrecht zueinander und sind außerdem proportional zueinander:

$$\boxed{\vec{B} = c \cdot \vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{E}}$$



Wiederholung Energietransport in EM Wellen

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$$

- EM-Wellen können (auch im Vakuum !) Energie transportieren.
- Dies wird beschrieben durch den Poyntingvektor, mathematische eine „Energiestromdichte", der die Intensität angibt:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} \overset{\text{Ebene Welle}}{=} \left(c^2 \cdot \varepsilon_0\right) \cdot \vec{E} \times \left(\left(\vec{e}_{\vec{k}} \times \vec{E} \right) \cdot \frac{1}{c} \right) = \left(c \cdot \varepsilon_0 \cdot \left\| \vec{E} \right\|^2 \right) \vec{e}_{\vec{k}}$$

- Wichtig: Die Intensität ist proportional zum Quadrat des E-Feldes
- Die lokale „Energiedichte" des EM Feldes wird konsistent damit beschrieben durch:

$$\frac{dW}{dV} \overset{\text{Ebene Welle}}{=} \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 \cdot \left\| \vec{E} \right\|^2 + \frac{1}{\mu_0} \left\| \vec{B} \right\|^2 \right) = \varepsilon_0 \cdot \left\| \vec{E} \right\|^2$$

- Ausserdem können des EM-Wellen auch noch Impuls transportieren

Wiederholung EM-Wellen in Materie

- In Materie ist die Ausbreitung von EM-Wellen modifiziert
- In nichtleitenden Materialien („Dielektrika") findet man

$$\boxed{c_{MED} = \sqrt{\frac{1}{\mu_r \cdot \varepsilon_r}} \cdot c = \frac{c}{n}}$$

$$\boxed{\lambda_{MED} = \frac{\lambda}{n}, \quad k_{MED} = k \cdot n}$$

mit dem Brechungsindex

$$\boxed{n = \sqrt{\mu_r \cdot \varepsilon_r}}$$

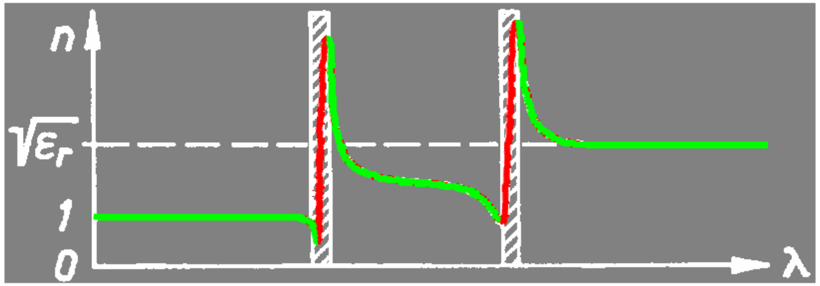
- Der Brechungsindex ist im allgemeinen abhängig von der Frequenz (→ Dispersion)
- Der Brechungsindex kann auch eine komplexes Zahl sein. In diesem Falle beschreibt sein Imaginärteil die Absorption (bzw. bei anderem Vorzeichen auch Verstärkung) im Medium.

Wiederholung EM Wellen in Materie / Dispersion

- Die Ausbreitung von EM Wellen in Materie ist im allgemeinen von der Frequenz abhängig (→ Dispersion). Insbesondere gilt dies auch für den Brechungsindex.
- Man dies beschreiben, indem man annimmt, dass die Materie aus schwingfähigen Systemen (e.g., Moleküle, Elektronen in Atomen, ...) mit jeweils spezifischen Resonanzfrequenzen besteht.
  - Diese Oszillatoren werden durch die EM-Welle angeregt. Die Amplitude und Phasenverschiebung hängt dabei von der Verstimmung zu den Resonanzfrequenzen ab.
  - Die angeregten Oszillatoren strahlen ihrerseits EM Wellen ab.
  - Die abgestrahlten EM-Wellen interferieren mit der einlaufenden Welle und modifizieren so effektiv deren Ausbreitung.
- Grösse und Vorzeichen der Dispersion hängt von der Frequenz der Welle relativ zu den Resonanzfrequenzen der Oszillatoren ab.

Wiederholung EM Wellen in Materie / Dispersion

- Grösse und Vorzeichen der Dispersion hängt von der Frequenz der Welle relativ zu den Resonanzfrequenzen der Oszillatoren ab.

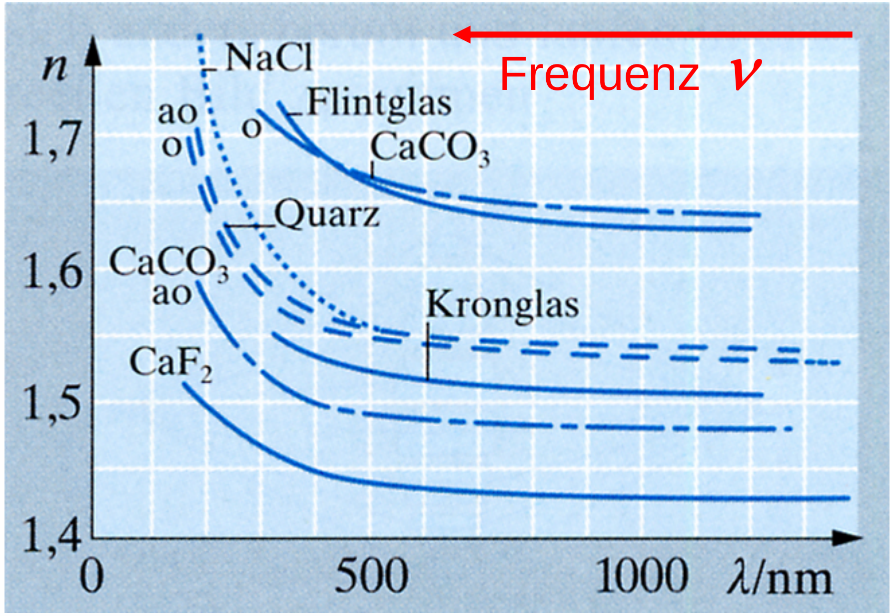


- Je nach Vorzeichen unterscheidet man zwischen

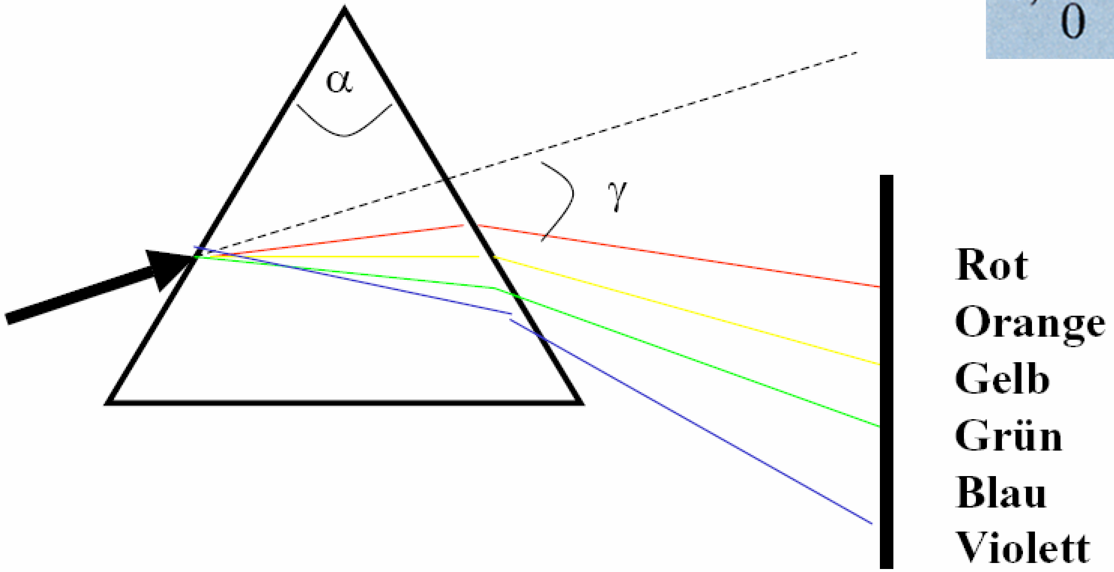
$$\frac{dc}{d\lambda} > 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda} < 0 \qquad \text{normale Dispersion}$$

$$\frac{dc}{d\lambda} < 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\mathrm{dn}}{\mathrm{d}\lambda} > 0 \qquad \text{anomale Dispersion (in Absorptionsbanden)}$$

- Für kleine Frequenzen erhält man den Brechungsindex den elektrostatischen und magnetostatischen Konstanten ε und μ.
- Für große Frequenzen erhält man den Brechungsindex des Vakuums.



Beispiel: ***optische Dispersion***



- **normale Dispersion bei durchsichtigen farblosen Stoffen d.h.: n nimmt mit abnehmender Wellenlänge zu**

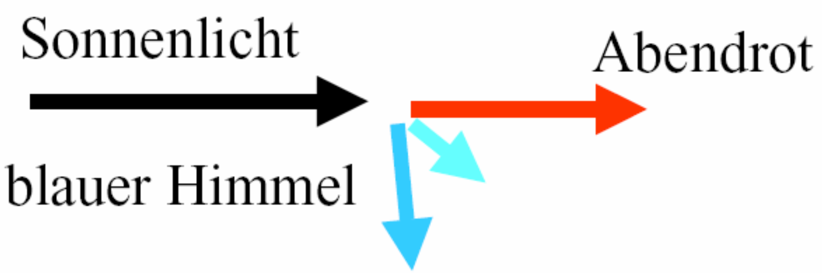
Streuung

getroffene Teilchen entziehen der Welle Energie und wirken dann als eigenes Erregerzentrum ➔ Abstrahlung mit Phasenverzögerung in alle Raumrichtungen

Strahlungsintensität der Streuung ist wellenlängenabhängig

sehr kleine Teilchen ➔ $S \sim \frac{1}{\lambda^4}$

Beispiel: blauer Himmel, Abendrot

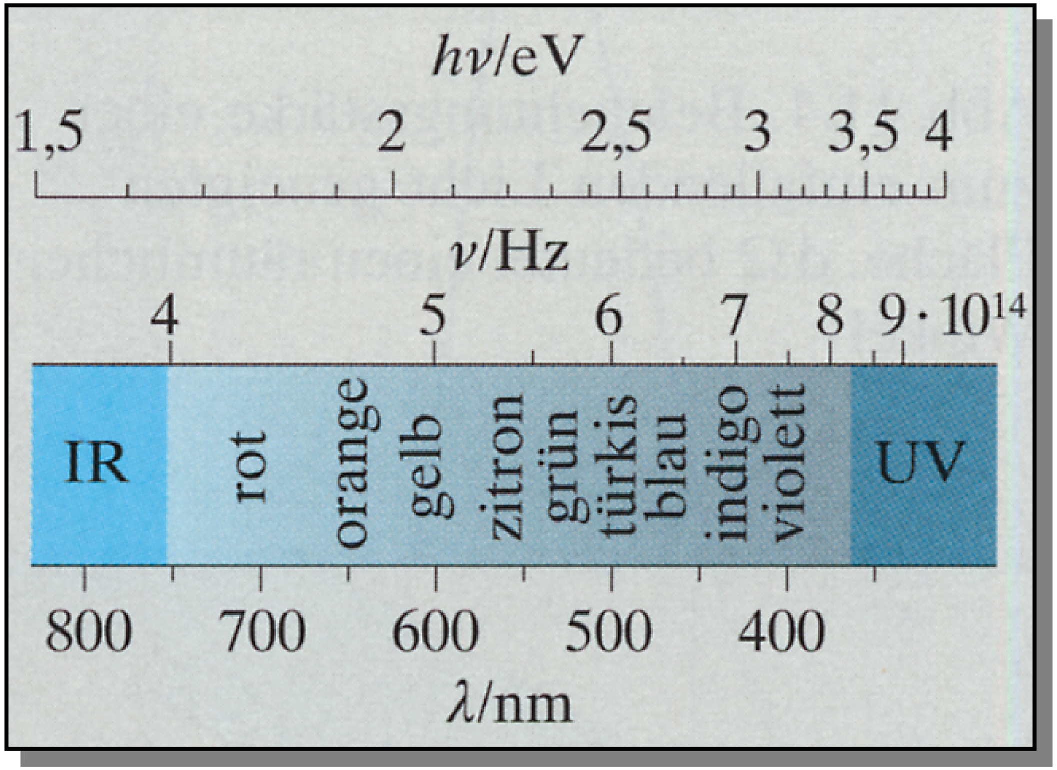


Lichtspektrum

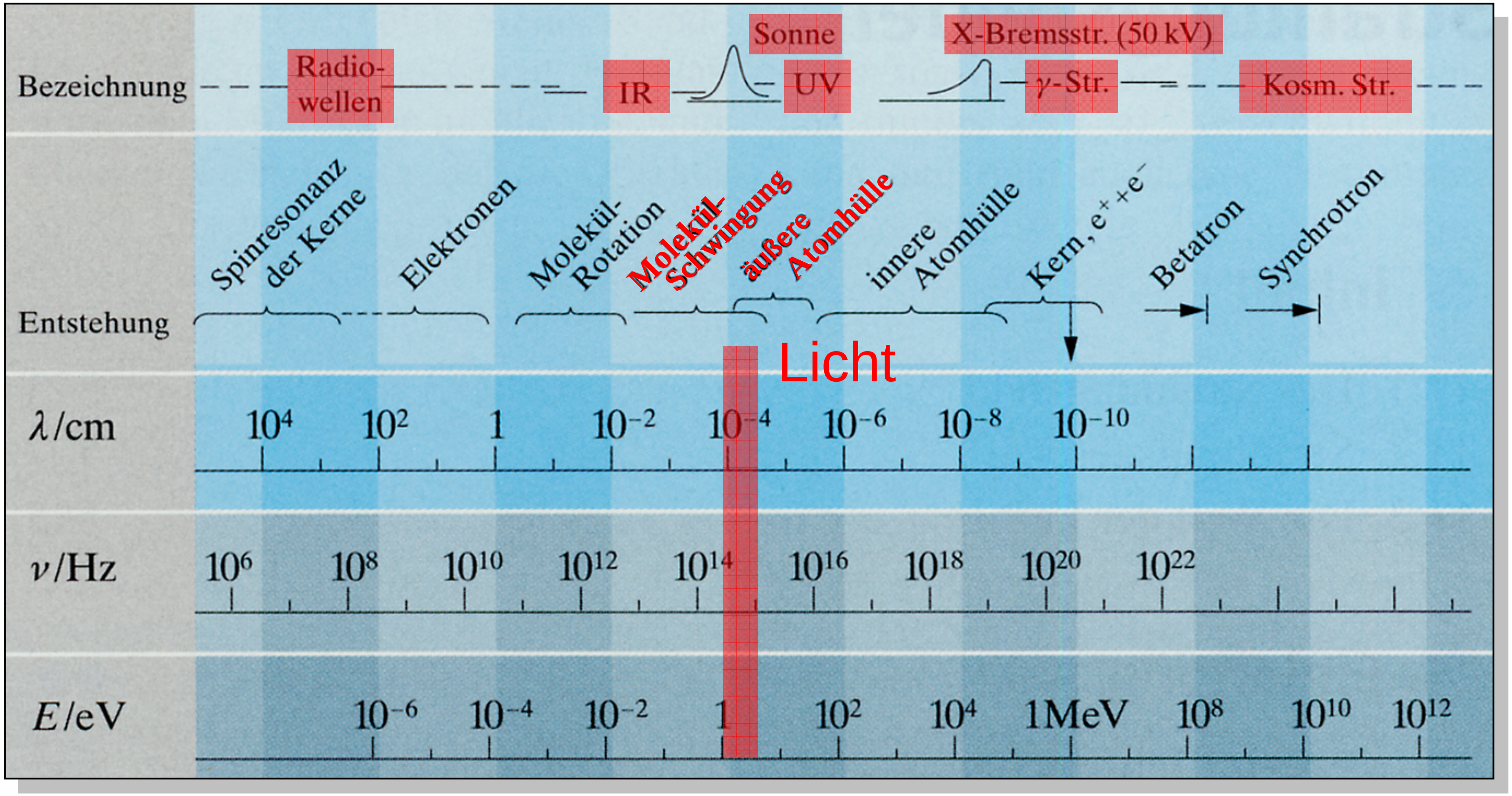
Energie [eV]:

Frequenz [Hz]:

Wellenlänge [nm]:



Elektromagnetisches Spektrum

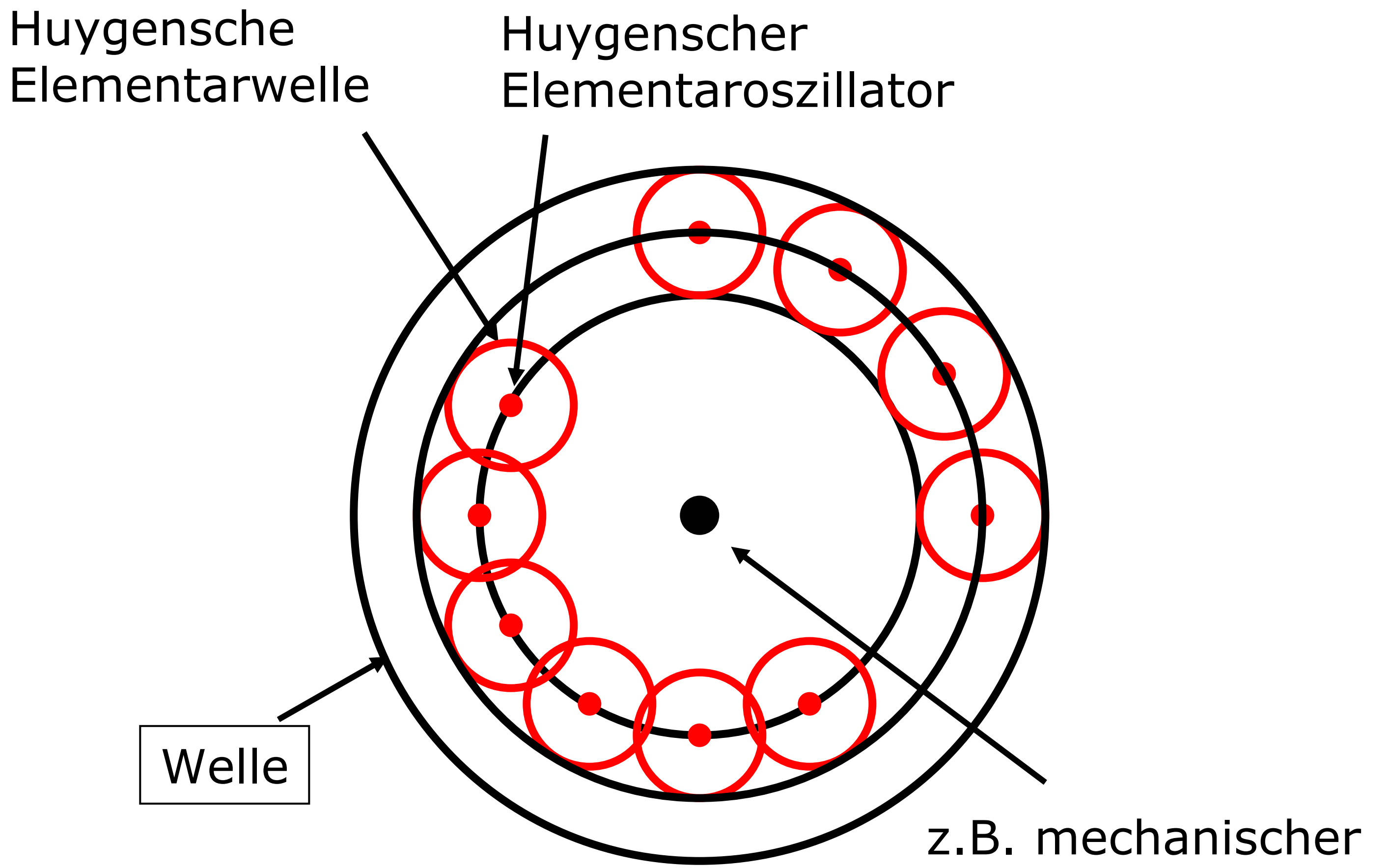


Von EM-Wellen zur geometrischen Optik

- Fragestellung: Wie breiten sich Wellen in Medien mit vom Ort abhängigen Brechungsindex aus?
- Beispiele:
  - Hindernisse aus perfekten „Absorbern"
  - Öffnungen in Hindernissen aus perfekten Absorbern
  - Ebene Grenzflächen zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex n.
  - Gekrümmte Grenzflächen zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex n.
  - Gleitende Übergänge zwischen Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex n.
  - „Spiegel"
- In vielen Fällen benötigt man dazu nicht die vollständigen Maxwell-Gleichungen, sondern kann starke Vereinfachungen vornehmen !

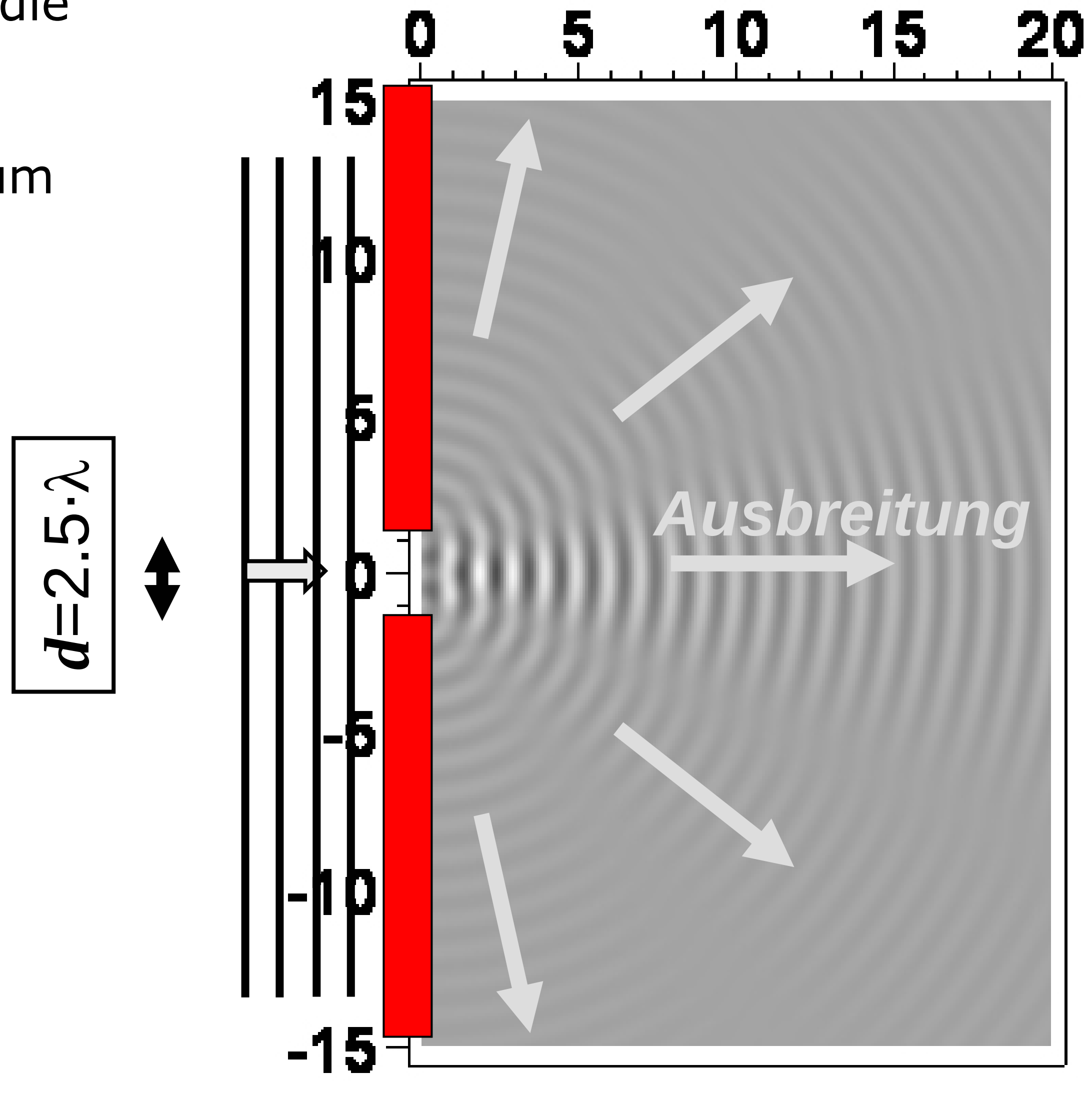
Optik

Wiederholung: Beobachtete Wellen entstehen als Überlagerung vieler Elementarwellen (Huygensches Elementarwellen)



Optik

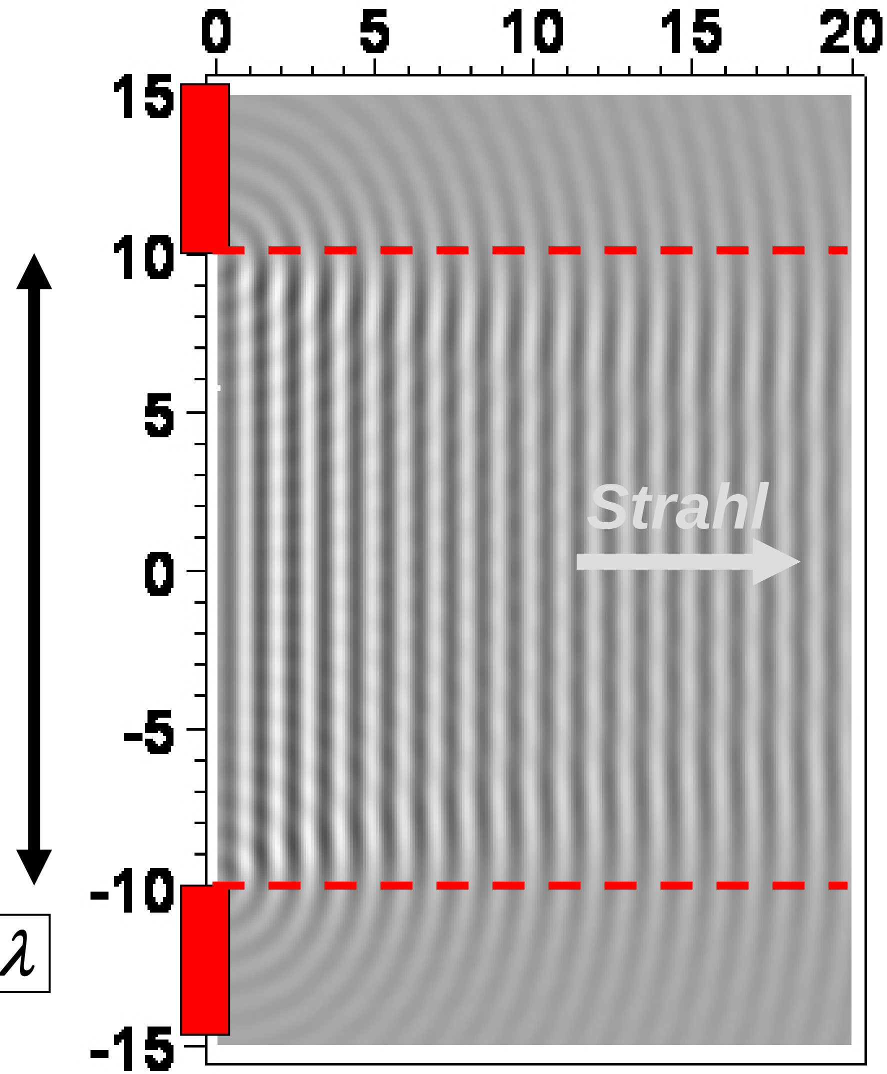
Wiederholung: Mit den Elementarwellen lässt sich die Ausbreitung von Wellenphänomenen im geometrischen Schattenraum erklären.



Optik

Wiederholung: Sind die geometrischen Abmessungen des Lichtstrahls und der optischen Elemente auf dem Lichtweg wesentlich größer als die Wellenlänge, dann können die Welleneigenschaften häufig vernachlässigt werden:

→ **Strahlenoptik**



$$d = 20 \cdot \lambda$$

Optik

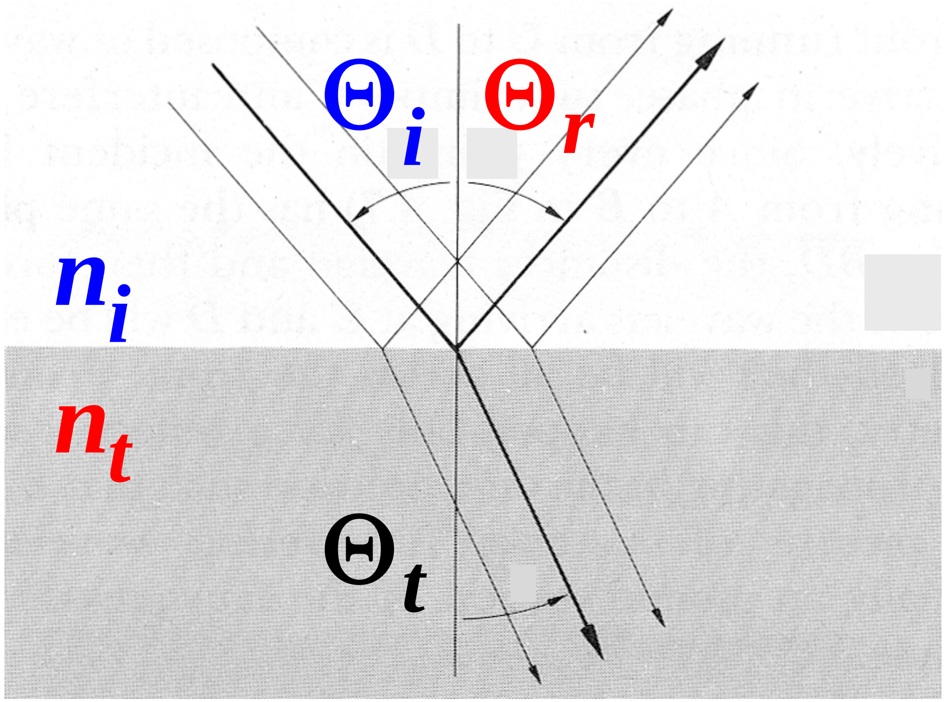
Wiederholung: Wichtige Gesetze der Strahlenoptik

Reflektionsgesetz

$$\boxed{\Theta_i = \Theta_r}$$

Brechungsgesetz

$$\boxed{\frac{\sin \Theta_i}{\sin \Theta_t} = \frac{n_t}{n_i}}$$



Optik

Wiederholung:

Die Stärke des reflektierten und transmittierten Strahls hängen vom Einfallswinkel und der Polarisation ab.

Zwei wichtige Spezialfälle:

• Stehen der transmittierte und der reflektierte Strahl senkrecht aufeinander, dann wird der Teil des einfallenden Strahls nicht reflektiert, dessen elektrisches Feld senkrecht zur Grenzfläche zwischen den optischen Medien schwingt. Der zugehörige Einfallswinkel heißt **Brewsterwinkel** und berechnet sich zu

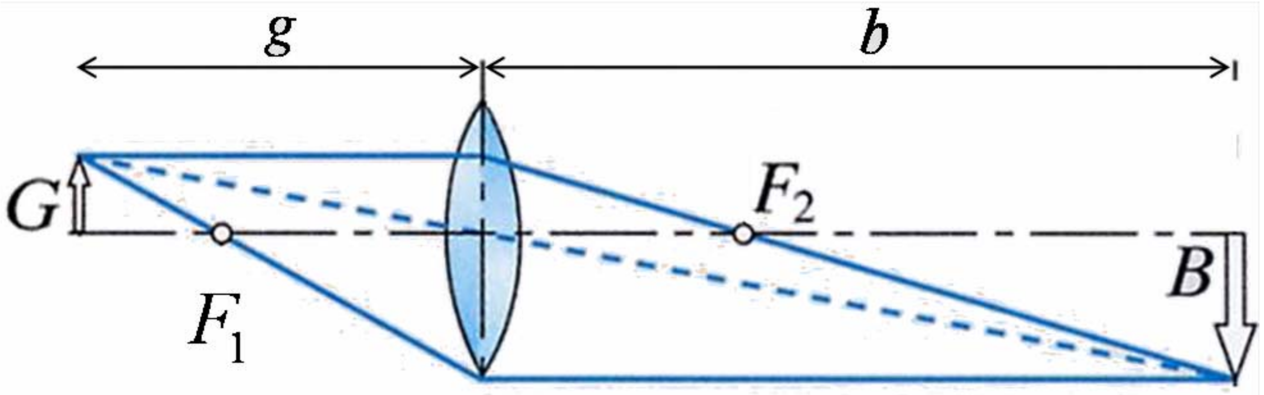
$$\boxed{\tan \Theta_B = \frac{n_t}{n_i}}$$

• Nur beim Übergang vom optisch dichteren zum optisch dünneren Medium kann Totalreflexion auftreten. Ist der Einfallswinkel größer als der kritische Winkel, so wird kein Licht transmittiert.

$$\boxed{\sin \Theta_{i,\mathrm{TOTAL}} = \frac{n_t}{n_i}}$$

Geometrische Optik

Wiederholung: Mittels sphärischer Linsen lässt sich eine optische Abbildung konstruieren.



Eigenschaften:

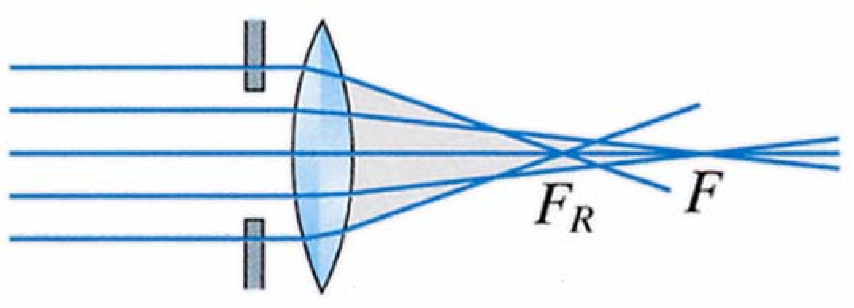
- Alle von einem Punkt ausgehenden Strahlen werden auf einen Punkt hinter der Linse abgebildet.
- Alle Punkte einer Ebene werden auf die Punkte einer dazu punktsymmetrischen Ebene eineindeutig abgebildet.

$$\boxed{\frac{1}{b} + \frac{1}{g} = \frac{1}{f}}$$

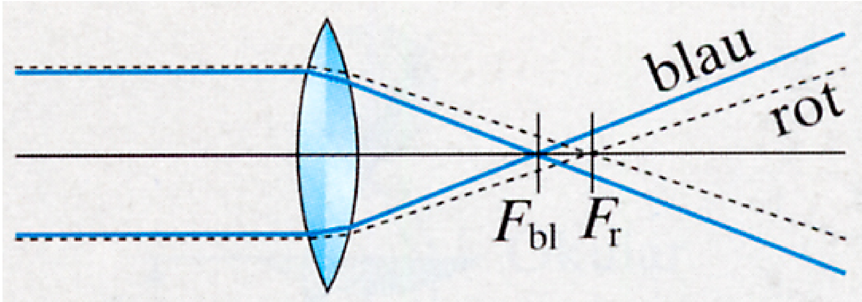
$$\boxed{V = \frac{B}{G} = \frac{b}{g}}$$

Geometrische Optik

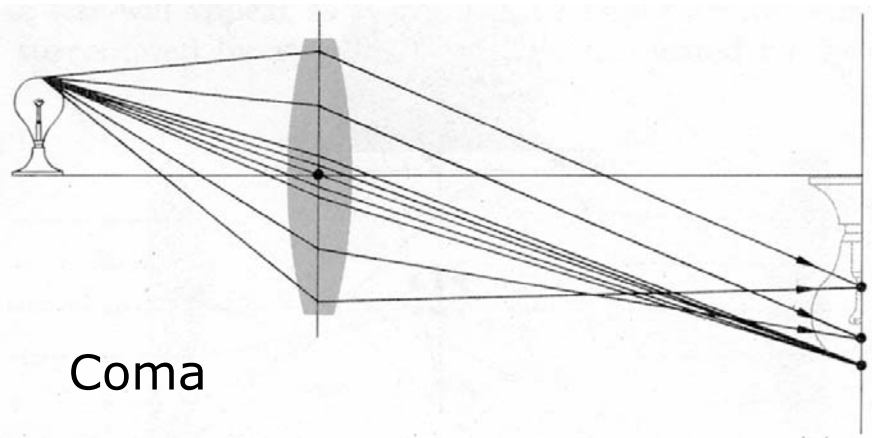
Wiederholung: Linsenfehler



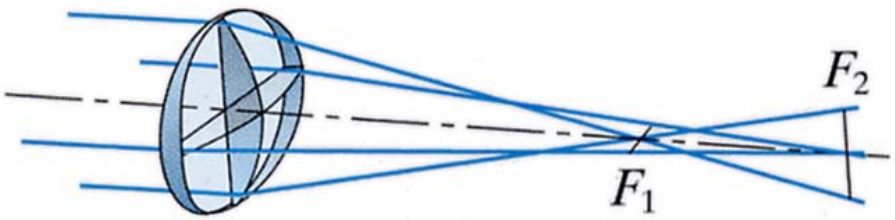
Sphärische Aberration



Chromatische Aberration



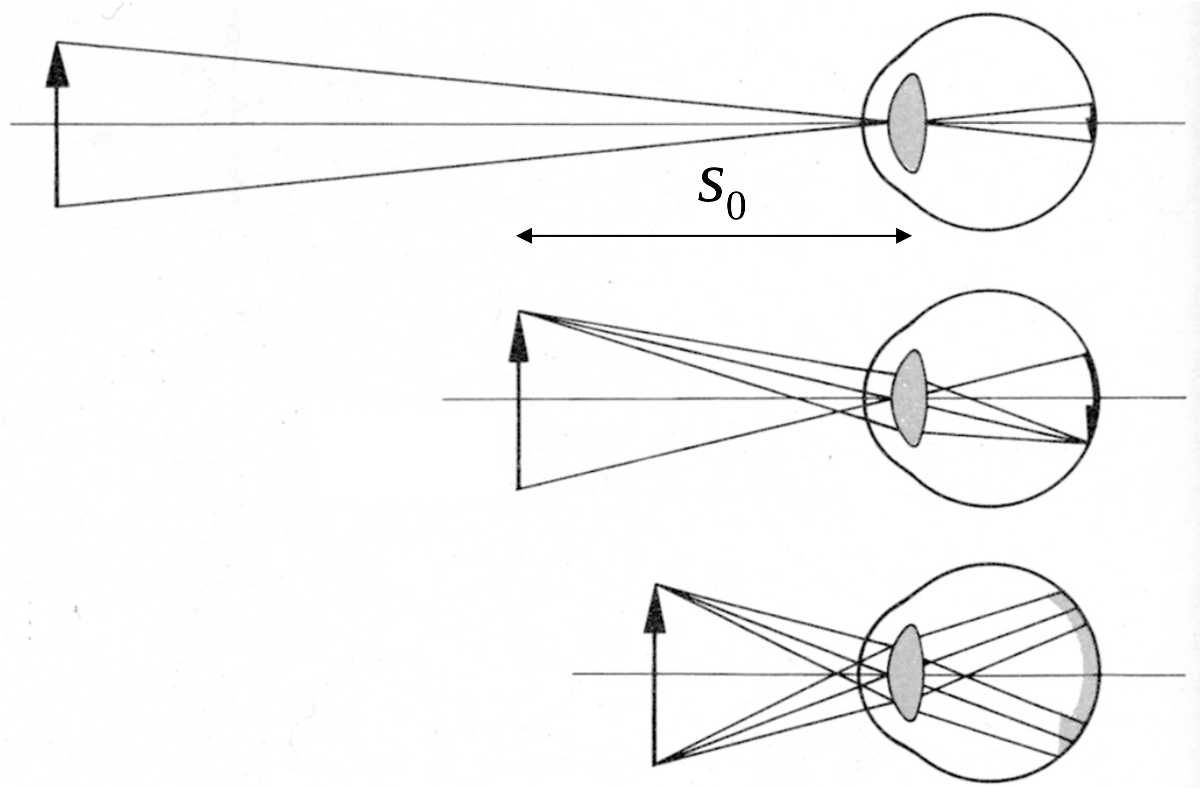
Coma



Astigmatismus

Geometrische Optik

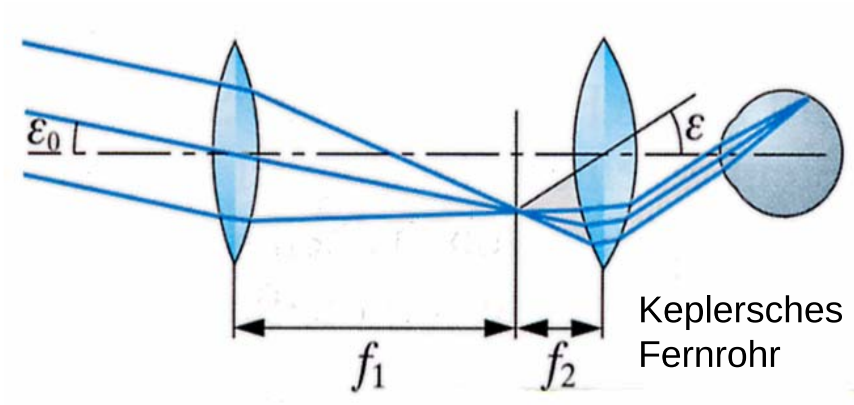
Wiederholung: Das Auge



Optische Abbildung mit variabler Brennweite. Maximale Vergrößerung ist durch minimalen Sehabstand s_0 begrenzt.

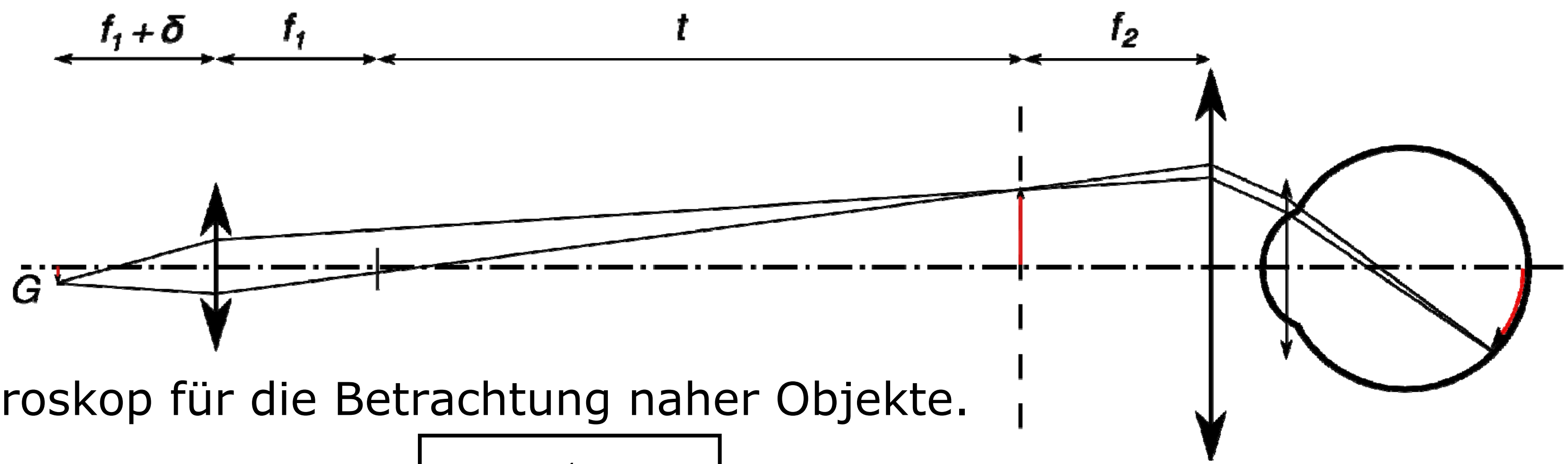
Optik

Wiederholung: Systeme zur Verbesserung der optischen Wahrnehmung



Für die Betrachtung unendlich weit entfernter Objekte.
Vergrößerung:

$$\boxed{V = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = \frac{f_1}{f_2}}$$

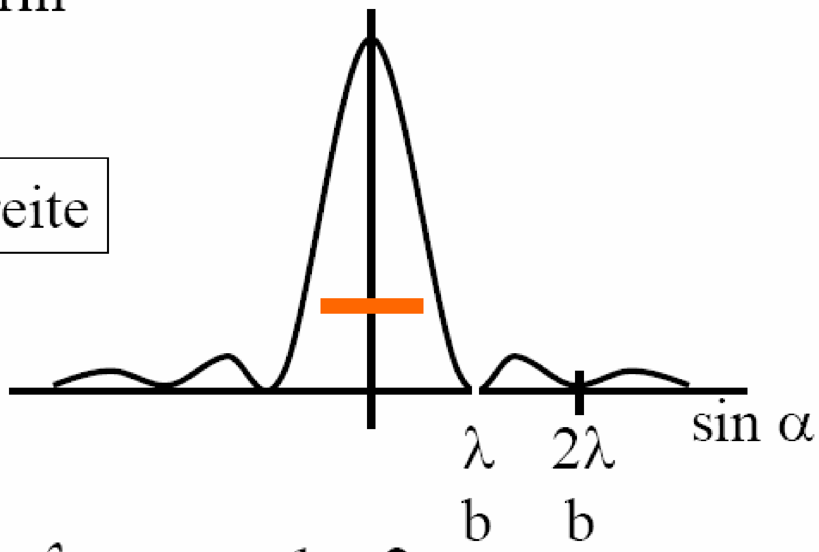


Mikroskop für die Betrachtung naher Objekte.

$$\boxed{V = \frac{t}{f_1} \cdot \frac{s_0}{f_2}}$$

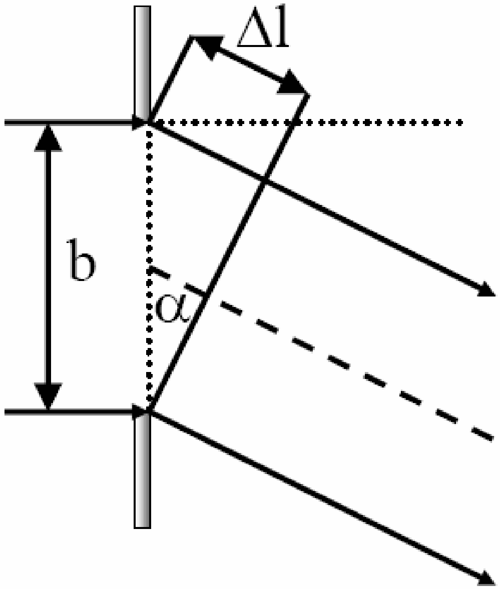
Beugung am Einzelspalt

- Paralleles, monochromatisches Licht auf Spalt (Länge >> Breite)
- Abbildung auf weit entfernten Schirm



Hauptmaximum $\hat{=}$ ungefähr Spaltbreite

$\Delta l = 0 \; (\alpha = 0)$



wenn: $\Delta l = z \cdot \lambda$; $z = \pm 1, \pm 2 \ldots$

➔ linke Hälfte im Gegentakt zur rechten

➔ Auslöschung

➔ Minimum für: $b \cdot \sin\alpha = z \cdot \lambda$

$z = \pm 1, \pm 2 \ldots$

Hauptmaximum für $z = 0$

Beugung am Einzelspalt

$b = \lambda$ oder $b < \lambda$:

➔ 1. Beugungsminimum bei $\alpha \geq 90°$
➔ volle Ausleuchtung des Halbraumes
➔ Spalt wirkt als Streuzentrum

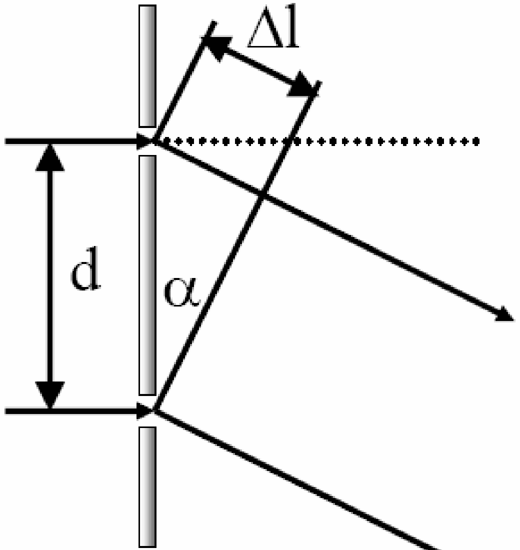
$b >> \lambda$:

➔ kleine Beugungswinkel

kleine Winkel ➔ $\sin\alpha \approx \alpha$ ➔ $\boxed{\alpha = z \cdot \frac{\lambda}{b}}$

➔ je größer λ , desto größer α : rotes Licht wird stärker gebeugt als blaues Licht

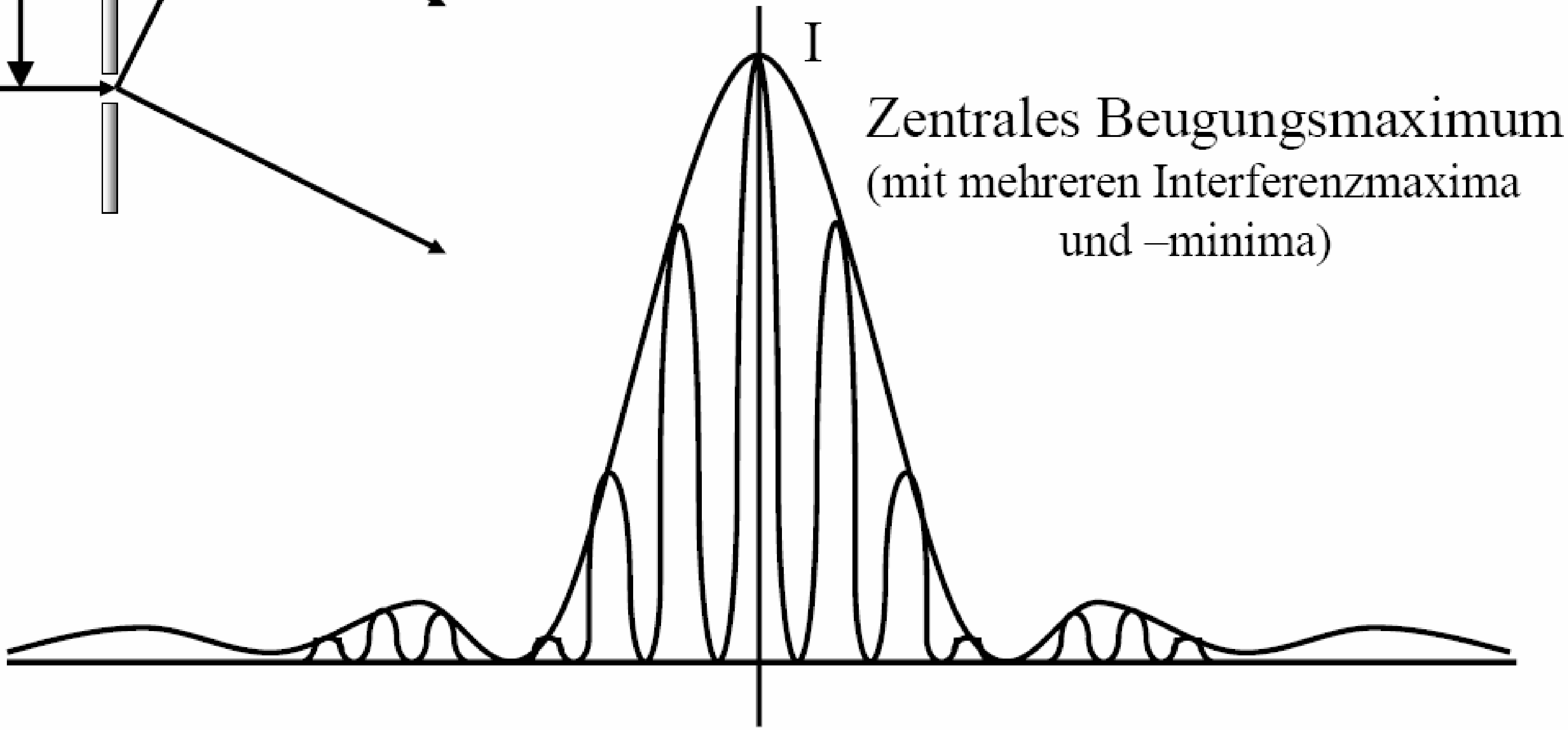
Beugung am Doppelspalt



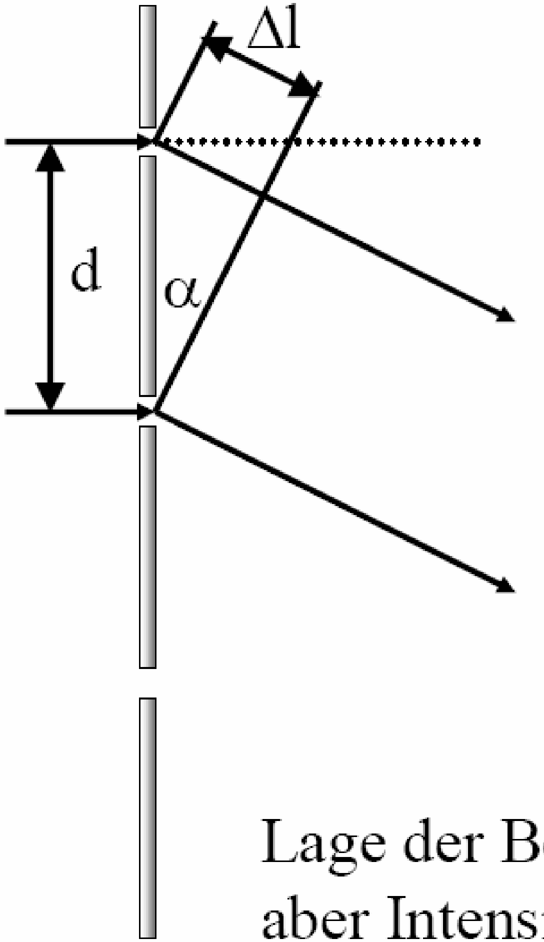
➔ Maxima für: $d \cdot \sin\alpha = z \cdot \lambda$

Minima für: $d \cdot \sin\alpha = \left(z + \frac{1}{2}\right) \cdot \lambda$

$z = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$



Beugung am Gitter



Geometrie wie beim Doppelspalt

➔Maxima für: $d \cdot \sin \alpha = z \cdot \lambda$

$z = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Minima für: $\mathbf{d} \cdot \sin \boldsymbol{\alpha} = \left(\mathbf{z} \pm \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{N}} \right) \cdot \boldsymbol{\lambda}$

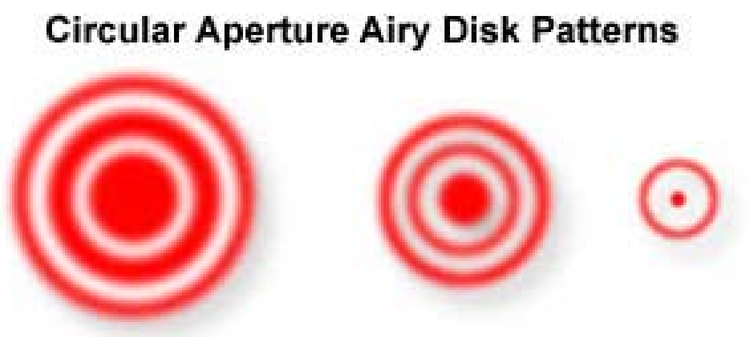
$z = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

N … Zahl der Spalte

Lage der Beugungsmaxima von Spaltzahl unabhängig
aber Intensität wächst mit Anzahl der Spalte (da schmaler)

Wiederholung: Auflösung optischer Instrumente

- **Grenze ist durch die <u>Wellennatur</u> des Lichts gegeben**
- **Alle Ränder von Linsen, Blenden, etc. wirken als „<u>beugende Öffnungen</u>“**
- **Für runde Öffnungen wird Punkt als konzentrische „<u>Beugungsscheibchen</u>“ (oder auch „<u>Airy-Scheibchen</u>“) abgebildet**
- **Definition Auflösungsvermögen:**
  - (Winkel-) Abstand, bei dem 2 Punkte eines Objekts noch als getrennte Bildpunkte wahrgenommen werden können
  - Empirisch: 2 Punkte können noch getrennt wahrgenommen werden, wenn das Hauptmaximum der Beugung des einen in das 1. Minimum des anderen fällt.



1. Max: $\alpha = 0$

1. Min: $\alpha_1 = \boxed{1,22} \cdot \lambda / d$
2. Min.: $\alpha_2 = 2,33 \cdot \lambda / d$

α... Beugungswinkel
d ... Durchmesser des Objektivs / der Öffnung

Wiederholung: Auflösung optischer Instrumente

- **Fotoapparat, Auge:**

$$\mathbf{r} = \mathbf{s} \geq 1{,}22\,\frac{\mathbf{f} \cdot \lambda}{\mathbf{d}}$$

Radius eines Beugungsscheibchens $\mathbf{r} = \mathbf{f} \cdot \alpha$
f... Brennweite
f/d ... Blendenzahl
s ... auflösbarer Bildpunktabstand

- **Teleskop:**

$$\alpha_{\min} > 1.22 \cdot \frac{\lambda}{D}$$

$\alpha_{\min}$ … minimal auflösbarer Winkelabstand zwischen benachbarten Fixsternen
D … Durchmesser der primären Teleskoplinse (oder Teleskopspiegel)

- **Mikroskop:** Nach Abbe → Objekt leuchtet nicht selbst, Licht wird am Objekt gebeugt

$$\boxed{s \geq \frac{\lambda}{n \cdot \sin\alpha}}$$

n·sin α ... numerische Apertur
α ... halber Öffnungswinkel

Achtung: anderes α !

Verbesserung der Auflösung durch

→ Verwendung von Immersionsflüssigkeit
→ Winkel α vergrössern
→ Übergang zu kürzeren Wellenlängen

Wiederholung: Auflösung optischer Instrumente

Achtung:

- **Alle diese „Auflösungslimits“ gehen von vielen, mehr oder weniger offensichtlichen Annahmen aus:**
  - Lichtausbreitung in homogenen Medien
  - Lichtausbreitung fern von absorbierenden / beugenden Strukturen
  - „Linearität“ der Licht-Materie Wechselwirkung
  - Keine speziellen quantenmechanische Effekte
  - Empirisches „Auflösungsvermögen“ unabhängig von, e.g., Signalrauschen
  - …
- **Deshalb bieten sich eine Reihe von „Schlupflöchern“ zur Verbesserung:**
  - Nahfeldmikroskopie
  - Nutzung nichtlinearer Effekte (e.g, STED-Mikroskopie)
  - Nutzung fortschrittliche statistische Methoden zur Zeitaufgelösten Signalanalyse („super resultion microscopy“)
  - Andere Abbildungsmechanismen bei Nutzung von exotischen Materialien mit „negativem Brechungsindex“
  - Nutzung von quantenmechanisch verschränkten Photonen
  - …

Wiederholung Struktur der Materie

Schritte zum experimentell belegten Atommodell

(1) Materie ist aus „Molekülen“ aufgebaut

- Daltons Gesetz der konstanten Proportionen
- Kinetische Gastheorie

(2) Zahl der Moleküle pro Mol – Avogardro-Konstante

- Gasgesetze
- Elektrolyse
- Milikan Versuch
- Röntgenbeugung + Molvolumen Bestimmung

(2a) „Größe“ der Moleküle (Atome)

$$(P + \frac{a}{V_m})(V_m - b) = RT$$

- Van-der-Waals Gleichung
- Transportkoeffizienten und freie Weglängen (Diffusion, Wärmeleitung, Viskosität, ...)
- Röntgenbeugung (Strukturfunktionen)

(3) Struktur

- Identifikation der Komponenten (schwere positive Teilchen, leichte negative)
- Streuexperimente **!!!**
- Spektroskopie + Modelle
- ...

Wiederholung Struktur der Materie

(2) Methoden zur Bestimmung von N_A

Methode	Naturkonstante	Avogadrozahl
Gasgesetze	Gaskonstante R	
barometrische Höhenformel (*Perrin*)		
Diffusion (*Einstein*)	Boltzmann-konstante k	$N_A = R/k$
Torsions-schwingungen (*Kappler*)		
Elektrolyse	Faraday-konstante F	$N_A = F/e$
Millikan-Versuch	Elementar-ladung e	
Röntgenbeugung und Interferometrie	Gitterebenen-abstand d_K im kubischen Kristall	$N_A = L^3/d_K^3$ für kubi-schen Kristall
Messung des Molvolumens $V_M = L^3$		

Kathoden- und Kanalstrahlen

→

Materie ist aufgebaut aus

schweren positiven

und

leichten negativen

Teilchen

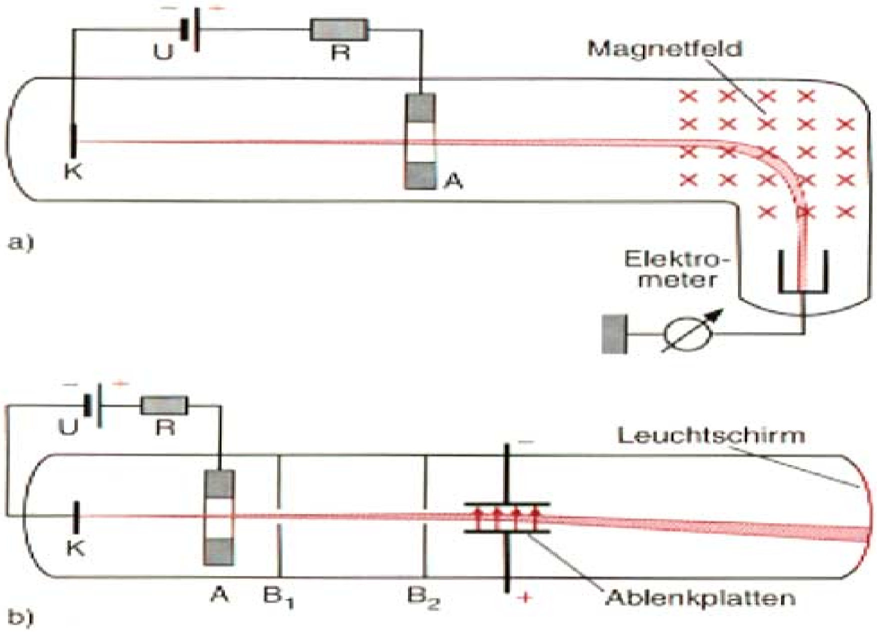


Abb. 2.34a,b. Anordnung von *J. J. Thomson* zur Bestimmung des Verhältnisses e/m der Kathodenstrahlung durch Ablenkung **(a)** im Magnetfeld, **(b)** im elektrischen Feld

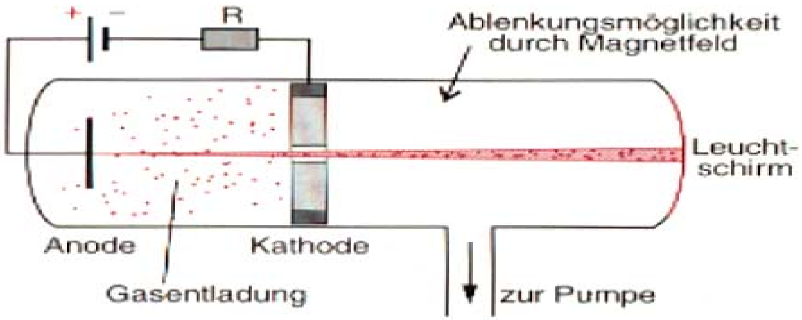
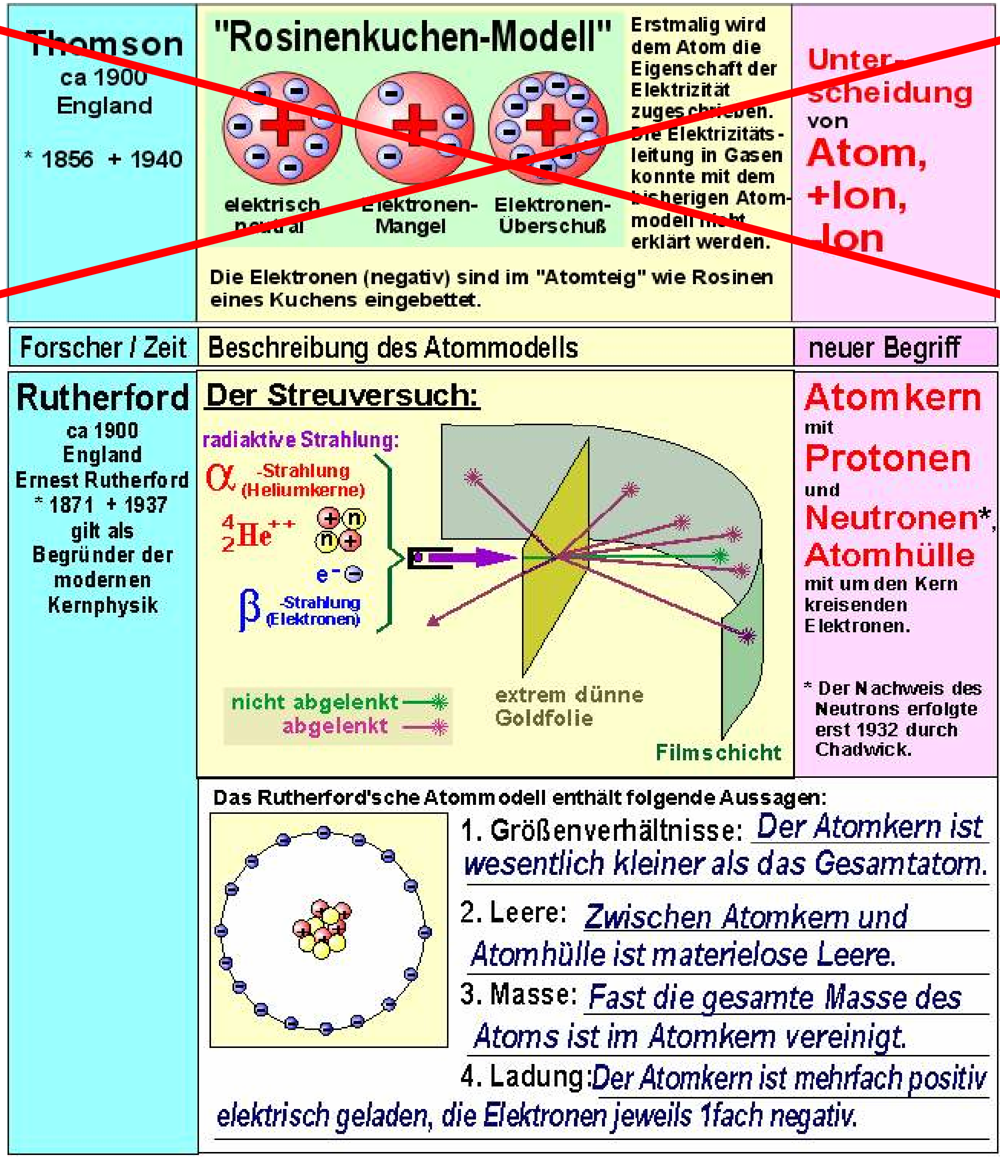


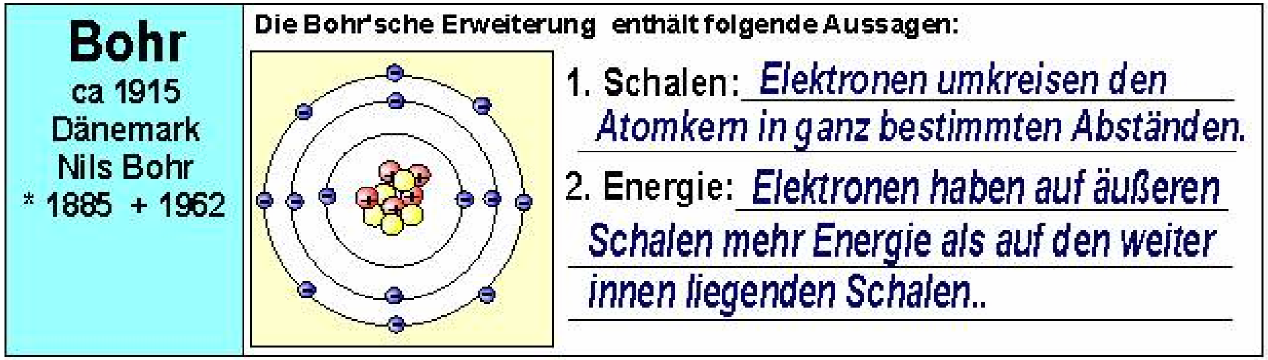
Abb. 2.35. Schematische Darstellung der experimentellen Realisierung von Kanalstrahlen in einer Gasentladung bei durchbohrter Kathode

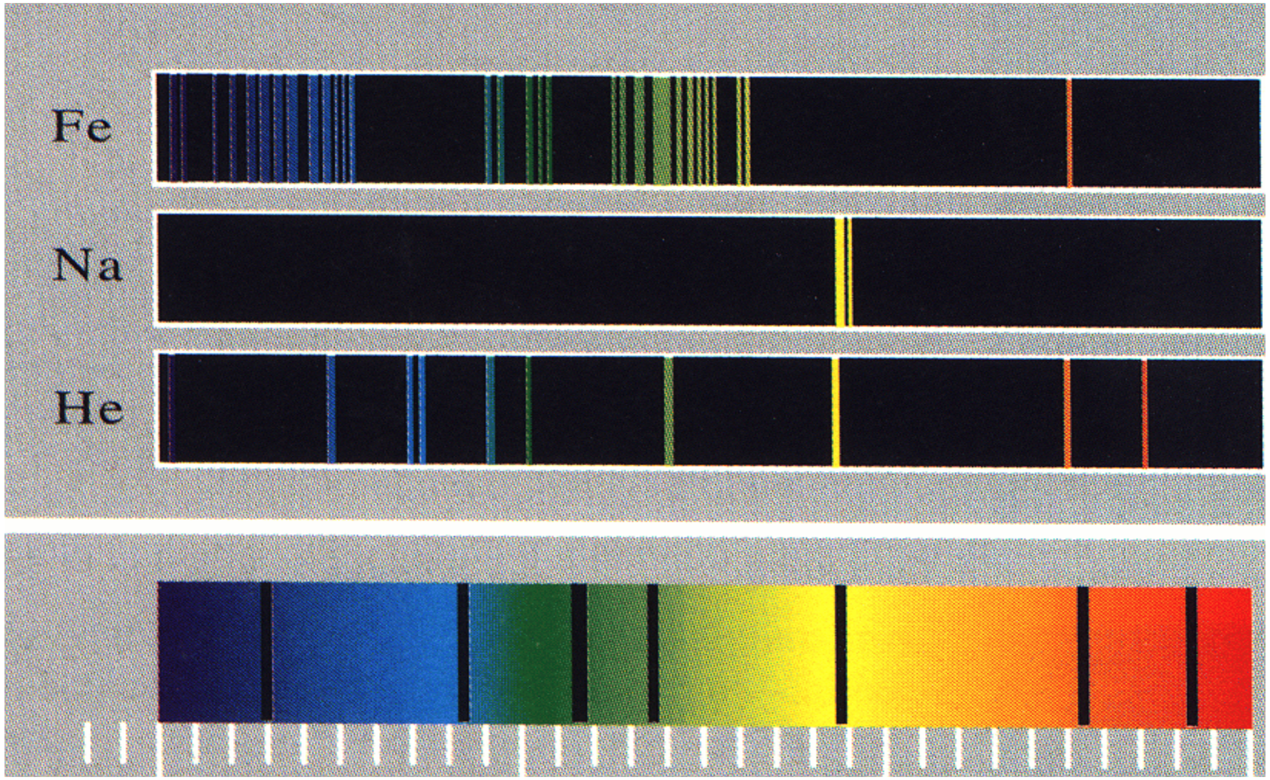
Wiederholung Struktur der Materie

Rutherford Experiment widerlegt z.B. das Tomson‘sche „Rosinenkuchen“ Atommodell



Bohrsches Atommodell / Linienspektren





Energieniveaus im Bohrschen Atommodell
(ergibt sich auch bei quantenmechanisch korrekter Herleitung)

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{(4\pi\varepsilon_0)^2}\frac{me^2(Ze)^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}} = -\frac{Z^2}{n^2}chR_\infty$$

$$\Delta E = E_n - E_m = Z^2 chR_\infty\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\boxed{R_\infty = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c}}$$

Rydberg-Konstante

$$\frac{1}{\lambda_{nm}} = \frac{\nu}{c} = \frac{\Delta E}{hc} = Z^2 R_\infty\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$$

Motivation und Grundprinzipien Quantenmechanik

- **Spektrum der Schwarzkörperstahlung**
- **Photoeffekt**
- **Compton-Effekt**

→ **Teilcheneigenschaften der elektromagnetischen Strahlung**

- **Diskrete Energiezustände in Atomen (und Molekülen ...)**
  - **Linienspektren**
  - **Franck-Hertz Versuch**
- **Beugungseffekte für Elektronen**

→ **Welleneigenschaften von Teilchen**

Generell gilt: **Alle** **Wellen besitzen Teilcheneigenschaften, und** **alle** **Teilchen besitzen Welleneigenschaften**

Grundprinzipien Quantenmechanik

Generell gilt: **<u>Alle</u> Wellen besitzen Teilcheneigenschaften, und <u>alle</u> Teilchen besitzen Welleneigenschaften**

Licht ➡ $\boxed{p = h/\lambda}$ $\boxed{E = h\nu}$

Postulat von de Broglie (1924): „Materiewellen"

Materie ➡ $\boxed{\lambda = h/p}$

$$\boxed{\lambda = h/\sqrt{2mE_{kin}}}$$

De Broglie-Wellenlänge

$$E = E_{pot} + E_{kin} = h\nu$$

Die folgenden Folien sind nicht mehr Klausurrelevant …

Grundprinzipien Quantenmechanik

Jedes Teilchen wird durch eine Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$ beschrieben

➔ Funktion von Raum und Zeit

Das Quadrat der Wellenfunktion entspricht der Wahrscheinlichkeit, das Teilchen bei einem beliebigen Wertesatz (x,y,z,t) anzutreffen.

$$|\Psi(x,y,z,t)|^2$$

Wahrscheinlichkeitsamplitude

Ψ kann komplexe Zahl sein ➔ Eigenschaften einer Welle

➔ „Wellenfunktion“

Schrödinger-Gleichung

Schrödinger-Gleichung in 3D

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},t) \;+\; \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\psi(\vec{r},t)=0$$

Schrödinger-Gleichung in 1D

$$\boxed{\lambda = h/\sqrt{2mE_{kin}}}$$

$$\boxed{\lambda = h/p}$$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) \;+\; \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)=0$$

$$\boxed{E = h\nu}$$

Ebene Welle als Lösung der Schrödinger-Gleichung:

$$\psi(x,t) \;=\; e^{i(kx-\omega t)} \;=\; e^{i\left(\frac{2\pi}{\lambda}x-2\pi\nu t\right)} \;=\; e^{i\left(\frac{p}{\hbar}x-\frac{E}{\hbar}t\right)}$$

Die Heisenbergsche Unschärferelation

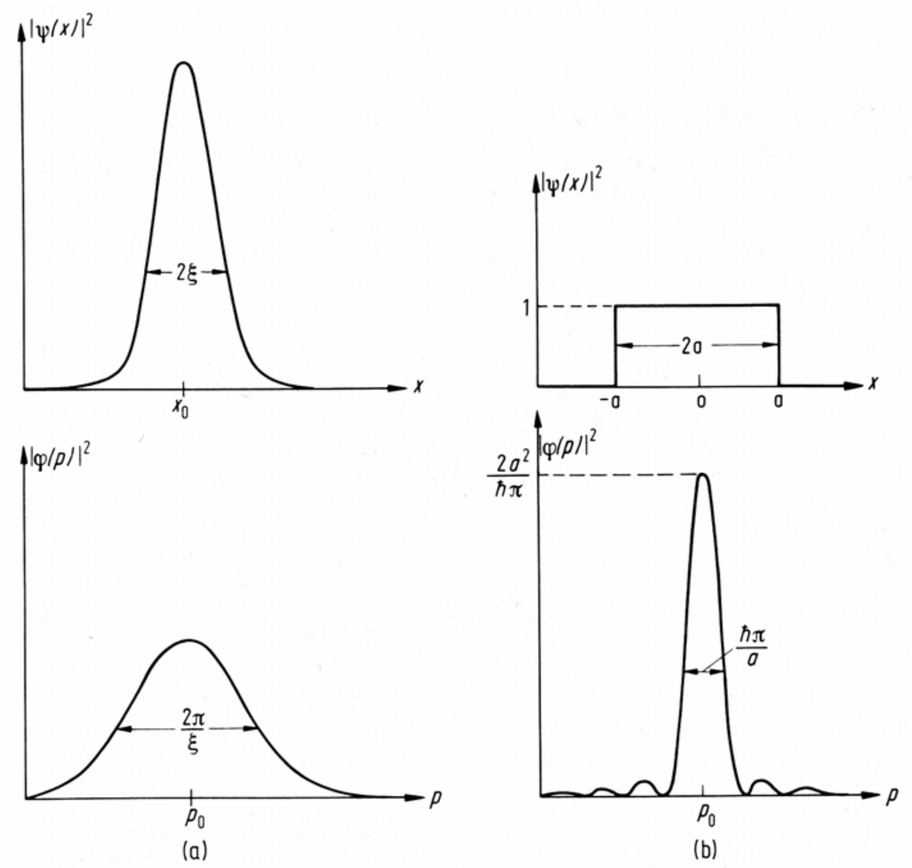
Aus den Eigenschaften der Fouriertransformation folgt unmittelbar für die Varianz Δx und Δp_x:

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta x \Delta p_x &\geq \hbar/2 \\ \Delta y \Delta p_y &\geq \hbar/2 \\ \Delta z \Delta p_z &\geq \hbar/2 \end{aligned}}$$

Heisenbergsche Unschärferelation

Das Gleichheitszeichen gilt für Gaußsche Wellenpakete!

> Einem Teilchen können nicht gleichzeitig ein genau definierter Ort und ein genau definierter Impuls zugewiesen werden!



Breite eines Wellenpaketes im x- und p-Raum für Gaußsches Paket (links) und Rechteckpaket (rechts)

Unterschiede zur klassischen Physik:

a) Das Wellenpaket kann auch im Fall $U_2>\varepsilon>U_1$ in den (klassisch verbotenen) Bereich **II** eindringen

b) Das reflektierte Wellenpaket erfährt eine zeitliche Verzögerung (Phasenverschiebung im Fall einer ebenen Welle)

c) Auch für den Fall $\varepsilon>U_2$ gibt es eine Reflexion.